

Aufgabe 1. In einem Spiel mit fünf Spielern bekommt in jeder Runde genau einer der Spieler einen Punkt. Das Spiel endet, sobald einer der Spieler 10 Punkte erreicht hat. Wie viele Runden kann dieses Spiel höchstens haben?

Ergebnis. 46

Lösung. Wenn das Spiel zu Ende ist, hat der Gewinner 10 Punkte gesammelt, während alle anderen Spieler höchstens 9 Punkte haben können. Die Anzahl der gespielten Runden kann also höchstens $10 + 4 \cdot 9 = 46$ sein.

Aufgabe 2. Gabi hat vier Karten, beschriftet mit den Ziffern 1, 2, 3 und 6. Sie verwendet alle Karten, um zwei Zahlen A und B zusammenzustellen, so dass A ein Vielfaches von B ist, beispielsweise $A = 36$ und $B = 12$. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür?

Ergebnis. 21

Lösung. Es gibt zwei Fälle:

I. B besteht aus einer Karte und A aus drei.

Für B gibt es dann folgende Möglichkeiten:

- $B = 1$: A ist eine beliebige Permutation von 2, 3, 6. $\rightarrow 6$ Möglichkeiten
- $B = 2$: A muss auf 6 enden. $\rightarrow 2$ Möglichkeiten
- $B = 3$: A ist beliebige Permutation von 1, 2, 6, denn die Quersumme ist immer 9. $\rightarrow 6$ Möglichkeiten.
- $B = 6$: A muss auf 2 enden. $\rightarrow 2$ Möglichkeiten

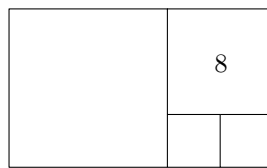
II. A und B bestehen jeweils aus zwei Karten.

Der Quotient A/B muss kleiner als 6 sein. Das ergibt folgende Möglichkeiten:

- $A/B = 1$ ist nicht möglich, da $A = B$ sein müsste.
- $A/B = 2$: A muss auf 2 oder 6 enden. Falls A auf 2 endet, muss B auf 6 oder 1 enden. Im ersten Fall bekommt man $A = 32$ und $B = 16$, im zweiten Fall $A = 62$ und $B = 31$. $\rightarrow 2$ Möglichkeiten
Falls A auf 6 endet, muss B auf 3 enden, also ist $A = 26$ und $B = 13$. $\rightarrow 1$ Möglichkeit
- $A/B = 3$: A muss mit 6 oder 3 beginnen. Im ersten Fall muss B mit 2 beginnen, also ergibt sich $A = 63$ und $B = 21$. Im zweiten Fall muss B mit 1 beginnen, woraus $A = 36$ und $B = 12$ folgt. $\rightarrow 2$ Möglichkeiten
- $A/B = 4$: A muss mit 6 beginnen und auf 2 enden, da A gerade ist. Aber $A = 62$ ist nicht durch 4 teilbar.
- $A/B = 5$: A muss auf 5 oder 0 enden, aber das ist nicht möglich.

Das ergibt insgesamt 21 Möglichkeiten.

Aufgabe 3. In der Abbildung sind vier Quadrate zu sehen, wovon eines einen Flächeninhalt von 8 besitzt. Welchen Flächeninhalt hat hier das größte Quadrat?



Ergebnis. 18

Lösung. Die Seitenlängen der Quadrate stehen im Verhältnis $3 : 2 : 1$. Der Flächeninhalt des größten Quadrates ist deshalb $(\frac{3}{2})^2 \cdot 8 = 18$.

Aufgabe 4. Einst trafen sich einige Elstern, Mathemagier und Zentauren in einem Zauberwald. Sie hatten insgesamt 15 Schwänze und 94 Arme. Wie viele Beine gab es?

Hinweis: Elstern haben keine Arme, sie haben zwei Beine und einen Schwanz. Mathemagier besitzen zwei Arme und zwei Beine, aber keinen Schwanz. Zentauren haben zwei Arme, vier Beine und einen Schwanz.

Ergebnis. 124

Lösung. Die Anzahlen der Elstern, Mathemagier und Zentauren werden mit e , m und z abgekürzt. Die Aussage über die Anzahl der Schwänze ergibt die Gleichung $e + z = 15$ und die über die Anzahl der Arme führt zu $2m + 2z = 94$. Die Anzahl der Beine ist $2e + 2m + 4z$ und kann durch geschicktes Zusammenfassen leicht berechnet werden als $2(e + z) + (2m + 2z) = 30 + 94 = 124$.

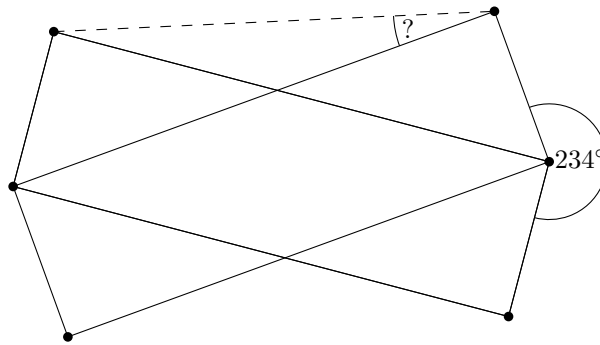
Aufgabe 5. Auf einem altertümlichen Fernseher gibt es genau drei Kanäle: Kanal 1, Kanal 2 und Kanal 3. Von einem beliebigen Kanal dieser drei kann man nur zu einem Kanal umschalten, bei dem die Nummer um eins abweicht. Beispielsweise kann man von Kanal 1 nur auf den Kanal 2 schalten.

Bruno startet auf Kanal 2. Anschließend wechselt er elf Mal den Kanal. Wie viele verschiedene Abfolgen von Kanälen kann er damit erhalten?

Ergebnis. 64

Lösung. Eine gesuchte Abfolge besteht aus zwölf Positionen, an denen die Kanäle stehen. An den ungeraden Positionen muss klarerweise immer der Kanal 2 stehen. An den geraden Positionen hingegen gibt es die Möglichkeit, dass entweder Kanal 1 oder aber Kanal 3 steht. Diese Auswahl geschieht an sechs Stellen, so dass insgesamt $2^6 = 64$ solche Abfolgen möglich sind.

Aufgabe 6. In der Abbildung sind zwei kongruente Rechtecke zu sehen. Außerdem ist die Größe eines Winkels gegeben. Bestimme die Größe des Winkels, der mit einem Fragezeichen markiert ist.



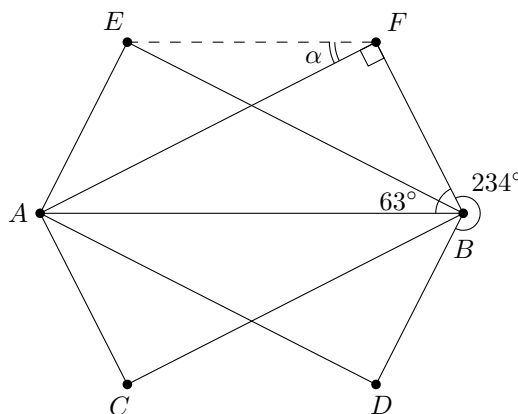
Ergebnis. 27°

Lösung. Die Punkte seien wie in der folgenden Abbildung benannt. Die gemeinsame Diagonale AB der beiden Rechtecke halbiert den Winkel $\angle FBD$, weshalb

$$\angle FBA = \frac{1}{2} \cdot (360^\circ - 234^\circ) = 63^\circ$$

gilt. Da die gestrichelte Linie EF parallel zu AB verläuft, ergibt sich $\angle EFB + \angle FBA = 180^\circ$. Indem man nun den bekannten rechten Winkel $\angle AFB$ noch abzieht, erhält man die gesuchte Größe

$$\alpha = 180^\circ - 90^\circ - 63^\circ = 27^\circ.$$



Aufgabe 7. Welchen Wert hat der Term $x^3 - 14x + 2024$, wenn $x^2 - 4x + 2 = 0$ gilt?

Ergebnis. 2016

Lösung. Wenn man von $x^3 - 14x + 2024$ zuerst $x(x^2 - 4x + 2) = 0$ subtrahiert, damit x^3 verschwindet, ergibt sich $4x^2 - 16x + 2024$. Um nun $4x^2$ loszuwerden, zieht man noch $4(x^2 - 4x + 2) = 0$ ab und erhält 2016 als Ergebnis für den gesuchten Wert.

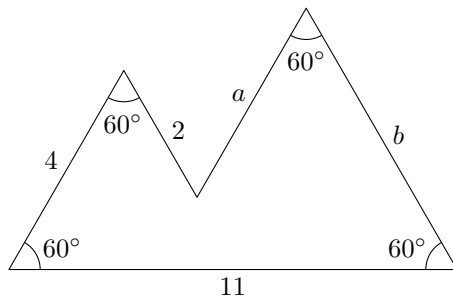
Aufgabe 8. Michael wählt eine natürliche Zahl n und notiert die Anzahl der geraden, ungeraden und aller Ziffern von n in dieser Reihenfolge. Er interpretiert diese drei Zahlen von links nach rechts gelesen als natürliche Zahl, wobei eine führende Null ignoriert wird, und erhält wieder n . Wie lautet das kleinstmögliche solche n ?

Wählt Michael zum Beispiel die Zahl 2024, dann ist die Anzahl der geraden Ziffern 4, die der ungeraden Ziffern 0 und die aller Ziffern 4. Das Ergebnis als Zahl ist damit 404.

Ergebnis. 123

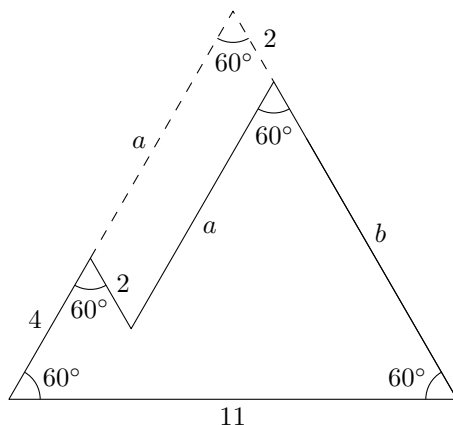
Lösung. Die gewählte Zahl n kann keine einzelne Ziffer sein, da diese entweder gerade oder ungerade ist und das Ergebnis damit mindestens zweistellig. Eine zweistellige Zahl als n ist auch nicht möglich, da das Ergebnis auf 2 enden würde. Die Anzahl der geraden Ziffern dieser Zahl wäre somit größer 0 und die Ausgabe somit dreistellig. Die Zahl ist also mindestens dreistellig. Eine dreistellige Zahl n muss auf 3 enden und die Summe der ersten beiden Ziffern ist ebenfalls 3. Theoretisch möglich sind nur 123, 213 und 303. Als Ergebnis bekommt man in allen diesen Fällen die Zahl 123. Also ist 123 die gesuchte kleinste Lösung.

Aufgabe 9. In der folgenden Figur ist ein Fünfeck mit einigen gegebenen Winkeln und Seitenlängen zu sehen. Bestimme $a + b$.



Ergebnis. 16

Lösung. Erweitere das Fünfeck durch das Anfügen eines Parallelogramms zu einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge $11 = 4 + a = 2 + b$ wie in der Abbildung.



Dann ist $a = 7$, $b = 9$ und $a + b = 16$.

Aufgabe 10. Im slowakischen Volkslied *Kopala studienku* („Sie grub einen Brunnen“) prüft ein Mädchen, ob ihr Brunnen gleich tief und breit ist. Per Definition ist ein Brunnen ein gerader Zylinder, dessen Höhe der Tiefe des Brunnens und dessen Durchmesser der Breite des Brunnens entspricht. Sie weiß, dass sie eine Woche braucht, um einen Brunnen mit der gewünschten Breite, aber nur $\frac{1}{3}$ der erforderlichen Tiefe zu graben, während Janko Matúška eine Woche braucht, um einen Brunnen zu graben, der ausreichend tief, aber nur halb so breit ist wie benötigt. Der Zeitaufwand ist proportional zur abgetragenen Erdmenge. Wie viele Tage brauchen sie, um gemeinsam den gewünschten Brunnen zu graben?

Ergebnis. 12

Lösung. Es ist vorausgesetzt, dass die zum Graben eines Brunnens benötigte Zeit proportional zu seinem Volumen ist. Da es sich um einen geraden Kreiszylinder handelt, ergibt sich sein Volumen aus der Formel $V = \frac{\pi}{4} \cdot t \cdot b^2$, wobei t für die Tiefe und b für die Breite steht. Daraus folgt, dass das Mädchen 7 Tage braucht um $\frac{\pi}{4} \cdot \frac{t}{3} \cdot b^2 = \frac{1}{3}V$ des Brunnens auszugraben. Sie braucht 21 Tage um das gesamte Volumen V auszugraben. Analog benötigt Janko 7 Tage um $\frac{\pi}{4} \cdot t \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}V$ des Brunnens auszugraben, also braucht er 28 Tage, um das gesamte Volumen V auszugraben. Daher kann das Mädchen $\frac{1}{21}$ und Janko $\frac{1}{28}$ des Brunnens an einem Tag ausgraben. Zusammen schaffen sie $\frac{1}{21} + \frac{1}{28} = \frac{1}{12}$ des Brunnens an einem Tag. Also brauchen sie 12 Tage, um gemeinsam einen Brunnen zu bauen.

Aufgabe 11. Bestimme die Anzahl aller Strecken der Länge $\sqrt{5}$, die zwei Ecken in einem Gitter von 10×10 Einheitsquadraten verbinden.

Ergebnis. 360

Lösung. Zuerst stellt man fest, dass jedes 2×1 Rechteck genau zwei Diagonalen der Länge $\sqrt{5}$ enthält. Das Ziel ist es also, die Anzahl der 2×1 -Rechtecke zu bestimmen. Angenommen das Rechteck ist vertikal ausgerichtet. Dann entstehen 10 Möglichkeiten, es in einer Spalte zu platzieren und 9 Möglichkeiten für eine Zeile. Es gibt also 90 Möglichkeiten, dieses Rechteck in einem 10×10 -Gitter zu platzieren. Analoges gilt für horizontal ausgerichtete Rechtecke in diesem Gitter. Folglich gibt es in jedem der $90 + 90 = 180$ Rechtecke zwei, also insgesamt 360 Diagonalen.

Aufgabe 12. Hier sind M, A, T und H verschiedene Ziffern ungleich Null, welche die Gleichung

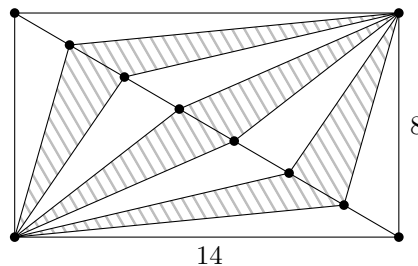
$$2024 + HAHA = MATH$$

erfüllen. Bestimme den größtmöglichen Wert der vierstelligen Zahl $MATH$.

Ergebnis. 5963

Lösung. Da $MATH$ und $HAHA$ die gleiche Hunderterstelle haben und die Hunderterstelle in 2024 gleich 0 ist, kann es beim Addieren der Zehnerstelle auf der linken Seite keinen Übertrag geben. Also ist $TH = HA + 24$ und $M = H + 2$. Bei der Addition von A und 4 muss es dagegen einen Übertrag geben, sonst wäre $T = H + 2 = M$ und die Ziffern T und M wären gleich. Daraus folgt $H = A + 4 - 10 = A - 6$ und $M = A - 4$ sowie $T = A - 3$. Die Möglichkeiten für $MATH$ reduzieren sich daher auf 3741, 4852 und 5963, wovon die letzte den größten Wert besitzt.

Aufgabe 13. Im Zebra-Rechteck der Abbildung mit den Seitenlängen 14 und 8 wird die Diagonale in sieben gleich lange Abschnitte zerlegt. Wie groß ist der schraffierte Flächeninhalt?



Ergebnis. 48

Lösung. Da die Höhen von den beiden Eckpunkten zur Diagonale für alle beteiligten Dreiecke gleich lang sind, ist der schraffierte Flächeninhalt genau $\frac{3}{7}$ des Flächeninhalts des Rechtecks. Daher lautet die Lösung $\frac{3}{7} \cdot 8 \cdot 14 = 48$.

Aufgabe 14. An einem Mathezirkel nehmen Mädchen und Buben teil. Würde sich einerseits ein neues Mädchen dem Mathezirkel anschließen, aber 20% der Buben den Mathezirkel verlassen, dann wären die Anzahlen von Buben und Mädchen gleich. Würde andererseits ein Mädchen den Mathezirkel verlassen und später noch die Anzahl der Mädchen um 30% steigen, dann wären es auch wieder gleich viele Buben wie Mädchen. Wie viele Kinder besuchen den Mathezirkel?

Ergebnis. 116

Lösung. Es sei m die Anzahl der Mädchen und b die der Buben. Die gemachten Aussagen führen zu den folgenden Gleichungen:

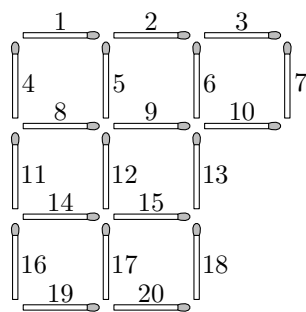
$$\begin{aligned} m + 1 &= \frac{4}{5}b, \\ \frac{13}{10}(m - 1) &= b. \end{aligned}$$

Setzt man $b = \frac{5}{4}m + \frac{5}{4}$ aus der ersten Gleichung in die zweite Gleichung ein, so ergibt sich

$$\frac{13}{10}m - \frac{13}{10} = \frac{5}{4}m + \frac{5}{4}.$$

Nach Multiplikation mit dem Hauptnenner und Zusammenfassen erhält man $m = 51$ und daraus $b = \frac{13}{10} \cdot 50 = 65$. Folglich ist die Anzahl der Kinder $m + b = 51 + 65 = 116$.

Aufgabe 15. Die Streichhölzer auf dem Bild formen neun Quadrate. Jedem Streichholz ist eine Zahl zugeordnet, wie in der Abbildung zu sehen. Entferne drei Streichhölzer so, dass genau fünf Quadrate übrig bleiben und jedes verbleibende Streichholz Teil eines Quadrats ist. Addiere die angegebenen Zahlen bei den entfernten Streichhölzern. Welche ist die größtmögliche Summe dieser drei Zahlen?



Ergebnis. 50

Lösung. Es gibt sieben Quadrate der Seitenlänge 1 und zwei Quadrate der Seitenlänge 2. Um die Anzahl der Quadrate auf fünf zu reduzieren, muss man genau vier Quadrate auflösen. Um das durch 3, 7, 6, 10 begrenzte Quadrat zu entfernen, muss man mindestens drei Streichhölzer wegnehmen und es würden acht Quadrate verbleiben. Dieses Quadrat muss also erhalten bleiben. Das Streichholz 6 kann deshalb nicht entfernt werden.

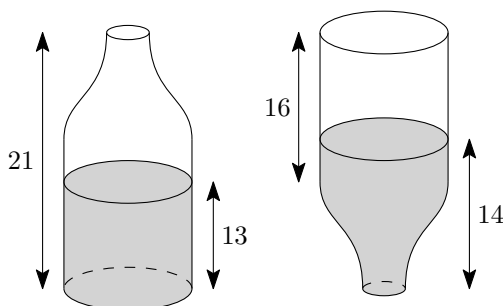
Wenn man eines der Streichhölzer 11 oder 13 entfernt, werden gleichzeitig die beiden großen Quadrate und ein kleines Quadrat aufgelöst. Wenn eines dieser Streichhölzer genommen wird, muss das letzte Quadrat durch Wegnahme von zwei Streichhölzern aufgelöst werden. Wenn das Streichholz 11 entfernt wird, dann können das Paar 12, 13 oder das Paar 18, 20 entfernt werden, damit wie gefordert genau fünf Quadrate übrig bleiben. Wenn das Streichholz 13 entfernt wird, dann kann dazu das Paar 1, 4, das Paar 11, 12 oder das Paar 16, 19 entfernt werden. Davon hat die Wegnahme der Streichhölzer 11, 18, 20 den höchsten Summenwert, nämlich 49.

Wenn die beiden großen Quadrate intakt bleiben, sind 5, 12 und 17 die einzigen Streichhölzer, die entfernt werden könnten, aber das führt nicht zu einer gültigen Konfiguration.

Da das Streichholz 6 nicht genommen werden darf und ein großes Quadrat aufgelöst werden muss, kann man annehmen, dass beide Streichhölzer aus einem der folgenden Paare entfernt werden: dem Paar 18, 20 oder dem Paar 16, 19 oder dem Paar 1, 4. Dabei werden zwei Quadrate gleichzeitig entfernt, ein großes und ein kleines. Danach muss ein drittes Streichholz genau zwei Quadrate auflösen.

Im Falle des Paares 18, 20 kann es entweder das Streichholz 11 sein, das ein kleines und ein großes Quadrat auflöst, oder 12, das zwei kleine Quadrate auflöst. Letzteres ergibt einen Summenwert von 50. Das Streichholz 13 kann nicht genommen werden, da dann das Streichholz 15 zu keinem Quadrat gehören würde. In ähnlicher Weise kann man zeigen, dass das Entfernen des Paares 16, 19 zusammen mit dem Streichholz 13 eine Gesamtsumme von 48 ergibt. Daher ist 50 die gesuchte Antwort.

Aufgabe 16. Paul hat eine Flasche der Höhe 21. Sie besteht aus einem Zylinder der Höhe 16 und einer unregelmäßigen Form am Flaschenhals. Paul füllte die Flasche teilweise mit Wasser. Er stellte fest, dass das Wasser eine Höhe von 13 erreichte. Dann stellte er die geschlossene Flasche auf den Kopf und bemerkte, dass das Wasser bis zur Höhe 14 stand. Wie viel Prozent des Volumens der Flasche war mit Wasser gefüllt?

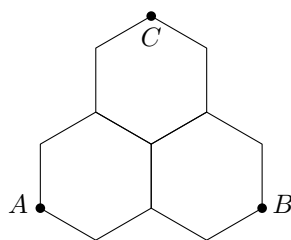


Ergebnis. 65

Lösung. Sei r der Radius des Zylinders. Aus der ersten Beobachtung folgt, dass das Volumen des Wassers in der Flasche $13\pi r^2$ ist. Mit der zweiten Messung wird das Volumen der Luft in der Flasche bestimmt, nämlich ist es $(21 - 14)\pi r^2 = 7\pi r^2$. Folglich hat die Flasche ein Gesamtvolumen von $(13 + 7)\pi r^2 = 20\pi r^2$ und der gesuchte Prozentsatz ist

$$\frac{13\pi r^2}{20\pi r^2} = \frac{13}{20} = 65\%.$$

Aufgabe 17. Hubert lebt in *Hexagonia*, einer Stadt, in der sämtliche Straßen die 1 km langen Seiten von drei regulären Sechsecken sind. Zuerst möchte er seine Freundin abholen und dann mit ihr ins Kino gehen. In der Abbildung startet Hubert am Punkt A , seine Freundin wohnt im Punkt B und das Kino befindet sich im Punkt C . Er will auf keinen Fall irgendeine Straße zweimal entlang gehen. Gib die Summe der Längen aller möglichen Wege, die er gehen kann, in Kilometern an.

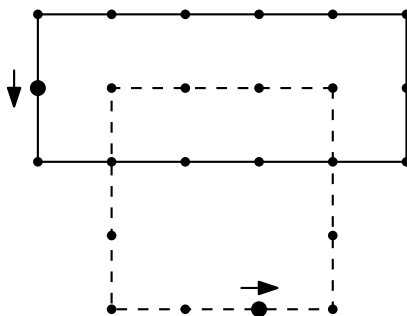


Ergebnis. 28

Lösung. Es gibt vier Wege von A nach B , die nicht über C gehen. Einer davon bietet zwei Möglichkeiten, um nach C zu gelangen, ein Weg hat genau eine Möglichkeit, nach C zu kommen, und bei den anderen beiden Wege gibt es keine Möglichkeit, nach C zu gehen, ohne dass eine Straße zweimal benutzt wird.

Insgesamt gibt es also drei gültige Wege nach C , die über B gehen. Zwei davon haben die Länge 10, der andere nur 8. Folglich ist 28 die gesuchte Summe.

Aufgabe 18. Zwei Wachen patrouillieren entlang von rechteckigen Wegen, wie in der Abbildung zu sehen ist. Sie starten jeweils an der mit dem Pfeil markierten Stelle, gehen in Richtung des Pfeils und bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit, so dass sie von einem markierten Kontrollpunkt zum benachbarten eine Minute brauchen. Nach wie vielen Minuten werden sie sich das erste Mal treffen?



Ergebnis. 44

Lösung. Wache A sei die Wache, die für eine Runde ihres rechteckigen Wegs 14 Minuten braucht, und Wache B sei die Wache, die für eine Runde ihres quadratischen Wegs 12 Minuten benötigt. Es gibt zwei mögliche Kontrollpunkte, an denen die beiden Wachen sich treffen können.

Wenn sie sich am linken Kontrollpunkt nach a vollen Runden von A und b vollen Runden von B treffen, dann muss

$$14a + 2 = 12b + 8$$

gelten. Diese Gleichung vereinfacht sich zu $7a = 6b + 3$ und es folgt $7 \mid 6b + 3$. Wenn man die Werte für $b \in \{0, 1, 2, \dots\}$ durchprobiert, so erhält man $b = 3$ und $a = 3$ als kleinste Lösung.

Wenn die Wachen sich beim rechten Kontrollpunkt treffen, dann muss in analoger Weise

$$14a + 5 = 12b + 3$$

gelten, also $7a = 6b - 1$. Daraus ergibt sich die Teilbarkeitsbedingung $7 \mid 6b - 1$, die aber $b \geq 6$ mit sich bringt.

Deshalb treffen sich die beiden Wachen zum ersten Mal nach $14 \cdot 3 + 2 = 44$ Minuten.

Aufgabe 19. Gegeben sind positive ganze Zahlen a , b und c , welche die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + b^2 - 172} &= c, \\ \sqrt{c^2 + b^2 - 220} &= a \end{aligned}$$

erfüllen. Was ist der größtmögliche Wert ihrer Summe $a + b + c$?

Ergebnis. 26

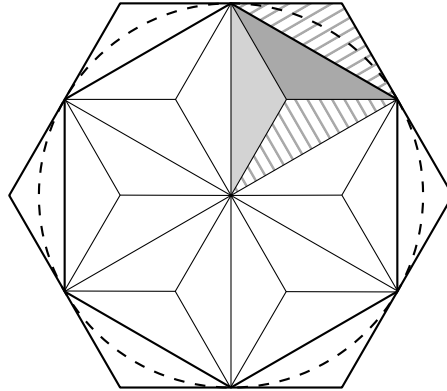
Lösung. Indem man beide Gleichungen quadriert und danach ihre Summe bildet, erhält man $2b^2 = 392$. Da b positiv sein muss, ist $b = 14$ die einzige Lösung für b . Setzt man dieses Ergebnis in die quadrierte erste Gleichung ein, so ergibt sich $a^2 + 24 = c^2$, also $c^2 - a^2 = 24$. Setze $d = c - a$. Dann ist d auf jeden Fall eine gerade Zahl, denn c und a sind entweder beide gerade oder beide ungerade.

Der Wert von $c^2 - a^2 = (c - a)(c + a)$ kann nach unten abgeschätzt werden mit $d(d + 2)$, was für $d \geq 6$ mindestens 48 ergibt, also eine Zahl größer als 24. Daher bleiben für d nur noch die Optionen $d = 2$ oder $d = 4$. Im ersten Fall ergibt sich $a + c = 12$ mit der Lösung $a = 5$ und $c = 7$. Im zweiten Fall bekommt man $a + c = 6$ mit der Lösung $a = 1$ und $c = 5$. Folglich ist $5 + 14 + 7 = 26$ der größtmögliche Wert für $a + b + c$.

Aufgabe 20. Gegeben ist ein Kreis, der zugleich Inkreis eines regelmäßigen Sechsecks $S_{\text{außen}}$ als auch Umkreis eines regelmäßigen Sechsecks S_{innen} ist. Welcher Anteil des Sechsecks $S_{\text{außen}}$ wird durch das Sechseck S_{innen} überdeckt?

Ergebnis. $\frac{3}{4}$

Lösung. Eine Unterteilung in kongruente Dreiecke, wie sie in der Abbildung zu sehen ist, führt mittels Abzählen zur Antwort $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$.



Alternative Lösung. Sei r der Radius des Kreises. Beide Sechsecke können in sechs gleichseitige Dreiecke unterteilt werden. Im Fall des Sechsecks S_{innen} ist $\frac{1}{2}\sqrt{3}r$ die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks, während ein gleichseitiges Dreieck des Sechsecks $S_{\text{außen}}$ die Höhe r besitzt. Deshalb ist der Ähnlichkeitsfaktor für die Längen $k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und folglich der Ähnlichkeitsfaktor für die Flächeninhalte $k^2 = \frac{3}{4}$.

Aufgabe 21. Wir bezeichnen den n -ten Geburtstag als *quadratischen Geburtstag*, wenn $n > 1$ ist und für jede Primzahl p , die n teilt, n auch durch p^2 teilbar ist. Zum Beispiel ist $n = 8 = 2^3$ ein quadratischer Geburtstag, während $n = 56 = 8 \cdot 7$ kein solcher ist. In diesem Jahr feierte Großvater Erich seinen 196-ten Geburtstag. Wie viele quadratische Geburtstage hatte er bisher?

Ergebnis. 20

Lösung. Die Primfaktorzerlegung jedes quadratischen Geburtstags setzt sich aus einem oder mehreren Faktoren p^k mit primem p und $k > 1$ zusammen. Alle solchen Produkte kleiner oder gleich 196 sind 2^k für $k = 2, \dots, 7$ sowie $3^2, 3^3, 3^4, 2^2 \cdot 3^2, 2^2 \cdot 3^3, 2^3 \cdot 3^2, 2^4 \cdot 3^2, 5^2, 5^3, 2^2 \cdot 5^2, 7^2, 2^2 \cdot 7^2, 11^2, 13^2$, zusammen also 20 Zahlen.

Aufgabe 22. Ein mathematischer Wettbewerb wird bereits seit 10 Jahren durchgeführt, wobei die Zahl der Probleme im Jahr des n -ten Wettbewerbs gleich $n + 2$ war, die in üblicher Form von 1 bis $n + 2$ durchnummeriert wurden. Für die 11. Auflage des Wettbewerbs wollen die Organisatoren eine Aufgabe aus jedem der vorherigen Wettbewerbe nehmen, so dass ein Test mit 10 Problemen entsteht, die mit 1 bis 10 nummeriert sind, wobei die jeweilige Nummer aus dem älteren Wettbewerb übernommen wird. Wie viele verschiedene Tests können so zusammengestellt werden, wenn vorausgesetzt wird, dass keine zwei Fragen aus den vorherigen Wettbewerben identisch waren?

Ergebnis. $3^8 \cdot 2 = 13122$

Lösung. Die Organisatoren haben drei Fragen aus dem ersten Wettbewerb zur Auswahl. Aus dem zweiten Wettbewerb können sie eine der $4 - 1 = 3$ möglichen Fragen wählen, da eine Nummer durch die aus dem ersten Wettbewerb ausgewählte Frage bereits besetzt ist. Es ist leicht zu erkennen, dass dieses Muster bis zum achten Wettbewerb bestehen bleibt, nämlich dass im k -ten Wettbewerb bereits $k - 1$ Nummern aufgrund vorheriger Entscheidungen nicht mehr verfügbar sind, so dass drei Optionen übrig bleiben. Im neunten Wettbewerb kann die Frage 11 nicht gewählt werden, da die Nummer zu groß ist, so dass nur noch zwei Fragen zur Auswahl stehen. Aus dem zehnten Wettbewerb können die Fragen Nr. 11 und Nr. 12 nicht gewählt werden, so dass nur eine geeignete Frage übrig bleibt. Insgesamt gibt es $3^8 \cdot 2 = 13122$ solcher Tests.

Aufgabe 23. Gesucht ist die kleinste positive ganze Zahl, die mit der Ziffer 1 beginnt und die folgende Eigenschaft besitzt: Wenn die Ziffer 1 vom Beginn der Zahl an das Ende der Zahl verschoben wird, dann ist die so entstandene Zahl drei Mal so groß wie die ursprüngliche Zahl.

Hier ist ein Beispiel für das Verschieben der ersten Ziffer an das Ende der Zahl: $174 \rightarrow 741$.

Ergebnis. 142857

Lösung. Weil man ja die Einerstelle der neuen Zahl kennt, denn sie ist 1, kann man die ursprüngliche Zahl schrittweise wie folgt über die Multiplikation mit 3 rekonstruieren:

$$\begin{aligned} \dots x \cdot 3 &= \dots 1 \Rightarrow x = 7 \\ \dots y7 \cdot 3 &= \dots 71 \Rightarrow y = 5 \\ \dots z57 \cdot 3 &= \dots 571 \Rightarrow z = 8 \\ \dots t857 \cdot 3 &= \dots 8571 \Rightarrow t = 2 \\ \dots s2857 \cdot 3 &= \dots 28571 \Rightarrow s = 4 \\ \dots r42857 \cdot 3 &= \dots 428571 \Rightarrow r = 1 \end{aligned}$$

In der Tat ist $142857 \cdot 3 = 428571$ erfüllt.

Alternative Lösung. Jede positive ganze Zahl mit erster Ziffer 1 und mindestens zwei Stellen kann geschrieben werden als $10^k + a$ mit einem $k \geq 1$ und einer k -stelligen Zahl a . Nachdem die Ziffer 1 vom Beginn der Zahl nach hinten gewandert ist, hat die neu entstandene Zahl die Form $10a + 1$. Also muss die Gleichung

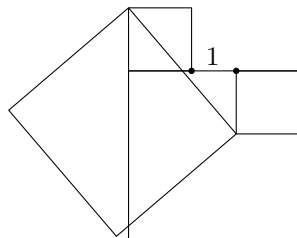
$$3 \cdot (10^k + a) = 10a + 1$$

für k und a gelöst werden. Nach Vereinfachung ergibt sich

$$3 \cdot 10^k - 1 = 7a.$$

Die Zahl auf der linken Seite ist nichts anderes als eine 2 gefolgt von k Neunen. Nun nimmt man so viele Neunen her, wie man braucht, und dividiert die Zahl $299 \dots 9$ durch 7, bis kein Rest mehr bleibt. Diese Vorgehensweise führt zu $a = 42857$ und damit zur Lösung 142857.

Aufgabe 24. Das Bild zeigt eine Konfiguration von zwei Paaren kongruenter Quadrate (mit positiven Seitenlängen), wobei die beiden markierten Punkte den Abstand 1 haben. Wie groß ist die Summe der Flächeninhalte der vier Quadrate?

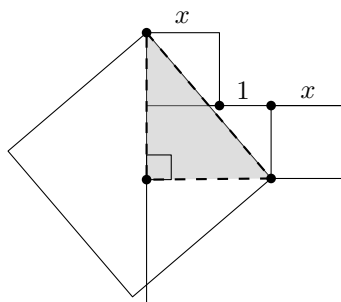


Ergebnis. 58

Lösung. Wenn x die Seitenlänge der kleineren Quadrate bezeichnet, so folgt aus dem Satz des Pythagoras für das graue rechtwinklige Dreieck im Bild

$$(2x)^2 + (1+x)^2 = (1+2x)^2.$$

Diese Gleichung vereinfacht sich zu $x^2 = 2x$, woraus $x = 2$ folgt. Die Antwort ist dann $2 \cdot (2^2 + 5^2) = 58$.



Aufgabe 25. Kletterer Christian wird von der höchsten Stelle einer senkrechten Wand herabgelassen. Das bedeutet, dass er an einem Ende des Seils angebunden ist, das durch einen festen Punkt an der höchsten Stelle der Wand und dann hinunter zu Lukas führt, der auf dem Boden steht und das Seil kontrolliert gleiten lässt. Das Seil ist elastisch und durch Christians Gewicht dehnt sich der belastete Teil zwischen ihm und Lukas um 20%. Das Seil hat in der Mitte eine Markierung. Als Christian herabgelassen wird, trifft er diese Markierung bei einem Drittel der Höhe der Wand über dem Boden. Er ist erleichtert, denn dies gibt ihm die Gewissheit, dass das Seil lang genug ist, und er beginnt sich zu fragen, wie hoch die Wand tatsächlich ist. Als er den Boden berührt und das Seil noch straff ist, sind noch 10 Meter loses Seil übrig. Wie hoch ist die Wand in Metern, wenn man die Höhe der Personen und die Länge der verwendeten Knoten außer Acht lässt?

Ergebnis. 18

Lösung. Die Länge des ungedehnten Seils sei mit l und die Höhe der Wand mit h bezeichnet. Wenn der Kletterer auf die Markierung trifft, ist die Länge der Hälfte des (gedehnten) Seils gleich der doppelten Entfernung des Kletterers vom höchsten Punkt der Wand. Also ergibt sich die Gleichung

$$\frac{6}{5} \cdot \frac{l}{2} = 2 \cdot \frac{2h}{3}.$$

Wenn der Kletterer den Boden berührt, erhält man in ähnlicher Weise

$$\frac{6}{5}(l - 10) = 2h,$$

was nach dem Einsetzen von $l = \frac{20}{9}h$ aus der ersten Gleichung leicht zu lösen ist und $h = 18$ ergibt.

Aufgabe 26. In einer Schublade befinden sich n Socken. Wenn zwei Socken zufällig herausgenommen und nicht mehr zurückgelegt werden, ist $\frac{2}{15}$ die Wahrscheinlichkeit, dass alle beide Socken blau sind. Was ist dann der kleinstmögliche Wert für n ?

Ergebnis. 10

Lösung. Sei b die Anzahl der blauen Socken. Die Wahrscheinlichkeit, dass alle beide Socken blau sind, ist dann $\frac{b}{n} \cdot \frac{b-1}{n-1}$. Weil dieser Ausdruck nach Voraussetzung gleich $\frac{2}{15}$ sein soll, muss die folgende Gleichung gelten:

$$15 \cdot b \cdot (b - 1) = 2 \cdot n \cdot (n - 1)$$

Da sowohl 3 als auch 5 die linke Seite teilen und beide zu 2 teilerfremd sind, müssen sie auf der rechten Seite $n \cdot (n - 1)$ teilen. Nun startet man für n mit kleinen Vielfachen von 3 bzw. 5, um zu entdecken, dass $n = 6$ zu $15 \cdot b \cdot (b - 1) = 2 \cdot 6 \cdot 5 = 60$ führt. Allerdings kann $b \cdot (b - 1) = 4$ leider nicht für ganze Zahlen erfüllt werden. Deshalb ist $n = 6$ keine Lösung. Für $n = 10$ kann die Gleichung $b \cdot (b - 1) = 12$ mit dem ganzzahligen $b = 4$ erfüllt werden. Folglich ist 10 die gesuchte Antwort für n .

Aufgabe 27. Finde die größte ganze Zahl, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

- Sie hat genau sieben Stellen.
- Keine zwei Ziffern sind gleich.
- Sie ist ein Vielfaches von 11.

Ergebnis. 9876504

Lösung. Hier wird folgende Regel (alternierende Quersumme) für die Teilbarkeit durch 11 benutzt: Eine ganze Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn die Differenz zwischen der Summe der Ziffern auf den ungeraden Stellen und der Summe der Ziffern auf den geraden Stellen durch 11 teilbar ist.

Unter allen Zahlen mit einer vorgegebenen Anzahl an Stellen, sieben in diesem Fall, sind diejenigen Zahlen die größeren, die mit den höchsten Ziffern beginnen. Sucht man nach einer geforderten Zahl, so beginnt man aus diesem Grund, die Ziffern von 9 an absteigend zu wählen. Nach dem Aufschreiben von 98765 stellt man fest, dass die Summe der Ziffern auf den „ungeraden“ Stellen $9 + 7 + 5 = 21$ ist und diejenige auf den „geraden“ Stellen $8 + 6 = 14$ ist. Ihre Differenz ist 7 und die Teilbarkeit durch 11 soll erreicht werden, indem zwei Ziffern aus der Menge $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ hinzugenommen werden. Als einzige Möglichkeit bleibt, die 0 zu den „geraden“ Stellen und die 4 zu den „ungeraden“ Stellen hinzuzufügen, was zur Lösung 9876504 führt. Weil alle anderen Lösungen mit einer fünfstelligen Zahl kleiner als 98765 beginnen, ist 9876504 in der Tat die größte Zahl ihrer Art.

Alternative Lösung. Starte mit 9876543, der größten siebenstelligen Zahl mit verschiedenen Ziffern. Benutze entweder die Regel über die Teilbarkeit durch 11 oder schriftliche Division, um zu erkennen, dass diese Zahl nicht durch 11 teilbar ist, aber die etwas kleinere Zahl 9876537 schon. Dies ist das größte Vielfache von 11, das kleiner ist als die Zahl,

von der aus gestartet wurde. Weil ihre Ziffern nicht alle verschieden sind, wird 11 abgezogen und die danach erhaltene Zahl erneut daraufhin geprüft, ob alle ihre Ziffern verschieden sind. Nach nur ein paar Schritten

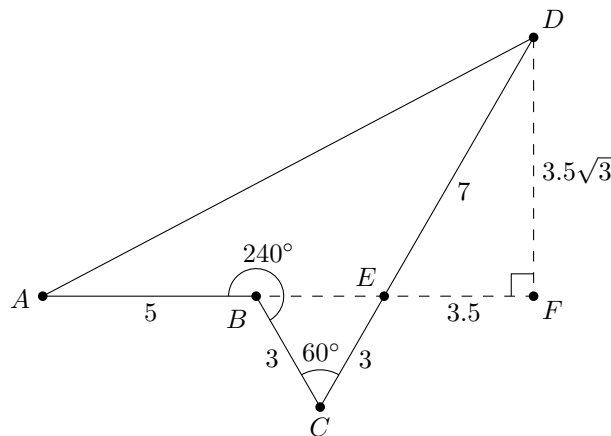
$$9876537 \longrightarrow 9876526 \longrightarrow 9876515 \longrightarrow 9876504$$

ergibt sich die gesuchte Zahl 9876504.

Aufgabe 28. Betrachte ein Viereck $ABCD$ mit folgenden Eigenschaften: Gegeben sind die Seitenlängen $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 3$ und $\overline{CD} = 10$, der Innenwinkel bei B misst 240° und der Innenwinkel bei C ist 60° groß. Berechne die Streckenlänge von AD .

Ergebnis. 13

Lösung. Fertige gemäß den gegebenen Daten eine Skizze. Vervollständige B und C mit einem dritten Punkt E auf der Strecke CD zu einem gleichseitigen Dreieck BCE . Dann hat das Dreieck AED Seiten mit den Längen $\overline{AE} = 8$ und $\overline{ED} = 7$ sowie den Winkel $\angle DEA = 120^\circ$. Mit dem Kosinussatz und $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ ergibt sich deshalb $\overline{AD}^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \cos 120^\circ = 169$. Folglich ist $\overline{AD} = 13$.



Alternative Lösung ohne den Kosinussatz. Wenn man das Dreieck AED um ein halbes gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge 7 erweitert, kann man im Dreieck DAF den Satz des Pythagoras anwenden, um $AD^2 = (5 + 3 + 3.5)^2 + (3.5 \cdot \sqrt{3})^2 = 169$ zu erhalten.

Aufgabe 29. Wie viele geordnete Quadrupel (a, b, c, d) positiver ganzer Zahlen erfüllen die Gleichung

$$2024 = (2 + a) \cdot (0 + b) \cdot (2 + c) \cdot (4 + d) ?$$

Ergebnis. 18

Lösung. Zunächst einmal wird die Primfaktorzerlegung von 2024 benötigt, sie lautet

$$2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23.$$

Da a, b, c und d positive ganze Zahlen sind, gilt $2 + a \geq 3$, $2 + c \geq 3$ und $4 + d \geq 5$. Ein Faktor 1 oder ein Faktor 2 auf der rechten Seite darf nur einmal in $(0 + b)$ vorkommen und ein Faktor 4 darf nur entweder in $(2 + a)$ oder $(2 + c)$ vorkommen.

Da das Produkt auf der rechten Seite der gegebenen Gleichung aus vier Faktoren besteht, gibt es vier mögliche Faktorzerlegungen von 2024, wobei höchstens ein Faktor kleiner als 4 ist, nämlich

$$2024 = 1 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 23 \quad \text{und} \quad 2024 = 1 \cdot 4 \cdot 22 \cdot 23 \quad \text{und} \quad 2024 = 1 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 46 \quad \text{und} \quad 2024 = 2 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 23.$$

Bei der ersten Faktorzerlegung ist $b = 1$, und die restlichen Faktoren können in beliebiger Reihenfolge $a + 2$, $c + 2$ und $d + 4$ zugeordnet werden, was 6 Lösungen ergibt. Bei der zweiten Faktorzerlegung gilt ebenfalls $b = 1$, dann entweder $a + 2 = 4$ oder $c + 2 = 4$. Und in jedem dieser Fälle können die verbleibenden Faktoren auf zwei Arten zugeordnet werden, so dass es insgesamt 4 Lösungen für die zweite Faktorzerlegung gibt. Analog dazu gibt es für die dritte und vierte Faktorzerlegung jeweils 4 Lösungen. Insgesamt ergeben sich also 18 verschiedene Lösungsquadrupel:

Faktorzerlegung von 2024	Lösung			
	a	b	c	d
$2024 = 8 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 23$	6	1	9	19
$2024 = 8 \cdot 1 \cdot 23 \cdot 11$	6	1	21	7
$2024 = 11 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 23$	9	1	6	19
$2024 = 11 \cdot 1 \cdot 23 \cdot 8$	9	1	21	4
$2024 = 23 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 11$	21	1	6	7
$2024 = 23 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 8$	21	1	9	4
$2024 = 4 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$	2	2	9	19
$2024 = 4 \cdot 2 \cdot 23 \cdot 11$	2	2	21	7
$2024 = 11 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 23$	9	2	2	19
$2024 = 23 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 11$	21	2	2	7
$2024 = 4 \cdot 1 \cdot 22 \cdot 23$	2	1	20	19
$2024 = 4 \cdot 1 \cdot 23 \cdot 22$	2	1	21	18
$2024 = 4 \cdot 1 \cdot 46 \cdot 11$	2	1	44	7
$2024 = 4 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 46$	2	1	9	42
$2024 = 22 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 23$	20	1	2	19
$2024 = 23 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 22$	21	1	2	18
$2024 = 46 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 11$	44	1	2	7
$2024 = 11 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 46$	9	1	2	42

Aufgabe 30. Es seien x und y positive ganze Zahlen, sodass die Gleichung

$$2^x \cdot 3^y = \left(24^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{60}}\right) \cdot \left(24^{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{60}}\right)^2 \cdot \left(24^{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{60}}\right)^3 \dots \left(24^{\frac{1}{60}}\right)^{59}$$

gilt. Bestimme $x + y$.

Ergebnis. 3540

Lösung. Die gegebene Gleichung ist äquivalent zu $2^x \cdot 3^y = 24^k$ mit einem Exponenten k , der folgendermaßen berechnet werden kann:

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{60} + \frac{2}{60} + \dots + \frac{59}{60}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \dots + \frac{59}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+59) \cdot 59}{2} \\ &= 15 \cdot 59 \end{aligned}$$

Es gilt also $2^x \cdot 3^y = (2^3 \cdot 3^1)^{15 \cdot 59}$, was $x = 3 \cdot 15 \cdot 59 = 45 \cdot 59$ und $y = 15 \cdot 59$ bedeutet. Folglich ergibt sich $x + y = 60 \cdot 59 = 3540$.

Aufgabe 31. Anna liebt Äpfel, insbesondere Folgen von roten und grünen Äpfeln der Länge 18, die so angeordnet sind, dass jedes Dutzend aufeinander folgender Äpfel mindestens sieben grüne Äpfel enthält. Wie viele solcher Folgen mit insgesamt höchstens acht grünen Äpfeln gibt es?

Hinweis: Ein *Dutzend* bedeutet eine Anzahl von 12 Stück.

Ergebnis. 21

Lösung. Vorerst betrachtet man das erste und das letzte Dutzend, das jeweils aus dem ersten und zweiten bzw. zweiten und dritten Sechserpack an Äpfeln besteht. Wenn das mittlere Sechserpack, d.h. die Äpfel Nr. 7 bis Nr. 12, nur grüne Äpfel enthält, fehlt sowohl im ersten als auch im letzten Dutzend nur ein grüner Apfel, was sich leicht beheben lässt, indem man einen grünen Apfel sowohl in das erste als auch in das letzte Sechserpack legt. Für eine Folge mit den geforderten Eigenschaften werden also mindestens 8 grüne Äpfel benötigt. Wenn einige der Äpfel im mittleren Sechserpack rot sind, bräuchte man insgesamt mehr grüne Äpfel, denn für jeden grünen Apfel, der aus dem mittleren Sechserpack entfernt wird, muss man zwei Äpfel hinzufügen: einen in das erste Sechserpack und den anderen in das letzte Sechserpack. Daher muss das mittlere Sechserpack aus 6 grünen Äpfeln bestehen, damit 8 die minimale Anzahl grüner Äpfel in der Folge ist.

Der erste und der letzte grüne Apfel können jedoch nicht beliebig in ihr Sechserpack gelegt werden. Um die Bedingung für jedes Dutzend aufeinander folgender Äpfel zu erfüllen, darf der Abstand zwischen den beiden grünen Äpfeln nicht größer als 12 sein, d.h. wenn der erste grüne Apfel an der Position 2 platziert wird, kann der letzte entweder an der Position 13 oder an der Position 14 platziert werden. Je nach der Position des ersten Apfels hat der letzte Apfel also 1 bis 6 mögliche Positionen. Wenn man diese addiert, erhält man $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ mögliche Folgen.

Aufgabe 32. Laurin besitzt Münzen der Werte 1 ct, 2 ct und 5 ct. Er hat 33 der 1 ct-Münzen, 106 der 2 ct-Münzen und 31 der 5 ct-Münzen. Er möchte seine Münzen in zwei Haufen teilen und einen davon seiner Schwester Ida geben. Dabei sollen beide Haufen die gleiche Anzahl an Münzen sowie den selben Gesamtwert haben. Auf wie viele Arten könnte er das erreichen?

Hinweis: Münzen von der gleichen Sorte werden als nicht unterscheidbar angesehen.

Ergebnis. 12

Lösung. Es seien a, b, c die Anzahlen der 1 ct-, 2 ct- bzw. 5 ct-Münzen im Haufen seiner Schwester. Dann gelten die Gleichungen

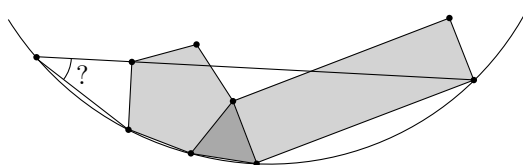
$$a + b + c = \frac{1}{2}(33 + 106 + 31) = 85$$

und

$$a + 2b + 5c = \frac{1}{2}(33 + 2 \cdot 106 + 5 \cdot 31) = 200.$$

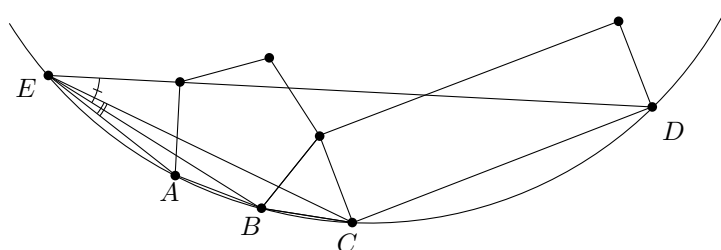
Wenn man die erste Gleichung von der zweiten subtrahiert, bekommt man $b + 4c = 115$. Diese Gleichung hat Lösungen der Form $b = 115 - 4c$ mit einem beliebigen c . Die Bedingung $0 < 115 - 4c < 106$ für b schränkt aber c ein, so dass $c \in \{3, 4, \dots, 28\}$ gelten muss. Aber nicht für alle Lösungen gibt es eine gültige Anzahl an 1 ct-Münzen. Deshalb muss auch noch die Bedingung $0 \leq 85 - (115 - 4c + c) = -30 + 3c \leq 33$ für c hinzugenommen werden. Nun sieht man, dass nur die Werte für c aus der Menge $\{10, 11, \dots, 21\}$ zu einer gültigen Lösung führen. Deshalb gibt es insgesamt 12 mögliche Arten, eine gewünschte Verteilung vorzunehmen.

Aufgabe 33. In der Abbildung sind ein gleichseitiges Dreieck, ein regelmäßiges Fünfeck und ein Rechteck zu sehen. Einige Eckpunkte dieser Figuren liegen auf einem Kreis, der hier nur teilweise zu sehen ist. Bestimme die Größe des Winkels, der mit einem Fragezeichen markiert ist, in Grad.



Ergebnis. 36°

Lösung. Benenne die Punkte wie in der folgenden Abbildung.



Wenn man den Punkt A mit C verbindet, entsteht das gleichschenklige Dreieck ABC mit einem Winkel der Größe $108^\circ + 60^\circ = 168^\circ$ in der Spitze B und folglich Basiswinkeln von 6° . Daher kann man den Winkel $\angle DCA$ berechnen zu $90^\circ + 60^\circ - 6^\circ = 144^\circ$. Weil das Viereck $ACDE$ ein Sehnenviereck ist, ergänzen sich gegenüber liegende Innenwinkel zu 180° . Der gesuchte Winkel ergänzt sich mit dem eben berechneten Winkel $\angle DCA$ zu 180° und ist deswegen 36° groß.

Aufgabe 34. Wie viele Möglichkeiten gibt es, neun Türme auf einem 4×4 Schachbrett so zu platzieren, dass jeder Turm von einem anderen Turm angegriffen wird?

Hinweis: Zwei Türme greifen sich gegenseitig an, wenn sie in der gleichen Reihe oder Spalte stehen.

Ergebnis. 11296

Lösung. Zunächst bestimmt man die Anzahl der Konfigurationen, in denen mindestens ein Turm von keinem anderen Turm angegriffen wird. Ein solcher Turm muss gleichzeitig allein in seiner Reihe und in seiner Spalte stehen, was bedeutet, dass es höchstens einen solchen Turm geben kann. Er kann auf $4 \cdot 4 = 16$ Arten auf ein beliebiges Feld gesetzt werden. Entfernt man die entsprechende Zeile und Spalte, so bleiben neun Felder übrig, auf die die verbleibenden acht Türme platziert werden müssen. Das leere Feld kann auf 9 Arten gewählt werden. Insgesamt gibt es also $16 \cdot 9 = 144$ Möglichkeiten, dies zu tun. Die Gesamtzahl der Möglichkeiten, aus sechzehn Feldern neun Felder auszuwählen, beträgt $\binom{16}{9} = 11440$. Somit ist das gewünschte Ergebnis $11440 - 144 = 11296$.

Aufgabe 35. Finde die größte positive ganze Zahl N , die keine Primzahl ist und bei der alle ihre Teiler mit Ausnahme von N selber kleiner als 100 sind.

Ergebnis. 9409

Lösung. Da N selbst keine Primzahl sein darf, ist N entweder 1 oder es gibt eine Primzahl $p < N$, die N teilt. Die Bedingung $p < 100$ führt zu

$$p \leq 97.$$

Man stellt fest, dass $N = 97^2 = 9409$ die gestellten Anforderungen erfüllt.

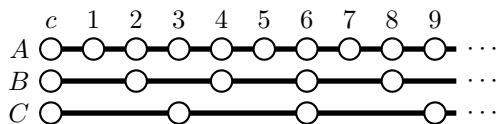
Angenommen, es gibt eine Zahl $N' > 9409$, die auch den gestellten Bedingungen genügt. Wenn $p \leq 97$ eine Primzahl ist, die N' teilt, dann ist der Quotient $\frac{N'}{p}$ eine ganze Zahl größer als 97. Das bedeutet nun $\frac{N'}{p} \in \{98, 99\}$, weil jeder Teiler von N' ja kleiner als 100 sein soll. Aber dann ist N' durch $k \in \{2, 3\}$ teilbar und aus den auferlegten Bedingungen folgt

$$N' = k \cdot \frac{N'}{k} \leq 3 \cdot 99 < 97^2,$$

was einen Widerspruch ergibt.

Deshalb ist $N = 9409$ die gesuchte Zahl.

Aufgabe 36. In *Line City* gibt es drei Buslinien. Sie starten in der Zentrale c und fahren die mit $1, 2, 3, \dots$ durchnummerierten Bushaltestellen in aufsteigender Reihenfolge an. Dabei hält Linie A an allen Haltestellen, Linie B an jeder zweiten und Linie C nur an jeder dritten Haltestelle. Theo beginnt seine Reise bei c , nimmt einen Bus und möchte zur Haltestelle Nr. 17 gelangen. An jeder Haltestelle, an der sein Bus hält, kann er entweder aussteigen und einen weiteren Bus nehmen, oder aber nicht aussteigen und bis zum nächsten Stopp weiterfahren. Wie viele Möglichkeiten hat Theo, die Buslinien zu wechseln, um die gewünschte Haltestelle zu erreichen, wenn Reisen, die sich nur um eine mögliche Wartezeit unterscheiden, als gleich angesehen werden?



Ergebnis. 845

Lösung. Eine Haltestelle, an der alle drei Buslinien stoppen, sei mit s_0 bezeichnet und die k -te Haltestelle von Linie A nach s_0 mit s_k . Nun wird berechnet, wie viele Möglichkeiten Theo hat, von einer Haltestelle s_0 die Haltestelle s_6 zu erreichen.

1. Theo kann die Haltestelle s_1 auf genau eine Art erreichen, nämlich mit der Buslinie A .
2. Es gibt zwei Möglichkeiten, zur Haltestelle s_2 zu gelangen: entweder mit Linie A von der Haltestelle s_1 aus oder mit Linie B von der Haltestelle s_0 aus.
3. Um zur Haltestelle s_3 zu gelangen, nimmt Theo entweder die Linie C von der Haltestelle s_0 aus oder die Linie A von Haltestelle s_2 aus, welche wiederum auf 2 Arten erreicht werden kann. Also gibt es hier insgesamt 3 mögliche Wege.
4. Zur Haltestelle s_4 gelangt man entweder mit Linie A von Haltestelle s_3 aus oder mit Linie B von Haltestelle s_2 aus. Folglich gibt es hier $3 + 2 = 5$ Wege.
5. Es gibt nur einen Weg zur Haltestelle s_5 , nämlich mit Linie A von s_4 aus. Also sind es hier 5 Möglichkeiten.
6. Schließlich die Haltestelle s_6 zu erreichen, geht entweder mit Linie A von s_5 aus oder mit Linie B von s_4 aus oder mit Linie C von s_3 aus. Deshalb gibt es hier $3 + 5 + 5 = 13$ Wege.

Haltestellen, an denen alle drei Buslinien stoppen, sind die Zentrale c , die Haltestelle Nr. 6 und die Haltestelle Nr. 12. Da jede dieser drei aufgezählten Haltestellen die Haltestelle s_0 sein kann, gibt es 13 mögliche Wege für Theo, um vom c zur Haltestelle Nr. 6 zu kommen, und ebenso viele um von Haltestelle Nr. 6 zur Haltestelle Nr. 12 zu gelangen. Es ist ersichtlich, dass das Erreichen der 17-ten Haltestelle von Haltestelle Nr. 12 aus dem Erreichen der Haltestelle s_5 von s_0 aus entspricht. Deshalb sind es hier 5 Wege. Insgesamt gibt es $5 \cdot 13 \cdot 13 = 845$ mögliche Wege für Theo, die Haltestelle Nr. 17 zu erreichen.

Alternative Lösung mittels Rekursion. Die Haltestellen werden jetzt wieder mit ihren Nummern benutzt, wobei $c = 0$ sein soll. Jede Haltestelle s ist erreichbar mit Linie A . Also kann jede Reise zur Haltestelle $s - 1$ über die Linie A verlängert werden zu einer Reise zur Haltestelle s . Falls die Busse von Linie B an der Haltestelle s stoppen, dann können alle Reisen zur Haltestelle $s - 2$ über die Linie B nach s fortgesetzt werden. Analoges ergibt sich, wenn an der

Haltestelle s die Busse der Linie C stoppen. Bezeichnet man nun mit $J(s)$ die Anzahl der Möglichkeiten, wie Theo die Haltestelle s erreichen kann, so erhält man für $s \geq 1$ die folgende Rekursionsvorschrift:

$$\begin{aligned}
 J(s) = & J(s-1) \\
 & + J(s-2), \quad \text{falls } s \text{ durch } 2 \text{ teilbar ist,} \\
 & + J(s-3), \quad \text{falls } s \text{ durch } 3 \text{ teilbar ist.}
 \end{aligned}$$

Da die zentrale Haltestelle c auf nur eine Art und Weise „erreicht“ werden kann, ist $J(0) = 1$ der Startwert für die Rekursion. Der Wert von $J(17)$ kann über die Rekursionsvorschrift berechnet werden. Die Pfeile unter der Tabelle zeigen an, welche Werte addiert werden, um einen Eintrag in der Tabelle zu erhalten:

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$J(s)$	1	1	2	3	5	5	13	13	26	39	65	65	169	169	338	507	845	845

Aufgabe 37. Mit $\lfloor x \rfloor$ wird die größte ganze Zahl bezeichnet, die nicht größer ist als die reelle Zahl x . Sei a_1, a_2, \dots eine Folge von reellen Zahlen mit $a_1 = \sqrt{3}$ und der Rekursionsvorschrift

$$a_{n+1} = \lfloor a_n \rfloor + \frac{1}{a_n - \lfloor a_n \rfloor}$$

für jedes $n \geq 1$. Was ist der Wert von a_{2024} ?

Ergebnis. $3034 + \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 3035 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

Lösung. Beachte, dass a_1 den Dezimalteil $a_1 - \lfloor a_1 \rfloor = \sqrt{3} - 1$ hat. Es kann also a_1 als $a_1 = 1 + \sqrt{3} - 1$ geschrieben werden. Wir berechnen die ersten Terme

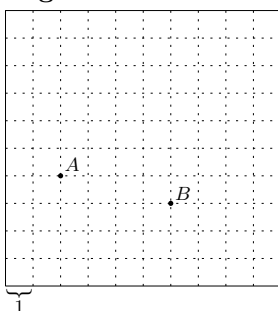
$$\begin{aligned}
 a_2 &= 1 + \frac{1}{\sqrt{3}-1} = 1 + \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 2 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \\
 a_3 &= 2 + \frac{2}{\sqrt{3}-1} = 2 + \frac{2\sqrt{3}+2}{2} = 2 + \sqrt{3} + 1 = 3 + 1 + \sqrt{3} - 1, \\
 a_4 &= 4 + \frac{1}{\sqrt{3}-1} = 4 + \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 3 + 2 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}.
 \end{aligned}$$

Die Terme a_1 und a_3 haben den gleichen Dezimalteil $\sqrt{3} - 1$ und die Differenz $a_3 - a_1 = 3$. Dasselbe gilt für die Terme a_2 und a_4 , die denselben Dezimalteil $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ und die Differenz $a_4 - a_2 = 3$ haben. Dies führt uns zu der Hypothese $a_{2k+1} = 3k + 1 + \sqrt{3} - 1$ und $a_{2k+2} = 3k + 2 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ für $k = 0, 1, \dots$. Die Gültigkeit für alle k kann durch Induktion bewiesen werden; sie ist klar für $k = 1$ und $k = 2$. Für den Rest genügt es, die Formeln in die Definition $a_{n+1} = \lfloor a_n \rfloor + \frac{1}{a_n - \lfloor a_n \rfloor}$ einzusetzen. Es gilt

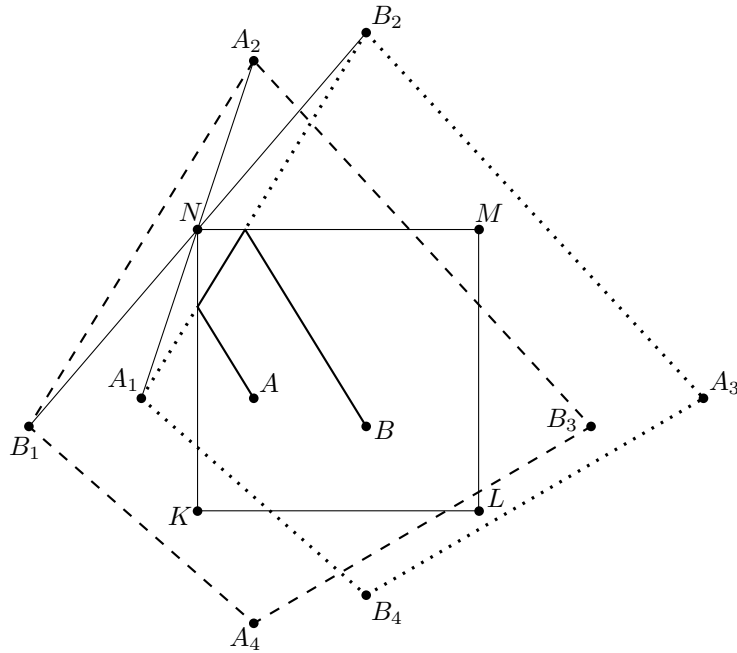
$$\begin{aligned}
 a_{2k+2} &= \lfloor a_{2k+1} \rfloor + \frac{1}{a_{2k+1} - \lfloor a_{2k+1} \rfloor} = 3k + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}-1} = 3k + 1 + \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 3k + 2 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \\
 a_{2 \cdot (k+1) + 1} &= \lfloor a_{2k+2} \rfloor + \frac{1}{a_{2k+2} - \lfloor a_{2k+2} \rfloor} = 3k + 2 + \frac{2}{\sqrt{3}-1} = 3k + 2 + \frac{2 \cdot (\sqrt{3}+1)}{2} = 3 \cdot (k+1) + 1 + \sqrt{3} - 1.
 \end{aligned}$$

Also ist $a_{2024} = 3034 + \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 3035 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Aufgabe 38.



Gegeben ist ein quadratischer 10×10 Billardtisch mit zwei Kugeln, wie auf dem Bild zu sehen. Jede Kugel ist dimensionslos als ein Punkt anzusehen, bewegt sich immer geradlinig und prallt an der Bande im gleichen Winkel (Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel) ab. Für alle Wege, auf denen die Kugel A genau an zwei Banden prallt, bevor sie auf die Kugel B trifft, ist die Summe der Quadrate der Längen dieser Wege zu berechnen.



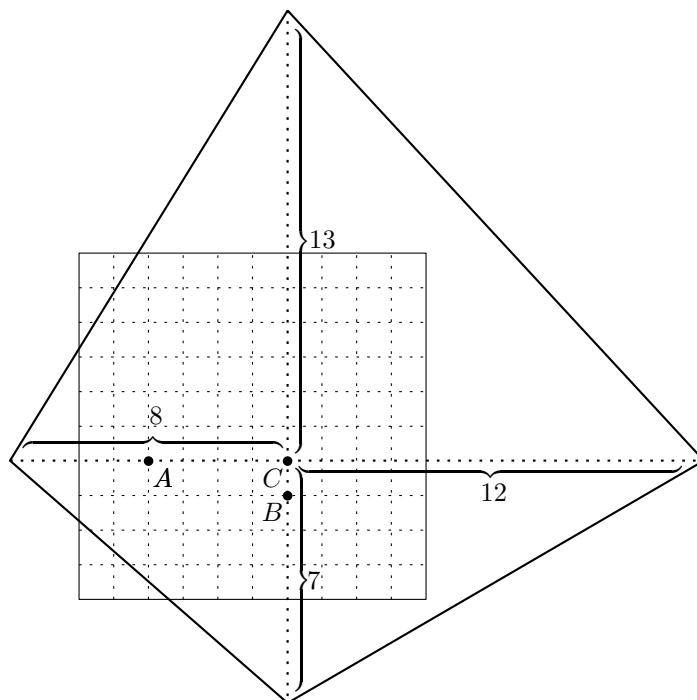
Wir stellen zunächst fest, dass $A = [2, 4]$ und $B = [6, 3]$ gilt, bezogen auf die linke untere Ecke des Quadrats. Spiegle A und B an den Seiten des Quadrats und beschrifte alles entsprechend der Abbildung.

Betrachte die Bahn von A nach B , die an KN und dann an MN abprallt, und spiegle den Teil, der an A (bzw. B) angrenzt, an KN (bzw. MN). Aufgrund der Spiegelungswinkelregel erhalten wir genau das Segment A_1B_2 . Im Folgenden werden wir sagen, dass die Bahn zu A_1B_2 *begradigt* wurde. Man beachte, dass dies die einzige zulässige Bahn der Kugel ist, die genau an diesen beiden Seiten des Quadrats abprallt. In der Tat führt die Begradigung einer möglichen Bahn $A \rightarrow MN \rightarrow KN \rightarrow B$ zu dem Segment A_2B_1 , welches das Quadrat $KLMN$ nicht schneidet. Dies ist auf die Eigenschaften der Reflexion zurückzuführen, die besagen, dass N der Mittelpunkt sowohl von A_1A_2 als auch von B_1B_2 ist. Daher ist eine solche Bahn nicht möglich.

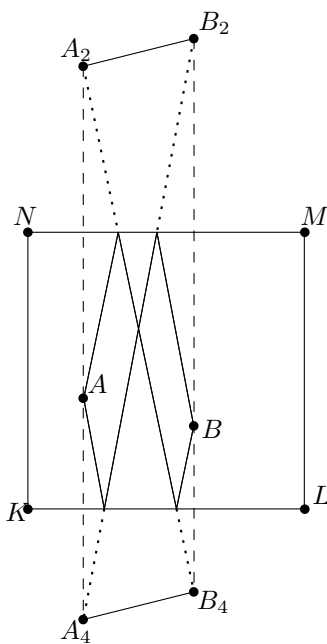
In ähnlicher Weise transformieren sich alle gewünschten Kugelbahnen, die von zwei benachbarten Seiten des Quadrats $KLMN$ abprallen, in eine Seite des Vierecks $A_1B_2A_3B_4$ oder dessen verschobener Kopie $B_1A_2B_3A_4$. Von den entsprechenden kongruenten Seiten wird genau eine verwendet, weil die andere Seite eine ungültige Konfiguration liefert. Daraus folgt, dass diese Bahnen zur Summe der Längen im Quadrat durch die Summe der Quadrate der Seitenlängen von $A_1B_2A_3B_4$ beitragen. Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras und der Tatsache, dass seine Diagonalen senkrecht aufeinander stehen und sich im Punkt $C = [6, 4]$ schneiden (siehe Abbildung unten), erhalten wir

$$2 \cdot (8^2 + 13^2 + 12^2 + 7^2) = 852$$

als Beitrag für die zu bestimmende Summe.



Nun sind noch die Kugelbahnen zu betrachten, auf denen die Kugel von zwei gegenüberliegenden Seiten des Quadrats $KLMN$ abprallt, wie die unten gezeigten.



In diesem Fall sind beide Bahnen möglich, was zu einem Beitrag führt, welcher der Summe der Quadrate der Diagonalen der Parallelogramme $A_2B_2B_4A_4$ und $A_1A_3B_3B_1$ entspricht. Aus der Tatsache, dass die Summe der Quadrate der Diagonalenlängen eines Parallelogramms gleich der Summe der Quadrate seiner Seitenlängen ist, ergibt sich

$$2 \cdot (20^2 + 1^2 + 4^2) = 834$$

für jedes der beiden Parallelogramme. Die Gesamtsumme ist also

$$852 + 2 \cdot 834 = 2520.$$

Aufgabe 39. Mit $x \parallel y$ sei die Verkettung von zwei positiven ganzen Zahlen x und y notiert: Zunächst werden die Ziffern von x hingeschrieben, so wie sie der Reihenfolge nach in x erscheinen, und dann macht man dasselbe mit y . Beispielsweise ist $3 \parallel 4 = 34$ oder $24 \parallel 5 = 245$ oder $20 \parallel 24 = 2024$.

Eine positive ganze Zahl n heißt *dreilbar*, wenn es drei paarweise verschiedene positive ganze Zahlen a , b und c ohne führende Null gibt, so dass $n = a \parallel b \parallel c$ ist und zusätzlich a teilt b sowie b teilt c gilt. Wie lautet die größte fünfstellige dreilbare Zahl?

Ergebnis. 94590

Lösung. Aufgrund der Teilbarkeitsbedingung der paarweise verschiedenen Zahlen a , b und c muss $2 \cdot a \leq b$ und $2 \cdot b \leq c$ gelten. Mit $s(k)$ sei die Anzahl der Ziffern von k notiert. Die gegebenen Teilbarkeitsbedingungen implizieren $s(a) \leq s(b) \leq s(c)$. Wegen $s(a) + s(b) + s(c) = 5$ gibt es hier nur diese zwei Fälle:

1. Für die Ziffernanzahlen gilt $s(a) = 1$, $s(b) = 1$ und $s(c) = 3$:
Dann ist a höchstens $4 < \frac{9}{2}$. Dies führt zum Ergebnis $a = 4$, $b = 8$ und $c = 992$.
2. Für die Ziffernanzahlen gilt $s(a) = 1$, $s(b) = 2$ und $s(c) = 2$:
Dann ist b höchstens $49 < \frac{99}{2}$. Um die Zahl $a \parallel b \parallel c$ zu maximieren, nimmt man als erste Ziffer eine 9 an. Das maximal mögliche b dazu ist $b = 45$, woraus $c = 90$ folgt. Die Verwendung eines kleineren Wertes für a führt zwangsweise zu einem kleineren Ergebnis.

Folglich ist 94590 die größtmögliche fünfstellige dreilbare Zahl.

Aufgabe 40. In einer Abfolge S_x von Ziffern und ggf. Zeichen wird der ganzzahlige Index $x > 0$ benutzt, um anzudeuten, dass x als Basis zur Interpretation der Zeichenfolge dient und dass x somit größer ist als der Wert jedes vorkommenden Zeichens. Beispielsweise ist $2427_7 = 2 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7 + 2 = 128_{10} = 1000000_2$. Finde die Summe aller ganzen Zahlen $x > 5$, für die die Aussage

„ 2024_x ist durch 15_x teilbar“

wahr ist.

Ergebnis. 471

Lösung. Gesucht werden also solche x , für die der Bruch $\frac{2x^3 + 2x + 4}{x + 5}$ eine ganze Zahl ergibt. Wegen

$$\frac{2x^3 + 2x + 4}{x + 5} = 2x^2 - 10x + 52 - \frac{256}{x + 5}$$

genügt es, dass $x + 5$ die Zahl $256 = 2^8$ teilt. Da $x > 5$ ist, werden Teiler gesucht, die größer als 10 sind. Alle diese Teiler sind 16, 32, 64, 128 und 256. Die gesuchte Lösung ist daher die Summe

$$\sum_{i=4}^8 (2^i - 5) = 2^9 - 2^4 - 25 = 512 - 16 - 25 = 471.$$

Aufgabe 41. Wir haben zwei Schachteln: Die erste enthält fünf perfekte und neun fehlerhafte Glühbirnen, die zweite enthält neun perfekte und fünf fehlerhafte Glühbirnen. Die perfekten Glühbirnen funktionieren immer, während die fehlerhaften nur mit einer Wahrscheinlichkeit von p mit $0 < p < 1$ funktionieren. Diese Wahrscheinlichkeit p ist für alle fehlerhaften Glühbirnen gleich groß. Finde den Wert von p , für den die folgenden Ereignisse gleich wahrscheinlich sind:

1. Eine zufällig ausgewählte Glühbirne aus der ersten Schachtel funktioniert.
2. Zwei zufällig ausgewählte Glühbirnen aus der zweiten Schachtel funktionieren beide.

Ergebnis. $\frac{7}{20}$

Lösung. Kombinatorische Überlegungen ergeben, dass die Wahrscheinlichkeit des ersten Ereignisses

$$P_1 = \frac{1}{14}(5 + 9p)$$

ist, während sich für das zweite die Wahrscheinlichkeit

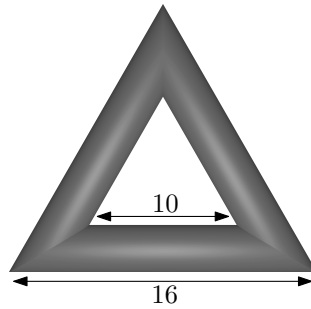
$$P_2 = \frac{1}{\binom{14}{2}} \left(\binom{9}{2} + 9 \cdot 5p + \binom{5}{2} p^2 \right)$$

ergibt. Unser Ziel ist es nun, $P_1 = P_2$ zu lösen. Dabei handelt es sich um eine quadratische Gleichung, die mit dem üblichen Ansatz gelöst werden kann. Wir können jedoch feststellen, dass $p = 1$ sicher eine Lösung ist, so dass

wir die andere mithilfe des Satzes von Viète finden können: Wir erinnern uns, dass eine quadratische Gleichung $a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) = 0$ den konstanten Term $c = a \cdot r_1 \cdot r_2$ hat, wobei r_1, r_2 die Lösungen sind und a der Koeffizient des quadratischen Terms x^2 ist. Daher kann die Lösung wie folgt gefunden werden

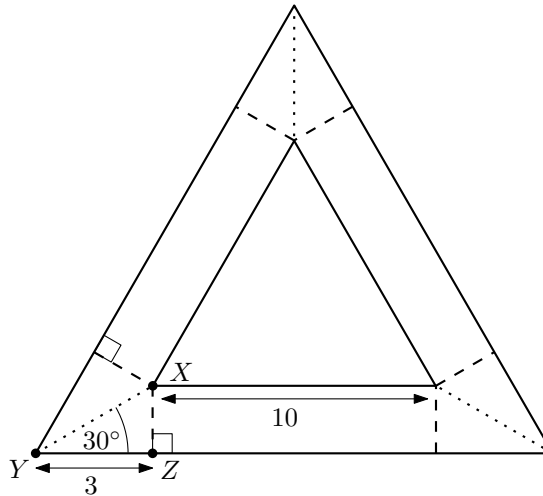
$$r_2 = \frac{c}{a \cdot r_1} = \frac{\frac{\binom{9}{2}}{\binom{14}{2}} - \frac{5}{14}}{\frac{\binom{5}{2}}{\binom{14}{2}} \cdot 1} = \frac{7}{20}.$$

Aufgabe 42. Bestimme das Volumen des unten abgebildeten Körpers, der aus drei identisch geschnittenen zylindrischen Röhren besteht. Die Achsen der Zylinder treffen sich an den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks. Die Seitenlängen der inneren und äußeren Umrisse, die ebenfalls gleichseitige Dreiecke sind, sind gegeben.



Ergebnis. $\frac{117}{4}\pi$

Lösung. Betrachte die Ebene mit dem innersten und äußersten Umriss und zeichne die Strecke XZ senkrecht zu YZ wie in der Abbildung.



Die Symmetrie der beteiligten gleichseitigen Dreiecke gibt $\overline{YZ} = 3$ und $\angle ZYX = 30^\circ$ und daher $\overline{XZ} = \sqrt{3}$. Schneidet man den Körper entlang der in der obigen Abbildung durch gestrichelte und gepunktete Linien angedeuteten Ebenen, so zerfällt der Körper in drei Zylinder mit dem Radius $\frac{\overline{XZ}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und der Höhe 10 sowie in sechs Teile, die sich zu drei Zylindern mit dem gleichen Radius und der Höhe 3 zusammensetzen lassen. Das gesuchte Volumen ist damit

$$V = \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 (3 \cdot 10 + 3 \cdot 3) = \frac{117}{4}\pi.$$

Aufgabe 43. Zehn paarweise verschiedene positive ganze Zahlen werden so in einer Reihe geschrieben, dass

- die Summe von jeweils zwei aufeinander folgenden Zahlen durch 3 teilbar ist und
- die Summe von jeweils drei aufeinander folgenden Zahlen durch 2 teilbar ist.

Was ist die kleinstmögliche Summe der zehn Zahlen?

Ergebnis. 78

Lösung. Die optimale Lösung ist 2, 1, 5, 4, 11, 7, 8, 13, 17, 10 mit der Summe 78.

Wenn eine durch 3 teilbare Zahl in der Liste ist, dann müssen auch ihre Nachbarn durch 3 teilbar sein, so dass schließlich alle Zahlen durch drei teilbar sein müssen. Daher ist die minimal mögliche Summe $3 \cdot (1 + 2 + \dots + 10) = 3 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 165 > 78$ und diese kann nicht optimal sein.

Da die Summe von drei aufeinander folgenden Zahlen durch 2 teilbar sein muss, gibt es für jede Dreiergruppe zwei Möglichkeiten: Entweder gibt es drei gerade Zahlen oder es gibt zwei ungerade und eine gerade Zahl. Wir nehmen an, dass es eine Dreiergruppe x_i, x_{i+1}, x_{i+2} mit drei geraden Zahlen gibt. Dann kann die Dreiergruppe x_{i-1}, x_i, x_{i+1} keine zwei ungeraden Zahlen enthalten, also ist auch x_{i-1} gerade. Daher sind alle zehn Zahlen gerade. Die minimal mögliche Summe ist dann $2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 110 > 78$, sie kann daher nicht optimal sein.

In jeder Dreiergruppe gibt es daher zwei ungerade (U) Zahlen und eine gerade (G). Es gibt drei mögliche Varianten:

- UGUUGUUGU: Die Summe der sieben kleinsten ungeraden und drei kleinsten geraden Zahlen, die nicht durch 3 teilbar sind, ergibt die kleinste mögliche Summe von $1 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 2 + 4 + 8 = 87 > 78$ und kann daher nicht optimal sein.
- UUGUUGUUGU: Diese Anordnung ist symmetrisch zur vorherigen und damit nicht optimal.
- GUUGUUGUUG: Die Summe der sechs kleinsten ungeraden und vier kleinsten geraden Zahlen, die nicht durch 3 teilbar sind, ergibt die kleinstmögliche Summe $1 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 2 + 4 + 8 + 10 = 78$, was das gewünschte Ergebnis ist.

Aufgabe 44. Sophia experimentiert mit Brüchen. Sie möchte positive ganze Zahlen a, b bestimmen mit

$$\frac{2020}{2024} < \frac{a^2}{b} < \frac{999}{1000},$$

so dass $a + b$ minimal ist. Mache dasselbe wie Sophia und gib diese minimale Summe $a + b$ als Ergebnis an.

Ergebnis. 553

Lösung. Die gegebene Ungleichung ist äquivalent zu

$$\frac{1000}{999} < \frac{b}{a^2} < \frac{2024}{2020}.$$

Sophia muss also a als die kleinste positive ganze Zahl wählen, für die es eine positive ganze Zahl b gibt mit

$$\frac{1000}{999} \cdot a^2 < b < \frac{2024}{2020} \cdot a^2 \iff a^2 + \frac{1}{999} \cdot a^2 < b < a^2 + \frac{4}{2020} \cdot a^2.$$

Für $a < 32$ ist $a^2 < a^2 + \frac{a^2}{999} < a^2 + 1$. Wenn es ein $a < 32$ gibt mit $\frac{4a^2}{2020} > 1$, kann sie das minimale a nehmen, das diese Ungleichung erfüllt. Nun ist

$$\frac{4 \cdot 22^2}{2020} = \frac{44^2}{2020} = \frac{1936}{2020} < 1 \quad \text{und} \quad \frac{4 \cdot 23^2}{2020} = \frac{46^2}{2020} = \frac{2116}{2020} > 1.$$

Daher erfüllen $a = 23$ und $b = a^2 + 1 = 530$ die Bedingungen, so dass der gesuchte Wert $a + b = 23 + 530 = 553$ ist.

Aufgabe 45. Der Boden eines Zeltes hat die Form eines Dreiecks mit Seitenlängen von 1,3 und 2 und 2,1 Metern. Der Hersteller will damit werben, dass eine Person der Größe h dort *beliebig* in dem Sinne liegen kann, dass jeder Punkt des Bodens zu einer möglichen Schlafposition gehört. Durch jeden Punkt des Dreiecks verläuft also eine Strecke mit mindestens der Länge h , wobei diese Strecke vollständig im Dreieck enthalten sein muss. Wie groß kann h in Metern maximal sein?

Ergebnis. $\frac{126}{65}$

Lösung. Wir behaupten, dass die längste Strecke, die durch einen beliebigen Punkt in einem spitzwinkligen Dreieck gelegt werden kann (was unseres eindeutig ist), die längste Höhe ist. Alle Strecken von einer Ecke zu Punkten auf der gegenüberliegenden Seite überdecken das gesamte Dreieck und die kürzeste Strecke ist dabei die entsprechende Höhe, denn ein spitzwinkliges Dreieck enthält alle seine Höhen. Es bleibt zu zeigen, dass es keine Strecke mit der geforderten Eigenschaft gibt, die länger ist. Schauen wir den Fußpunkt der längsten Höhe an. Wenn die entsprechende Seite kürzer als die Höhe ist, kann es keine längere solche Strecke geben, da alle Strecken, die den Fußpunkt enthalten, höchstens so lang sind wie das Maximum aus der Länge der Höhe und der Länge der entsprechenden Seite. Die einschlägige Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks zeigt, dass die längste Höhe zur kürzesten Seite gehört, die in unserem Fall 1,3 ist. Wenn also die entsprechende Höhe größer als 1,3 ist, sind wir fertig.

Es gibt viele Möglichkeiten, die Länge der entsprechenden Höhe zu berechnen. Eine davon wäre, die Heron-Formel zu verwenden, um den Flächeninhalt zu berechnen und dann durch die Hälfte der Seite zu dividieren. Wir gehen

elementarer vor. Wir skalieren alle Werte mit 10, d.h. wir rechnen in Dezimetern statt in Metern. Bezeichne mit x und $13 - x$ die Längen der Abschnitte, in welche die betrachtete Höhe die Seite der Länge 13 teilt. Aus dem Satz des Pythagoras ergibt sich dann

$$\begin{aligned} 20^2 - x^2 &= 21^2 - (13 - x)^2 \\ \iff 26x &= 128 \\ \iff x &= \frac{64}{13}. \end{aligned}$$

Für die Höhenlänge erhält man deshalb

$$h = \sqrt{20^2 - \left(\frac{64}{13}\right)^2} = \frac{4}{13} \sqrt{25 \cdot 169 - 256} = \frac{4}{13} \sqrt{9 \cdot 9 \cdot 49} = \frac{252}{13}.$$

Wegen $\frac{252}{13} > 13$ ist die Höhe länger als die Seite, wie gewünscht. Das Ergebnis in Metern ist also $\frac{252}{130} = \frac{126}{65}$.

Aufgabe 46. Finde die größte positive ganze Zahl q , so dass für jede positive ganze Zahl $n \geq 55$ die Zahl q das Produkt

$$n(n+4)(n-23)(n-54)(n+63)$$

teilt.

Ergebnis. 40

Lösung. Bezeichne das Produkt mit A . Nimmt man A modulo 5, so sieht man, dass die Faktoren kongruent $n, n+4, n+2, n+1$ bzw. $n+3$ modulo 5 sind. Da ihre Restklassen verschieden sind, ist ein Faktor von ihnen durch 5 teilbar, also gilt $5 \mid A$. Wenn n gerade ist, dann gibt es drei gerade Faktoren in A , also gilt $8 \mid A$. Ist n ungerade, dann gibt es die zwei geraden Faktoren $n-23$ und $n+63$, deren Differenz 86 ist. Außerdem ist $86 \equiv 2 \pmod{4}$, weshalb genau ein Faktor ein Vielfaches von 4 ist und somit ebenfalls $8 \mid A$ erfüllt ist. Zusammen ergibt dies $40 \mid A$.

Bleibt noch zu zeigen, dass q nicht größer als 40 sein kann. Für $n = 59$ ist $\frac{A}{40} = 59 \cdot 63 \cdot 9 \cdot 61$ kein Vielfaches von 2 oder 5. Für $n = 55$ ist $A = 55 \cdot 59 \cdot 32 \cdot 1 \cdot 118$ nicht durch 3 teilbar. Schließlich besetzen für jede Primzahl $p > 5$ die Faktoren von A höchstens $5 < p$ Restklassen modulo p , so dass es immer möglich ist, n so zu wählen, dass $p \nmid A$ gilt.

Folglich ist $q = 40$.

Aufgabe 47. Agnes, Bettina, Jan, Sandi und Edith nehmen an zwei Kursen teil. Agnes und Bettina besuchen nur den ersten Kurs, Jan und Edith nur den anderen, während Sandi an beiden Kursen teilnimmt. Hans-Gert weiß, dass jeder Kurs von drei Studierenden besucht wird, aber nicht von welchen drei. Er bittet daher alle, mit dem Finger zufällig auf einen Mitstudierenden aus einem ihrer Kurse zu zeigen, das heißt, Sandi wird mit der Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{4}$ jeden der anderen vier Teilnehmer auswählen usw. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Hans-Gert herausfinden kann, dass Sandi diejenige ist, die beide Kurse besucht?

Ergebnis. $\frac{3}{4}$

Lösung. Wenn ein Studierender auf einen anderen Studierenden zeigt, sagen wir, dass es eine *Verbindung* zwischen ihnen gibt.

Hans-Gert kann Sandi genau dann identifizieren, wenn Sandi zu jedem der beiden Kurse mindestens eine Verbindung hat. Wenn es keine Verbindung von Sandi mit einem der Kurse gibt, könnte es sein, dass sie nur den anderen Kurs besucht, da keine Informationen über die Verbindung mit dem ersten Kurs vorliegen. Sie ist dann nicht von ihren Mitstudierenden in diesem Kurs zu unterscheiden.

Wenn Sandi zu mehr als zwei Personen Verbindungen hat, ist offensichtlich, dass sie beide Kurse besucht, da keine andere Person mehr als zwei Verbindungen haben kann. Andernfalls hat Sandi genau eine Verbindung in jedem der beiden Kurse.

Nehmen wir o.B.d.A. an, dass es die Verbindungen Agnes – Sandi und Jan – Sandi gibt. Da Bettina keine Verbindung mit Sandi hat, zeigt sie notwendigerweise auf Agnes. Analog dazu zeigt Edith auf Jan. Daher ergibt sich ein Pfad Bettina – Agnes – Sandi – Jan – Edith von Verbindungen, und da mögliche Verbindungspfade der Länge 4 mit allen fünf Studierenden Sandi in der Mitte haben müssen, sind wir fertig.

Nun können wir die resultierende Wahrscheinlichkeit berechnen.

- Nehmen wir an, dass Agnes und Bettina aufeinander zeigen, während Jan und Edith nicht aufeinander zeigen. Die Wahrscheinlichkeit für das erste Ereignis ist $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Im zweiten Fall muss mindestens einer von Jan und Edith auf Sandi zeigen, daher die Wahrscheinlichkeit $(1 - \frac{1}{4})$, und schließlich muss Sandi auf einen von Agnes und Bettina zeigen ($\frac{2}{4}$), damit Sandi Verbindungen in beide Kurse hat. Eine analoge Situation liegt vor, wenn Jan und Edith aufeinander zeigen und Agnes und Bettina nicht.
- Andernfalls zeigt mindestens eine von Agnes und Bettina auf Sandi ($1 - \frac{1}{4}$); dasselbe gilt für Jan und Edith ($1 - \frac{1}{4}$) und es ist unerheblich, wohin Sandi zeigt.

Zusammengefasst ergibt sich

$$\frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{2}{4} + \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{32} + \frac{3}{32} + \frac{9}{16} = \frac{3}{4}.$$

Aufgabe 48. Die Funktion $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ erfüllt die folgenden Bedingungen:

1. $f(x) = x^2$ für alle $0 \leq x < 1$ und
2. $f(x+1) = f(x) + x + 1$ für alle nicht-negativen x .

Finde alle Werte x , für die $f(x) = 482$ ist.

Ergebnis. $15 + 11\sqrt{2} = 15 + \sqrt{242}$

Lösung. Bezeichne mit $\{x\}$ den gebrochenen Teil von x . Dann gilt für $\lfloor x \rfloor \geq 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\lfloor x \rfloor + \{x\}) \\ &= \lfloor x \rfloor + \{x\} + f(\lfloor x \rfloor - 1 + \{x\}) = \dots \\ &= \sum_{i=1}^{\lfloor x \rfloor} i + \lfloor x \rfloor \cdot \{x\} + f(\{x\}) \\ &= \frac{\lfloor x \rfloor \cdot (\lfloor x \rfloor + 1)}{2} + \lfloor x \rfloor \cdot \{x\} + \{x\}^2. \end{aligned}$$

Diese Formel gilt übrigens auch für $\lfloor x \rfloor = 0$. Nun wird gezeigt, dass f streng monoton wachsend ist. Sei n eine nicht-negative ganze Zahl. Für $x, y \in [n, n+1)$ mit $x < y$ ist $f(x) < f(y)$ offensichtlich aus der Definition. Andererseits gilt für alle $x \in [n, n+1)$ die Ungleichung $f(x) < f(n+1)$ wegen

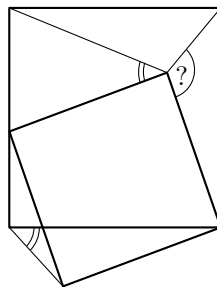
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\lfloor x \rfloor \cdot (\lfloor x \rfloor + 1)}{2} + \lfloor x \rfloor \cdot \{x\} + \{x\}^2 \\ &< \frac{\lfloor x \rfloor \cdot (\lfloor x \rfloor + 1)}{2} + \lfloor x \rfloor + 1 \\ &= \frac{(\lfloor x \rfloor + 2) \cdot (\lfloor x \rfloor + 1)}{2} \\ &= \frac{(n+2) \cdot (n+1)}{2} \\ &= f(n+1). \end{aligned}$$

Es gibt also höchstens eine Lösung. Aufgrund der gezeigten Ungleichung muss man nun die größte ganze Zahl n mit $\frac{n^2+n}{2} \leq 482$ bestimmen. Diese quadratische Ungleichung führt zu $n = 30$. Also ist $\lfloor x \rfloor = 30$. Daraus folgt

$$482 = f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor \cdot (\lfloor x \rfloor + 1)}{2} + \lfloor x \rfloor \cdot \{x\} + \{x\}^2 = 15 \cdot 31 + 30 \cdot \{x\} + \{x\}^2.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung $z^2 + 30z - 17 = 0$ mit den Lösungen $z_{1/2} = -15 \pm \sqrt{242}$, wovon nur für $z_1 = -15 + \sqrt{242}$ die Ungleichung $0 \leq z_1 < 1$ erfüllt ist, sodass z_1 ein gebrochener Teil von x sein kann. Die einzige Lösung ist also $x = 30 - 15 + \sqrt{242} = 15 + 11\sqrt{2}$.

Aufgabe 49. Im Bild sind zwei Quadrate und ein markiertes Paar gleicher Winkel zu sehen. Bestimme die Größe des fehlenden Winkels in Grad.



Ergebnis. 112,5

Analog hierzu ist eine Anordnung mit horizontalen einfarbigen Dominosteinen und Quadraten durch deren Anordnung in der ersten Zeile festgelegt.

Ein $n \times 1$ -Rechteck kann bekanntlich mit 2×1 -Dominosteinen und Quadraten auf $f(n)$ mögliche Arten gefüllt werden, wobei $f(n)$ die Fibonacci-Folge ist mit $f(0) = 1$ und $f(1) = 1$.

Also gibt es $f(10) + f(11) - 1$ mögliche Anordnungen. Eine Eins muss abgezogen werden, da die schachbrettartige Färbung in beiden Anordnungen vorkommt. Die Färbung einer Anordnung wird durch die Farbe der oberen linken Ecke eindeutig bestimmt.

Daher ist die Zahl aller möglichen Anordnungen mit der geforderten Eigenschaft $2 \cdot (144 + 89 - 1) = 464$.

Aufgabe 52. Helena lernte etwas über gleitende Durchschnitte. Sie nahm ihre Lieblingsfolge, die Fibonacci-Folge $\{F_k\}_{k=0}^{\infty}$, die durch die Anfangswerte $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$ sowie die Rekursionsvorschrift $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ für $k \geq 2$ definiert ist, und erstellte eine Folge $\{m_k\}_{k=6}^{2024}$ von gleitenden Durchschnitten nach der Formel

$$m_k = \frac{F_k + F_{k-1} + \dots + F_{k-6}}{7}.$$

Wie viele Terme der Folge $\{m_k\}_{k=6}^{2024}$ sind ganze Zahlen?

Ergebnis. 252

Lösung. Bekanntlich gilt $\sum_{i=0}^k F_i = F_{k+2} - 1$. Falls dieser Zusammenhang nicht geläufig ist, kann er leicht durch Induktion bewiesen werden: Der Induktionsanfang ergibt sich aus $\sum_{i=0}^0 F_i = F_0 = 0 = 1 - 1 = F_2 - 1$ und $\sum_{i=0}^{k+1} F_i = F_{k+1} + \sum_{i=0}^k F_i = F_{k+1} + F_{k+2} - 1 = F_{k+3} - 1$. Somit gilt

$$F_k + F_{k-1} + \dots + F_{k-6} = \sum_{i=0}^k F_i - \sum_{i=0}^{k-7} F_i = F_{k+2} - F_{k-5} = 7 \cdot m_k.$$

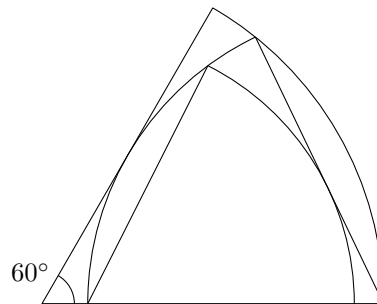
Sei d_l der Rest von F_l bei Division durch 7. Die Folge der Reste $\{d_l\}_{l=0}^{2024}$ ergibt sich zu

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 1, 6, 0, 6, 6, 5, 4, 2, 6, 1, 0, 1, 1, \dots, 0$$

und man erkennt wegen $d_l \equiv d_{l-1} + d_{l-2} \pmod{7}$ leicht, dass die Reste eine Periode mit Länge 16 bilden.

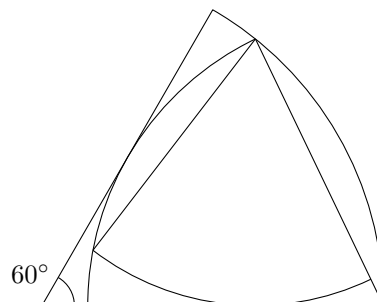
Alle Indizes l mit $d_{l+2} \equiv d_{l-5} \pmod{7}$ sind $l \equiv 4, 12 \pmod{16}$. Wegen $6 \leq l \leq 2024$ und $2024 = 126 \cdot 16 + 8$ gibt es Lösungen der Form $l = 16 \cdot k + 4$ genau für $1 \leq k \leq 126$ und Lösungen der Form $l = 16 \cdot k + 12$ genau für $0 \leq k \leq 125$. Insgesamt gibt es $2 \cdot 126 = 252$ Lösungen.

Aufgabe 53. In einen Kreissektor mit dem Mittelpunktswinkel 60° wird ein weiterer Kreissektor eingeschrieben, und dies geschieht noch einmal, wie in der Abbildung dargestellt. Bestimme das Verhältnis des Radius des kleinsten zum Radius des größten Sektors.



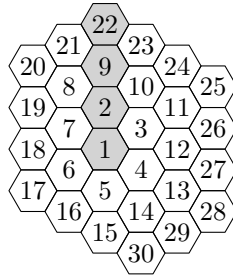
Ergebnis. $\frac{\sqrt{39}}{8}$

Lösung. Spiegle den kleinsten Sektor an der Winkelhalbierenden des zweiten Kreissektors, wie in der folgenden Abbildung gezeigt.



Daraus ist ersichtlich, dass der Radius des kleinsten Kreissektors gerade die y -Koordinate des Schnittpunkts des ersten und zweiten Bogens ist. Der Mittelpunkt des ersten Sektors liege bei den Koordinaten $(0, 0)$ und der rechte Scheitelpunkt bei $(1, 0)$. Dann wird der größte Kreis durch $x^2 + y^2 = 1$ und der mittlere durch $(x - 1)^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ beschrieben. Subtrahiert man die erste Gleichung von der zweiten, so erhält man $1 - 2x = \frac{3}{4} - 1$, daraus $x = \frac{5}{8}$ und weiter $y = \pm \frac{\sqrt{39}}{8}$. Da die negative Lösung keine gültige geometrische Konfiguration ergibt, ist die einzige Lösung $\frac{\sqrt{39}}{8}$.

Aufgabe 54. In einem Bienenstock sind 2024 sechseckige Zellen. In der Zelle im Zentrum befindet sich 1 ml Honig. In einem Spiralmuster (siehe Abbildung) erhöht sich die Honigmenge jeweils um 1 ml bis zur letzten Zelle mit 2024 ml Honig. Die Bienenkönigin beschließt, eine Autobahn von der zentralen Zelle nach außen zu bauen, wie im Bild in Grau angedeutet. Um dies zu tun, muss der gesamte Honig aus den grauen Zellen entfernt werden. Wie viele Milliliter Honig müssen für dieses Vorhaben abtransportiert werden?



Ergebnis. 17928

Lösung. Wir bezeichnen die Menge an Honig in der n -ten Zelle der Autobahn vom Zentrum aus mit $H(n)$. Also ist $H(1) = 2$, $H(2) = 9$ und so weiter. Zur Berechnung der Honigmenge in den Zellen der Autobahn betrachten wir das Sechseck, das durch jene Zellen gebildet wird, die vom Zentrum genau n Zellen entfernt sind. Um eine Seite dieses Sechsecks zu durchwandern, benötigen wir n Schritte. Wenn wir in der Spirale von der Zelle $H(n)$ zur Zelle $H(n + 1)$ gehen, müssen wir fünf Seiten eines solchen Sechsecks durchwandern, das in Entfernung n vom Zentrum liegt. Weiters durchwandern wir eine Seite des Sechsecks, das in Entfernung $n + 1$ vom Zentrum liegt. Folglich ist $H(n + 1) = H(n) + 5n + (n + 1) = H(n) + 6n + 1$. Eine geschlossene Form dieser Folge ist gegeben durch

$$\begin{aligned} H(n) &= 6(n - 1) + 1 + H(n - 1) = \dots \\ &= 6 \cdot ((n - 1) + (n - 2) + \dots + 1) + (n - 1) + H(1) \\ &= 6 \cdot \frac{(n - 1)n}{2} + n + 1 \\ &= 3n^2 - 2n + 1. \end{aligned}$$

Um die Summe des Honigs zu berechnen, benötigen wir die Anzahl N an Zellen in der Autobahn, ausgenommen die einzelne Zelle im Zentrum. Da es genau 2024 Zellen gibt, ist N die größte ganze Zahl, die folgende Ungleichung erfüllt:

$$\begin{aligned} H(N) &\leq 2024 \\ \Leftrightarrow 3N^2 - 2N &\leq 2023 \\ \Leftrightarrow N^2 - \frac{2}{3}N &\leq 674 + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Wegen $27^2 - \frac{2}{3} \cdot 27 > 729 - 27 > 675$ kann der Wert von N höchstens 26 sein. Tatsächlich ist $26^2 - \frac{2}{3} \cdot 26 < 676 - 18 < 674$ und daher ist $N = 26$ die gesuchte Anzahl an Zellen in der Autobahn.

Schließlich ergibt sich die gesuchte Summe zu

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{k=1}^N H(k) &= 1 + 3 \sum_{k=1}^N k^2 - 2 \sum_{k=1}^N k + \sum_{k=1}^N 1 \\ &= 1 + \frac{1}{2}N(N + 1)(2N + 1) - N(N + 1) + N \\ &= 1 + 13 \cdot 27 \cdot 53 - 26 \cdot 27 + 26 \\ &= 17928. \end{aligned}$$

Alternative Bestimmung der Summe: Folgender Zusammenhang bietet eine andere Möglichkeit, die Summe zu berechnen:

$$H(k) = 6 \cdot \frac{(k - 1)k}{2} + k + 1 = 6 \binom{k}{2} + \binom{k + 1}{1}$$

Weiters benötigen wir die Hockeyschläger-Regel im Pascalschen Dreieck:

$$\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \dots + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{k=1}^N H(k) &= 1 + 6 \sum_{k=1}^N \binom{k}{2} + \sum_{k=1}^N \binom{k+1}{1} \\ &= 1 + 6 \binom{N+1}{3} + \left(\binom{N+2}{2} - 1 \right) \\ &= 27 \cdot 26 \cdot 25 + 14 \cdot 27 \\ &= 17928. \end{aligned}$$

Aufgabe 55. Wie viele unterschiedliche ganze Zahlen kommen in der Liste

$$\left\lfloor \frac{1^2}{2024} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2^2}{2024} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{2024^2}{2024} \right\rfloor$$

vor, wobei $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl bezeichnet, die kleiner oder gleich x ist?

Ergebnis. 1519

Lösung. Wegen $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$ gilt für $n \leq 1011$, dass $\frac{(n+1)^2}{2024} - \frac{n^2}{2024} = \frac{2n+1}{2024} \leq \frac{2023}{2024} < 1$ ist und deshalb $\left\lfloor \frac{(n+1)^2}{2024} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n^2}{2024} \right\rfloor + 1$. Also enthält die Liste $\left\lfloor \frac{1^2}{2024} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2^2}{2024} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{1012^2}{2024} \right\rfloor$ alle ganzen Zahlen von $\left\lfloor \frac{1^2}{2024} \right\rfloor = 0$ bis $\left\lfloor \frac{1012^2}{2024} \right\rfloor = 506$. Unter den ersten 1012 Termen der Sequenz gibt es also genau 507 verschiedene Elemente.

Andererseits gilt für $n \geq 1012$, dass $\frac{(n+1)^2}{2024} - \frac{n^2}{2024} = \frac{2n+1}{2024} \geq \frac{2025}{2024} > 1$ ist und deshalb $\left\lfloor \frac{(n+1)^2}{2024} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{n^2}{2024} \right\rfloor$. Folglich ist jedes Element aus $\left\lfloor \frac{1013^2}{2024} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{1014^2}{2024} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{2024^2}{2024} \right\rfloor$ neu in der Liste, da es strikt größer als das vorherige Element ist. Daher sind die letzten 1012 Terme der Sequenz paarweise verschieden und sie unterscheiden sich auch von den Elementen in der ersten Hälfte der Sequenz. Die Folge enthält also insgesamt $507 + 1012 = 1519$ verschiedene ganze Zahlen.

Aufgabe 56. Wie viele geordnete 4-Tupel (a, b, c, d) mit paarweise verschiedenen $a, b, c, d \in \{1, 2, \dots, 17\}$ gibt es, sodass $a - b + c - d$ durch 17 teilbar ist?

Ergebnis. 3808

Lösung. Wir konstruieren ein regelmäßiges 17-Eck $P_1 \dots P_{17}$. Es gilt $a - b \equiv d - c \pmod{17}$ und daher bilden die Punkte P_a, P_b, P_c, P_d ein gleichschenkliges Trapez mit parallelen Grundseiten $P_a P_c$ und $P_b P_d$. Wenn wir eine Ecke löschen, können die verbleibenden 16 Eckpunkte auf acht parallele Strecken aufgeteilt werden. Jedes Paar dieser Strecken kann als Grundseite eines Trapezes dienen und wir erhalten die dazugehörigen Mengen $\{a, b, c, d\}$. Es gibt $17 \cdot \binom{8}{2} = 476$ solcher Mengen und jede von ihnen bestimmt mehrere geordnete 4-Tupel: Wir müssen definieren, welche Grundseite $P_a P_c$ und welche $P_b P_d$ ist, und können dann noch a und c beziehungsweise b und d tauschen. Das ergibt $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Möglichkeiten. Daher ist die Lösung $8 \cdot 476 = 3808$.

Aufgabe 57. Sei $ABCD$ ein Rechteck und E ein Punkt auf der Seite CD mit $2 \cdot \overline{DE} = \overline{EC}$. Sei F der Schnittpunkt der Strecken BD und AE . Bestimme unter der Voraussetzung $\angle DFA = 45^\circ$ das Verhältnis $\overline{AD} : \overline{AB}$.

Ergebnis. $\frac{\sqrt{7}-2}{3}$

Lösung. Die Konfiguration ist skaleninvariant, also kann man $\overline{AD} = 4$ annehmen. Bezeichne ferner die senkrechte Projektion von F auf AD mit G , den Kreismittelpunkt des Dreiecks DAF mit O und die senkrechte Projektion von O auf GF mit H . Die Dreiecke ABF und EDF sind ähnlich mit $\overline{AB} : \overline{ED} = 3 : 1$, folglich ist $\overline{AG} = 3$. Als Mittelpunktswinkel zum Peripheriewinkel $\angle DFA$ ergibt sich $\angle DOA = 2\angle DFA = 90^\circ$, weshalb AOD ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ist. Der Abstand von O sowohl von AB als auch von AD ist also gleich 2. Bezeichnet man die letzte unbekannte Seitenlänge im rechtwinkligen Dreieck HOF mit $x = HF$ und verwendet den Satz des Pythagoras, so erhält man

$$x^2 + (3-2)^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$$

und daraus $x = \sqrt{7}$. Da die Dreiecke DGF und DAB ähnlich sind, ist das gesuchte Verhältnis gleich

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{DF}} = \frac{1}{2 + \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7} - 2}{3}.$$

Lösung. Man berechnet zunächst die Zahl aller möglichen Sequenzen, unabhängig davon, ob die Scheibe zuletzt bei Alex landet. Zu Beginn kann Alex die Scheibe an drei Personen spielen. Jeder andere Freund kann die Scheibe aufgrund der Regel nur an zwei Personen weitergeben. Es gibt also $3 \cdot 2^{n-1}$ Sequenzen in n Runden.

Bezeichne die Anzahl der Sequenzen, die in der n -ten Runde bei Alex enden, mit y_n . Nach n Würfeln gibt es insgesamt $3 \cdot 2^{n-1}$ Sequenzen. In der nächsten Runde können einige dieser Sequenzen zu Alex verlängert werden. Sequenzen, die nicht zu ihm verlängert werden können, sind diejenigen, bei denen er die Scheibe nach dem n -ten oder $(n-1)$ -ten Wurf hält, weil er die Scheibe an jemand anderen weitergeben muss bzw. nicht angespielt werden darf. Es gibt y_n bzw. $2y_{n-1}$ solcher Sequenzen, weshalb $y_{n+1} = 3 \cdot 2^{n-1} - y_n - 2y_{n-1}$ ist.

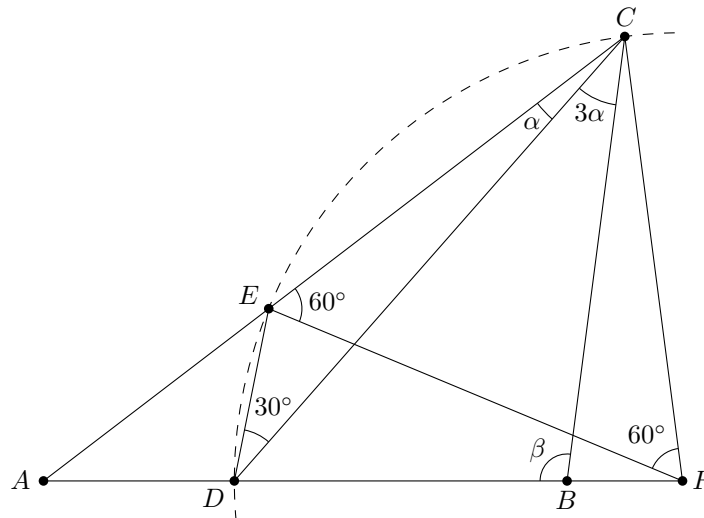
Es ist einfacher, jeden Term bis y_{10} zu berechnen als nach einer expliziten Formel zu suchen. Aus $y_1 = 0$ und $y_2 = 0$ sowie der Rekursionsbeziehung $y_{n+1} = 3 \cdot 2^{n-1} - y_n - 2y_{n-1}$ ergibt sich $y_3 = 3 \cdot 2^1 - 0 - 0 = 6$, $y_4 = 3 \cdot 2^2 - 6 = 6$, $y_5 = 3 \cdot 2^3 - 6 - 12 = 6$, $y_6 = 3 \cdot 2^4 - 6 - 12 = 30$, $y_7 = 3 \cdot 2^5 - 30 - 12 = 54$, $y_8 = 3 \cdot 2^6 - 54 - 60 = 78$, $y_9 = 3 \cdot 2^7 - 78 - 108 = 198$ und schließlich $y_{10} = 3 \cdot 2^8 - 198 - 156 = 414$.

Alternative Lösung: Betrachte eine Sequenz von n Durchgängen, die mit Alex beginnt und endet, aber die Scheibe nirgendwo dazwischen bei Alex landet. Am Beginn des Spiels kann Alex zu einem der drei Freunde spielen, dieser danach auf zwei Arten fortsetzen, danach sind die Würfe deterministisch. Ist eine solche Sequenz in der Mitte des Spiels, dann gibt einer der Freunde die Scheibe an Alex weiter. Alex kann die Scheibe also nur an einen von zwei Freunden weitergeben, und für diesen gibt es wieder zwei Möglichkeiten zur Fortsetzung. Eine solche Folge von n Durchgängen kann nicht kürzer als 3 sein. Daher genügt es, alle Partitionen von 10 zu finden, deren Teile nicht kleiner als 3 sind. Partitionen von 10 dieser Art gibt es nur die folgenden: 10, 3 + 7, 7 + 3, 6 + 4, 4 + 6, 5 + 5, 3 + 3 + 4, 3 + 4 + 3 und 4 + 3 + 3. Die Partition von 10 hat 6 mögliche Ausführungsarten. Jede der Partitionen, die aus zwei Teilen besteht, kann auf $6 \cdot 4$ Arten ausgespielt werden; es gibt also $5 \cdot 6 \cdot 4$ Möglichkeiten. Schließlich gibt es $6 \cdot 4 \cdot 4$ Arten, wie die Partition mit drei Teilen ausgespielt werden kann, also $3 \cdot 6 \cdot 4$ Möglichkeiten. Zusammen sind es $6 \cdot (1 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 4) = 6 \cdot 69 = 414$ Sequenzen.

Aufgabe 61. Für einen Punkt D auf der Seite AB des Dreiecks ABC ist $\angle ACD = 11,3^\circ$ und $\angle DCB = 33,9^\circ$. Außerdem ist $\angle CBA = 97,4^\circ$. Bestimme $\angle AED$, wobei E ein Punkt auf AC mit $\overline{EC} = \overline{BC}$ ist.

Ergebnis. $41,3^\circ$

Lösung. Wir setzen der Einfachheit halber $\alpha = 11,3^\circ$ und $\beta = 97,4^\circ$. Dann ist $\angle DCB = 3\alpha$. Ferner sei F ein Punkt auf der Geraden AB , der von B verschieden ist und für den $\overline{CB} = \overline{CF}$ gilt.



Berechnen wir $\angle BCF$: Es ist $\angle FBC = 180^\circ - \beta$ und da das Dreieck BFC gleichschenkelig ist, gilt $\angle BCF = 180^\circ - 2\angle FBC = 2\beta - 180^\circ$. Weiter gilt

$$\angle ECF = \alpha + 3\alpha + 2\beta - 180^\circ = 4 \cdot 11,3^\circ + 2 \cdot 97,4^\circ - 180^\circ = 60^\circ.$$

Da $\overline{CF} = \overline{CB}$ ist, was laut Aufgabenstellung gleich \overline{CE} ist, ist das Dreieck CEF gleichseitig.

Wir zeigen weiter, dass $\overline{FC} = \overline{FD}$ gilt: Wegen $\angle DCF = 60^\circ - \alpha$ und $\angle CFD = 180^\circ - \beta$ ergibt sich

$$\angle FDC = 180^\circ - (60^\circ - \alpha) - (180^\circ - \beta) = \alpha + \beta - 60^\circ = 48,7^\circ = 60^\circ - \alpha = \angle DCF.$$

Daher ist das Dreieck CDF gleichschenkelig mit dem Scheitelpunkt F und $\overline{FC} = \overline{FD}$ wie behauptet. Zusammen mit dem gleichseitigen Dreieck CEF impliziert dies $\overline{FC} = \overline{FE} = \overline{FD}$. Die Punkte C , E und D liegen also auf einem Kreis mit Mittelpunkt F . Daraus folgt $\angle CDE = \frac{1}{2}\angle CFE = 30^\circ$ und $\angle DEC = 180^\circ - \alpha - 30^\circ$. Schließlich ergibt sich

$$\angle AED = 180^\circ - \angle DEC = 30^\circ + \alpha = 41,3^\circ.$$

Aufgabe 62. Die reellen Zahlen $a > b > 1$ erfüllen die Ungleichung

$$(ab + 1)^2 + (a + b)^2 \leq 2(a + b)(a^2 - ab + b^2 + 1).$$

Ermittle den kleinstmöglichen Wert von

$$\frac{\sqrt{a-b}}{b-1}.$$

Ergebnis. $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Lösung. Man ordnet die Ungleichung wie folgt um:

$$\begin{aligned} (ab + 1)^2 + (a + b)^2 &\leq 2(a + b)(a^2 - ab + b^2 + 1) \\ \iff 0 &\leq 2a^3 + 2b^3 - a^2b^2 - a^2 - b^2 - 4ab + 2a + 2b - 1 \\ \iff 0 &\leq (a^2 - 2b + 1)(2a - b^2 - 1) \end{aligned}$$

Wegen $a > b > 1$ ist $a^2 > b^2$ und weiter $a^2 - 2b + 1 > b^2 - 2b + 1 = (b - 1)^2 > 0$. Für die zweite Klammer gilt daher

$$\begin{aligned} 2a - b^2 - 1 &\geq 0 \\ \iff 2a - 2b &\geq b^2 - 2b + 1 \\ \iff 2(a - b) &\geq (b - 1)^2 \\ \iff \frac{\sqrt{a-b}}{b-1} &\geq \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Um Gleichheit zu erhalten, muss $a = \frac{1}{2}(b^2 + 1)$ gelten. Der Wert $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ergibt sich beispielsweise für $a = \frac{5}{2}$ und $b = 2$. Weil diese Werte für a und b die Gleichheitsbedingung erfüllen, ist $\frac{1}{\sqrt{2}}$ wirklich der kleinstmögliche Wert von $\frac{\sqrt{a-b}}{(b-1)}$.

Aufgabe 63. Seien x, y, z verschiedene ganze Zahlen ungleich Null, so dass die Gleichung

$$\frac{(x-1)^2}{z} + \frac{(y-1)^2}{x} + \frac{(z-1)^2}{y} = \frac{(x-1)^2}{y} + \frac{(y-1)^2}{z} + \frac{(z-1)^2}{x}$$

gilt. Finde den kleinstmöglichen Wert von

$$|64x + 19y + 4z|.$$

Ergebnis. 7

Lösung. Das Symbol $\sum_{cyc} Q(x, y, z)$ bezeichnet eine Summe, bei der die beiden anderen Terme durch zweimalige Wiederholung der zyklischen Vertauschung $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ erhalten werden, also $\sum_{cyc} Q(x, y, z) = Q(x, y, z) + Q(y, z, x) + Q(z, x, y)$.

Multipliziert man die Gleichung mit $xyz \neq 0$ und stellt sie um, erhält man

$$P(x, y, z) = x(x-1)^2(y-z) + y(y-1)^2(z-x) + z(z-1)^2(x-y) = \sum_{cyc} x(x-1)^2(y-z) = 0.$$

Da P für $x = y$, $y = z$ oder $z = x$ verschwindet, muss es durch $(x-y)(y-z)(z-x) = \sum_{cyc} x^2(z-y)$ teilbar sein. Da $P(x, y, z)$ ein Polynom vom Grad 4 ist und $\sum_{cyc} x^2(z-y)$ ein Polynom vom Grad 3, muss der übrige Faktor linear sein:

$$P(x, y, z) = \left(\sum_{cyc} x^2(z-y) \right) \cdot (ax + by + cz + d)$$

Außerdem ist $xy - xz + yz - yx + zx - zy = \sum_{cyc} x(y-z) = 0$, also gilt

$$\begin{aligned} P(x, y, z) &= \sum_{cyc} (x^3(y-z) - 2x^2(y-z) + x(y-z)) \\ &= \sum_{cyc} (x^3(y-z) - 2x^2(y-z)) + 0 \\ &= \left(\sum_{cyc} x^2(z-y) \right) \cdot (ax + by + cz + d). \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich bei $x^2(z-y) \cdot ax = x^3(y-z)$ folgt $a = -1$ und in gleicher Weise $b = c = -1$. Weiters ergibt sich aus $x^2(z-y) \cdot d = -2x^2(y-z)$, dass $d = 2$ sein muss. Daraus folgt

$$P(x, y, z) = (x-y)(y-z)(z-x)(2-x-y-z) = 0.$$

Da paarweise verschiedene Tripel (x, y, z) gesucht werden, muss $x + y + z = 2$ gelten. Es ist leicht zu erkennen, dass jedes Tripel mit diesen Eigenschaften auch die ursprüngliche Gleichung löst.

Um den kleinsten Wert des Ausdrucks $|64x + 19y + 4z|$ zu finden, subtrahiert man $4(x + y + z) - 8 = 0$ und erhält

$$|64x + 19y + 4z| = |15 \cdot (4x + y) + 8|.$$

Wir suchen eine ganze Zahl $4x + y$, die diesen Term minimiert. Das Minimum wird eindeutig mit $4x + y = -1$ erreicht, zum Beispiel bei $(x, y, z) = (-2, 7, -3)$. Daher ist das Ergebnis 7.