Ülesanne 1. Viie mängijaga mängus saab igas voorus üks mängijatest punkti. Mäng lõppeb, kui üks mängijatest on kogunud 10 punkti. Kui mitu vooru saab mäng maksimaalselt kesta?

Vastus. 46

Lahendus. Mängu lõppedes on võitjal 10 punkti ning kõigil teistel mängijatel maksimaalselt 9 punkti, mistõttu vastus on $10 + 4 \cdot 9 = 46$.

Ülesanne 2. Ahtol on neli kaarti, millele on kirjutatud numbrid 1, 2, 3 ja 6. Ta tahab need neli kaarti järjestada nii, et moodustuvad kaks arvu A ja B nii, et arv A on arvu B kordne, näiteks $A = 36$ ja $B = 12$. Kui mitmel eri viisil saab ta seda teha?

Vastus. 21

Lahendus. Vaatleme kahte juhtu:

I. B koosneb ühest kaardist ning A koosneb kolmest. Vaatleme võimalikke B väärtusi:

- $B = 1$: A on suvaline permutatsioon numbritest $2, 3, 6 \to 6$ valikut.
- $B = 2$: A peab lõppema numbriga $6 \to 2$ valikut.
- $B = 3$: A võib olla suvaline permutatsioon, kuna numbrite summa jagub kolmega $\to 6$ valikut.
- $B = 6$: A peab lõppema numbriga $2 \to 2$ valikut.

II. A ja B koosnevad mõlemad kahest kaardist. Siis suhe A/B on väiksem kui 6, ehk see saab omandada väärtuseid 1, 2, 3, 4 ja 5. Vaatleme kõiki juhte:

1: See pole võimalik, kuna sel juhul $A = B$.

2: A peab lõppema numbriga 2 või 6. Kui A lõppeb numbriga 2, siis B peab lõppema numbriga 6 või 1. Esimesel juhul saame me arvud 32 ja 16, teisel juhul 62 ja 31 $\to$ 2 valikut. Kui A lõppeb numbriga 6, siis B peab lõppema numbriga 3, kust me saame arvud 26 ja 13 $\to$ 1 valik.

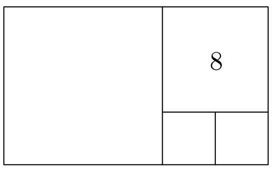
3: A peab algama numbriga 6 või 3. Esimesel juhul peab B algama numbriga 2, kust me saame 63 ja 21. Teisel juhul peab B algama numbriga 1, kust me saame 36 ja 12 $\to$ 2 valikut.

4: A peab algama numbriga 6 ja lõppema numbriga 2, kuna tegu on paarisarvuga. Seega $A = 62$, mis ei jagu neljaga..

5: A peab lõppema numbriga 5 või 0, aga see pole võimalik.

Kokkuvõttes saame, et vastus on 21.

Ülesanne 3. Joonisel on neli ruutu, neist ühe pindala on 8. Mis on suurima ruudu pindala?



Vastus. 18

Lahendus. Ruutude küljepikkuste suhe on $3 : 2 : 1$. Järelikult on suurima ruudu pindala $\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 8 = 18$.

Ülesanne 4. Pargis oli palju harakaid, matemaatikuid ja kentaure. Kokku oli neil 15 saba ja 94 kätt. Kui mitu jalga oli kokku?

Märkus: Harakatel ei ole käsi, aga on kaks jalga ja üks saba, matemaatikutel on kaks kätt ja kaks jalga, aga ei ole saba ning kentauridel on kaks kätt, neli jalga ja üks saba.

Vastus. 124

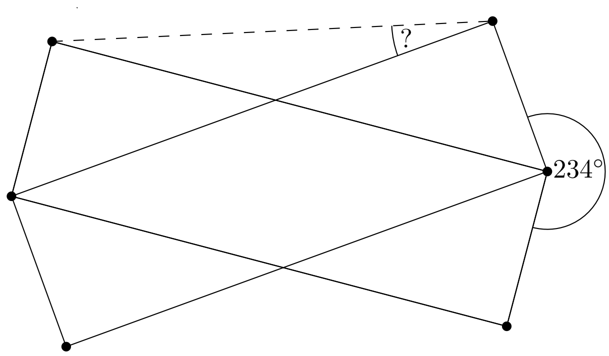
Lahendus. Olgu harakaid, matemaatikuid ja kentaure vastavalt h, m ja k tükki. Siis sabade tingimus annab meile $h + k = 15$ ning käte tingimus annab $2m + 2k = 94$. Jalgu on $2h + 2m + 4k$ ehk $2(h + k) + (2m + 2k) = 30 + 94 = 124$.

Ülesanne 5. Televiisoris on kolm kanalit, Esimene, Teine ja Kolmas. Igalt kanalilt saab vahetada vaid kanalile, mille number erineb praegusest kanalist ühe võrra, nt Esimeselt kanalilt ainult Teisele. Televiisori vaatamist alustatakse Teiselt kanalilt ja siis vahetatakse kanalit 11 korda. Kui mitu erinevat vaadatud kanalite järjestust saab moodustada?

Vastus. 64

Lahendus. Saadud jadas on 12 kanalit. Paarituarvulistel kohtadel peab olema Teine kanal ning paarisarvulistel kohtadel on kas Esimene või Kolmas kanal. Kuna meil on kuus paarisarvulist positsiooni, on vastus $2^6 = 64$.

Ülesanne 6. Joonisel on kaks võrdset ristkülikut ja antud on ühe nurga suurus. Leia küsimärgiga märgitud nurga suurus kraadides.



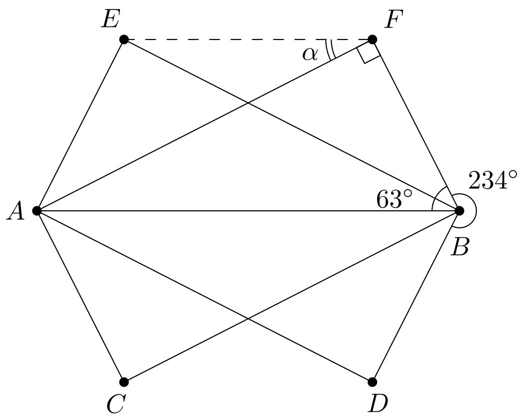
Vastus. 27

Lahendus. Tähistame punktid nii, nagu juuresoleval joonisel näidatud. Ühine diagonaal AB poolitab nurga $\backslash FBD$, seega

$$\backslash FBA = \frac{360 \ \ - 234}{2} = 63 \ \ .$$

Kuna punktiirjoon EF on paralleelne sirgega AB, siis $\backslash EFB + \backslash FBA = 180$. Lahutades maha täisnurga $\backslash AFB$, saame me

$$\alpha = 180 \ \ - 90 \ \ - 63 \ \ = 27 \ \ .$$



Ülesanne 7. Leia avaldise $x^3 - 14x + 2024$ väärtus, kui $x^2 - 4x + 2 = 0$.

Vastus. 2016

Lahendus. Lahutades avaldisest $x^3 - 14x + 2024$ avaldise $x(x^2 - 4x + 2) = 0$, et kaotada ära kuupliige x^3, saame me $4x^2 - 16x + 2024$. Nüüd tahame me ära kaotada ruutliikme $4x^2$, mistõttu lahutame me avaldise $4(x^2 - 4x + 2) = 0$ ning alles jääb 2016, mis on otsitud vastus.

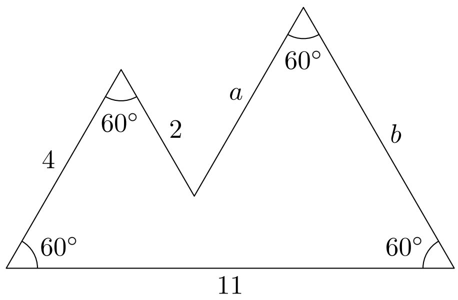
Ülesanne 8. Georg valis positiivse täisarvu n ja kirjutas paberile selle paarisarvuliste numbrite arvu, paaritute numbrite arvu ja kõikide numbrite arvu just selles järjekorras. Lugedes neid kolme arvu ühe positiivse arvuna vasakult paremale ja ignoreerides võimalikke nulle vasakul, tekkis taaskord n. Mis on vähim selline n?

Näiteks kui Georg valis arvu 2024, siis selle paarisarvuliste numbrite arv on 4, paaritute numbrite arv on 0 ja kõigi numbrite arv on 4 ehk tulemuseks loeb ta arvu 404.

Vastus. 123

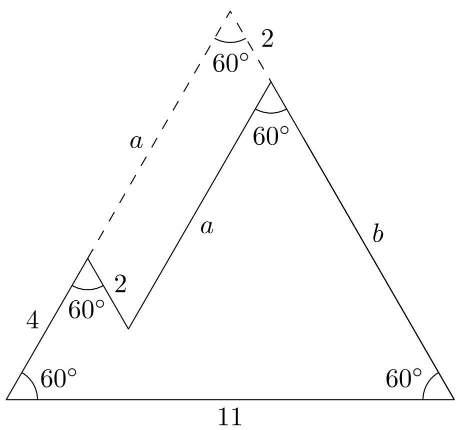
Lahendus. Otsitud arv ei saa olla ühekohaline, kuna selle arvu ainus number oleks kas paaris või paaritu ning seetõttu oleks vastavas kategoorias üles loetud. Sarnaselt ei saa otsitud arv olla kahekohaline, kuna see peaks lõppema numbriga 2, mis on paaris. Kolmekohaliste arvude hulgas on paaris ning paaritute numbrite koguarv 3, mistõttu võimalikud arvud on 33, 123, 213 ja 303. Peale ülesandes kirjeldatud transformatsiooni rakendamist muutuvad kõik need arvud arvuks 123 (kaasa arvatud 123 ise). Järelikult on vastus 123.

Ülesanne 9. Joonisel on viisnurk, mille osad nurgad ja küljepikkused on antud. Leia $a + b$.



Vastus. 16

Lahendus. Lisame joonisele rööpküliku, et tekiks võrdkülgne kolmnurk küljepikkusega $11 = 4 + a = 2 + b$ nagu joonisel.



Järelikult $a = 7$, $b = 9$ ja $a + b = 16$.

Ülesanne 10. Slovaki rahvalaulus *Kopala studienku* ("Ta kaevas kaevu") kontrollib tüdruk, kas tema kaevu sügavus ja laius on võrdsed. Kaev on silindri kujuga, kaevu sügavus on silindri kõrgus ja laius silindri põhja diameeter. Tüdruk teab, et nädalaga suudab ta kaevata kaevu, mille laius on sobiv, kuid sügavus on vaid $\frac{1}{3}$ sobivast sügavusest. Janko Matúška suudab nädalaga kaevata kaevu, mis on õige sügavusega, kuid mille laius on pool sobivast laiusest. Kaevamiseks tehtav töö on võrdeline eemaldatava pinnase ruumalaga. Kui mitu päeva kulub neil koos piisava suurusega kaevu kaevamiseks?

Vastus. 12

Lahendus. Kaevu kaevamiseks kuluv aeg on võrdeline eemaldatava pinnase ruumalaga. Kuna tegu on silindriga, siis on ruumala antud valemiga $V = \frac{}{4} \cdot D \cdot W^2$, kus D on kaevu sügavus ning W on kaevu laius. Nüüd näeme, et tüdruk vajab 7 päeva, et välja kaevata $\frac{}{4} \cdot \frac{D}{3} \cdot W^2 = \frac{1}{3}V$ pinnast ehk ta vajab 21 päeva, et ruumala V pinnast välja kaevata. Analoogselt vajab Janko 7 päeva, et välja kaevata $\frac{}{4} \cdot D \cdot \left(\frac{W}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}V$ pinnast ehk ta vajab 28 päeva, et ruumala V pinnast välja kaevata. Seega kaevab tüdruk päevas $\frac{1}{21}$ otsitavast ruumalast ning Janko $\frac{1}{28}$ otsitavast ruumalast. Koos eemaldavad nad $\frac{1}{21} + \frac{1}{28} = \frac{1}{12}$ otsitavast ruumalast päevaga. Järelikult vajavad nad 12 päeva, et kaev valmis kaevata.

Ülesanne 11. Leia selliste lõikude arv, mis ühendavad 10×10 ruudustikus kahe ruudu nurki ja mille pikkus on $\sqrt{5}$.

Vastus. 360

Lahendus. Esmalt märkame, et igas 2×1 ristkülikus on täpselt 2 diagonaali pikkusega $\sqrt{5}$. Seega piisab meil leida 2×1 ristkülikute arv. Kui ristkülik on ruudustikus vertikaalselt, siis on meil 10 valikut tulba jaoks, kuhu seda asetada, ning 9 valikut rea jaoks, ehk kokku 90 võimalust selle ristküliku asetamiseks 10×10 ruudustikku. Kui ristkülik asub ruudustikus horisontaalselt, saame analoogse argumendiga sama palju võimalusi. Kokkuvõttes on meil 2 diagonaali igas ristkülikus ning $90 + 90 = 180$ ristkülikut, mistõttu on meil kokku 360 diagonaali.

Ülesanne 12. M, A, T ja H on paarikaupa erinevad nullist suuremad numbrid ja kehtib võrdus

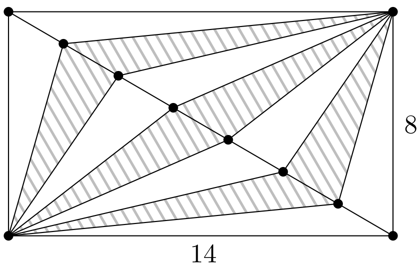
$$2024 + HAHA = MATH$$

Mis on neljakohalise arvu $MATH$ suurim võimalik väärtus?

Vastus. 5963

Lahendus. Kuna arvudel $MATH$ ja $HAHA$ on sama sajaliste number ning vastav number arvus 2024 on 0, siis järelikult ei teki kümneliste liitmisel ülekannet. Seega $TH = HA+24$ ja $M = H+2$. Teisalt peab A ja H liitmisel tekkima ülekanne, kuna muidu kehtiks $T = H + 2 = M$, aga kõik numbrid on paarikaupa erinevad. Seega $H = A+4-10 = A-6$, kust $M = A - 4$ ja $T = A - 3$. Siit leiame me, et $MATH$ on üks arvudest 3741, 4852 või 5963, ning viimane väärtus neist on suurim.

Ülesanne 13. Pildil oleva ristküliku küljepikkused on 14 ja 8 ühikut ning diagonaal on jagatud seitsmeks võrdse pikkusega osaks. Mis on viirutatud ala pindala?



Vastus. 48

Lahendus. Kuna igas kolmnurgas on tipust diagonaalile tõmmatud kõrgus sama pikk, siis on otsitav pindala täpselt $\frac{3}{7}$ ristküliku kogupindalast, mistõttu vastus on $\frac{3}{7} \cdot 8 \cdot 14 = 48$.

Ülesanne 14. Kui matemaatikaringiga liituks üks uus tüdruk ning lahkuks 20% poistest, siis oleks ringis võrdne arv poisse ja tüdrukuid. Kui aga üks tüdruk lahkuks matemaatikaringist ning seejärel kasvaks tüdrukute arv ringis 30%, siis oleks taas ringis võrdne arv poisse ja tüdrukuid. Mitu osalejat on matemaatikaringis kokku?

Vastus. 116

Lahendus. Olgu ringis tüdrukuid t tükki ning poisse p tükki. Ülesande tekst annab meile järgneva võrrandsüsteemi:

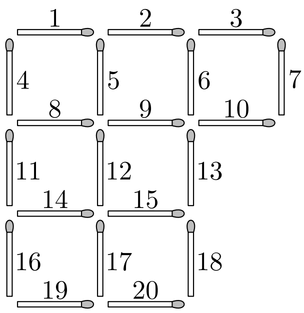
$$t + 1 = \frac{4}{5}p,$$
$$\frac{13}{10}(t-1) = p.$$

Asendades $p = \frac{5}{4}t + \frac{5}{4}$ esimesest võrrandist teise, saame me

$$\frac{5}{4}t + \frac{5}{4} = \frac{13}{10}t - \frac{13}{10},$$

kust $t = 51$ ning seega $p = \frac{13}{10} \cdot 50 = 65$. Järelikult on otsitud vastus $t + p = 51 + 65 = 116$.

Ülesanne 15. Tikud moodustavad pildil üheksa ruutu. Me eemaldame kolm tikku nii, et alles jääb täpselt viis ruutu ning iga tikk on vähemalt ühe ruudu osa. Leia maksimaalne summa, mida saab saada kolmele eemaldatud tikule vastavate arvude liitmisel.



Vastus. 50

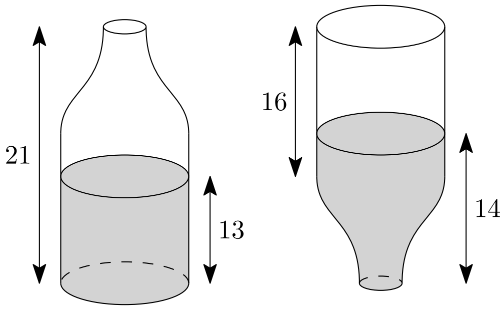
Lahendus. Joonisel on 7 ruutu küljepikkusega 1 ja kaks ruutu küljepikkusega 2. Et ruutude arvu viieni vähendada, tuleb eemaldada 4 ruutu. Et eemaldada ruutu, mille moodustavad tikud arvudega $3, 7, 6, 10$, tuleb eemaldada vähemalt kolm neist. Järelikult on see üks allesjäävatest ruutudest. Lisaks märkame, et tikku arvuga 6 ei saa eemaldada, kuna see kaotaks eelmainitud ruudu ära ning me ei saa ülejäänud kolme tikku sellest ruudust eemaldada.

Tiku 11 või 13 eemaldamine kaotab samaaegselt ära mõlemad suured ruudud. Sel juhul peame me eemaldama ühe ruudu kahe tikuga. Vaatleme juhtu, kus me eemaldame tiku 11; siis on meil võimalik eemaldada tikupaarid 12 ja 13 või

18 ja 20. Teisalt, kui me eemaldaks tiku 13, siis peaks me eemaldama kas tikupaari 1, 4, tikupaari 11, 12 või tikupaari 16, 19. Nendest variantidest annab tikkude 11, 18 ja 20 suurima summa, milleks on 49. Kui mõlemad suured ruudud jäävad alles, siis saame me eemaldada vaid tikud 5, 12 ja 17, peale mida ei jää alles tingimustele vastav konfiguratsioon.

Kuna tikku 6 ei saa eemaldada ning üks suur ruut tuleb eemaldada, siis peame me eemaldama ühe järgnevatest tikupaaridest: 18, 20, või 16, 19, või 1, 4. Selline eemaldamine eemaldab korraga kaks ruutu, ühe suure ning ühe väikese. Peale seda peame me ühe tiku eemaldamisega eemaldama kaks ruutu. Juhul, kus eemaldatud tikupaar oli 18, 20, saab see olla kas tikk 11, mis eemaldab ühe suure ning ühe väikse ruudu, või tikk 12, mis eemaldab kaks väikest ruutu ning annab meile kogusummaks 50. Tikku 13 ei saa eemaldada, kuna muidu tikk 15 ei oleks ühegi ruudu osa. Analoogselt saame me, et tikupaari $16, 19$ eemaldamisel koos tikuga 13 saame me summaks 48. Seega on otsitavaks vastuseks 50.

Ülesanne 16. Jürmol on pudel kõrgusega 21. Pudel koosneb silindrist kõrgusega 16 ning irregulaarsest kujundist pudelikaela juures. Jürmo täitis pudeli osaliselt veega nii, et veetase ulatus kõrguseni 13. Seejärel pööras ta pudeli ümber ning täheldas, et veetase ulatus nüüd kõrguseni 14. Leia protsentides, kui suure osa pudeli ruumalast täidab vesi.

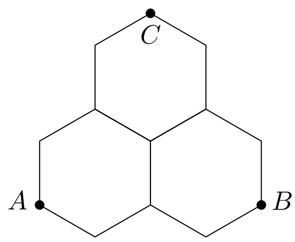


Vastus. 65

Lahendus. Tähistagu r pudeli põhja raadiust. Esimeselt pildilt näeme, et pudelis oleva vee ruumala on $13\pi r^2$. Analoogselt näeme me teiselt pildilt, et pudelis oleva õhu ruumala on $(21-14)\pi r^2 = 7\pi r^2$. Seega on pudeli koguruumala $(13+7)\pi r^2 = 20\pi r^2$ ja otsitud suhe on

$$\frac{13\pi r^2}{20\pi r^2} = \frac{13}{20} = 65\,\%.$$

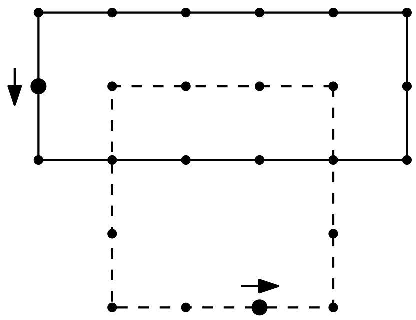
Ülesanne 17. Ralf elab Kuusnurkias, linnas, kus kõik tänavad on korrapäraste kuusnurkade küljed küljepikkusega 1. Ta tahab jalutada oma tüdruksõbra kodu juurde ja sealt koos temaga kinno. Ralf alustab joonisel punktist A, tema tüdruksõber elab punktis B ja kino asub punktis C. Ralf ei taha ühegi tänavat kaks korda läbida. Mis on kõigi võimalike teekondade pikkuste summa?



Vastus. 28

Lahendus. Leidub neli teekonda punktist A punkti B, mis ei läbi punkti C. Üks neist jätab meile kaks eri võimalust jõuda punkti C, üks jätab ühe võimaluse C ning ülejäänud kahe teekonna puhul ei ole võimalik ühtegi tänavat kaks korda läbimata punkti C jõuda. Kokkuvõttes leidub kolm sobivat teekonda. Kahe pikkus neist on 10 ning kolmanda pikkus on 8, mistõttu vastus on 28.

Ülesanne 18. Kaks valvurit patrullivad ristkülikukujulisi marsruute pidi joonisel näidatud viisil. Nad kõnnivad ühtlase kiirusega ja ja jõuavad igast märgitud vahepunktist järgmisse ühe minutiga. Mitme minuti pärast saavad nad esimest korda kokku?



Vastus. 44

Lahendus. Olgu valvur A see valvur, kes vajab ühe ringi tegemiseks 14 minutit (ristkülik) ning B see valvur, kes vajab ühe ringi tegemiseks 12 minutit (ruut). Valvurid saavad kokku saada kahes eri punktis. Kui nad kohtuvad vasakpoolses punktis peale seda, kui valvur A on läbinud a ringi ning valvur B on läbinud B ringi, siis saame me tingimuse

$$14a + 2 = 12b + 8,$$

See võrrand lihtsustub kujule $7a = 6b + 3$, kust $7 \mid 6b + 3$. Proovides väärtusi $b \in \{0, 1, 2 \ldots\}$ näeme me, et $b = 3$ ja $a = 3$ on vähim lahend. Analoogselt, kui valvurid kohtuvad parempoolses punktis, siis kehtib tingimus

$$14a + 5 = 12b + 3.$$

Siit saame me $7a = 6b - 1$, kust $7 \mid 6b - 1$ ning seega $b \geq 6$. Järelikult kohtuvad nad esimest korda peale $14 \cdot 3 + 2 = 44$ minutit.

Ülesanne 19. Positiivsed täisarvud a, b ja c rahuldavad võrrandeid

$$\sqrt{a^2 + b^2 - 172} = c,$$
$$\sqrt{c^2 + b^2 - 220} = a.$$

Mis on summa $a + b + c$ suurim võimalik väärtus?

Vastus. 26

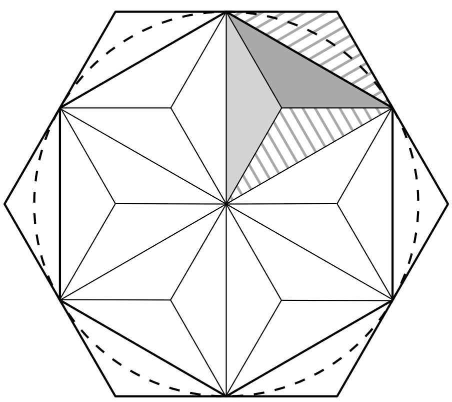
Lahendus. Tõstame mõlemad võrrandid ruutu ning liidame kokku, et saada $2b^2 = 392$. Kuna b on positiivne, siis $b = 14$. Asendades selle esimesse võrrandisse, saame me pärast ruutu tõstmist $a^2 + 24 = c^2$ ehk $c^2 - a^2 = 24$. Olgu $d = c - a$. Siis d on paarisarv, kuna c ja a on mõõemad sama paarsusega.

Avaldise $c^2 - a^2 = (c - a)(c + a)$ väärtust saame altpoolt hinnata suurusega $d(d + 2)$, mis $d \geq 6$ korral on vähemalt 48 ehk suurem kui 24. Järelikult on ainsad võimalikud väärtused d jaoks $d = 2$ ja $d = 4$. Esimesel juhul saame me $a + c = 12$ lahendiga $a = 5$ ning $c = 7$. Teisel juhul saame me $a + c = 6$ lahendiga $a = 1$ ning $c = 5$. Seega on summa $a + b + c$ suurim võimalik väärtus $5 + 14 + 7 = 26$.

Ülesanne 20. Teatud ringjoon on ühe korrapärase kuusnurga ümberringjoon ning teise korrapärase kuusnurga siseringjoon. Kui suure osa teisest kuusnurgast katab esimene kuusnurk?

Vastus. $\frac{3}{4}$

Lahendus. Joonisel näidatud viisil sarnasteks kolmnurkadeks jagamine annab vastuse $18/24 = 3/4$.



Alternatiivne lahendus. Olgu ringi raadius r. Mõlemad kuusnurgad saame me jagada kuueks võrdkülgseks kolmnurgaks. Teises kuusnurgas on iga kolmnurga kõrgus $\frac{1}{2}\sqrt{3}\,r$, esimeses kuusnurgas aga r. Seega on kuusnurkade küljepikkuste suhteks $k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ning järelikult pindalade suhe on $k^2 = \frac{3}{4}$.

Ülesanne 21. Nimetame n. sünnipäeva *ruutsünnipäevaks*, kui $n > 1$ ja arvu n iga algteguri p korral jagab ka p^2 arvu n. Näiteks $n = 8 = 2^3$ sobib, aga $n = 56 = 8 \cdot 7$ mitte. Sel aastal tähistas vanaisa Johannes oma 196. sünnipäeva. Kui mitu ruutsünnipäeva on tal olnud?

Vastus. 20

Lahendus. Iga ruutsünnipäev peab koosnema teguritest kujul p^k, kus $k > 1$. Kõik sellised arvust 196 väiksemad arvud on hulgas $S = \{4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 125, 128, 144, 169, 196\}$. Märkame, et kahe hulga S liikme korrutis, mis annab tulemuseks vähemalt 27, kuulub kas hulka S või on suurem kui 196. Arvudest, mis on väiksemad või võrdsed arvuga 27, ei ole vaid $8 = 2^3$ ja $27 = 3^3$ täisruudud. Kuna kahe täisruudu korrutis on täisruut, siis oleks saadud korrutis kas hulgas S või suurem kui 196. Viimaks näeme, et arve 8 või 27 hõlmavad korrutised, mis on väiksemad kui 196 ning ei kuulu juba hulka S, on $27 \cdot 4 = 108$ ja $8 \cdot 9 = 72$. Järelikult on meil $18 + 2 = 20$ otsitud arvu.

Ülesanne 22. Matemaatikavõistlus Matemaatiline Laeng on toimunud 10 aastat. Aastal n oli võistlusel $n + 2$ ülesannet ning ülesanded olid nummerdatud 1 kuni $n + 2$. Korraldajad tahavad 11. aasta võistluskomplekti koostada 10 ülesandest numbritega 1 kuni 10, võttes iga eelmise aasta ülesannetest ühe ja kasutades ülesannete olemasolevaid numbreid. Kui mitu erinevat võistluskomplekti saavad nad koostada eeldusel, et kõik eelnevate aastate küsimused on erinevad?

Vastus. 13122

Lahendus. Korraldajad saavad esimeselt võistluselt valida kolme küsimuse seast. Seejärel saavad nad teiselt võistluselt valida ühe $4 - 1 = 3$ küsimuse seast, kuna üks küsimusnumber on juba valitud. Sama muster jätkub sarnaselt, ehk k-ndal võistlusel on $k - 1$ küsimust juba eelmiste valikute tõttu ära kasutatud, jättes korraldajatele kolm varianti kuni üheksanda võistluseni, kus küsimusnumber 11 on liiga suur, mistõttu saavad korraldajad vaid kahe küsimuse vahel valida. Kümnendal võistlusel on küsimused 11 ja 12, mida me valida ei saa, mistõttu jääb üle vaid üks sobiv küsimus. Kokkuvõttes leidub $3^8 \cdot 2 = 13122$ sobivat võistluskomplekti.

Ülesanne 23. Leia vähim positiivne täisarv, mille esimene number on 1 ja millel on järgnev omadus: kui number 1 tõsta ümber arvu lõppu, on tekkiv arv esialgsest kolm korda suurem.

Näide esimese numbri ümber tõstmisest: $174 \to 741$.

Vastus. 142857

Lahendus. Kuna me teame, et pärast ümber tõstmist on saadud arvu viimane number 1, siis saame me otsitava numbri tagurpidi taastada:

$$\begin{aligned}
\ldots x \cdot 3 &= \ldots 1 \Rightarrow x = 7 \\
\ldots y7 \cdot 3 &= \ldots 71 \Rightarrow y = 5 \\
\ldots z57 \cdot 3 &= \ldots 571 \Rightarrow z = 8 \\
\ldots t857 \cdot 3 &= \ldots 8571 \Rightarrow t = 2 \\
\ldots s2857 \cdot 3 &= \ldots 28571 \Rightarrow s = 4 \\
\ldots r42857 \cdot 3 &= \ldots 428571 \Rightarrow r = 1.
\end{aligned}$$

Viimaks märkame, et $142857 \cdot 3 = 428571$ kehtib.

Alternatiivne lahendus. Iga positiivne täisarvu, mille esimene number on 1 ja mis koosneb vähemalt kahest numbrist, saame kirjutada kujul $10^k + a$, kus $k \geq 1$ ja a on mingi k-kohaline arv. Peale numbri 1 lõppu tõstmist on meie uueks arvuks $10a + 1$. Seega tahame me lahendada võrrandi

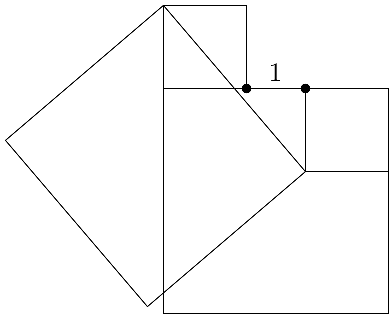
$$3 \cdot (10^k + a) = 10a + 1$$

arvude k ja a jaoks. Lihtsustame selle kujule

$$3 \cdot 10^k - 1 = 7a.$$

Vasakul olev arv on lihtsalt 2, millele järgneb k üheksat. Võtame vajaliku üheksate arvu ja jagame arvu $2999\ldots$ seitsmega, kuni jääki ei teki. Nii tehes saame me $a = 42857$ ja seega leiame me vastuse 142857.

Ülesanne 24. Joonisel on kaks paari sama suuri ruute (positiivsete küljepikkustega) ning kahe märgitud punkti vaheline kaugus on üks ühik. Mis on nelja ruudu pindalade summa?

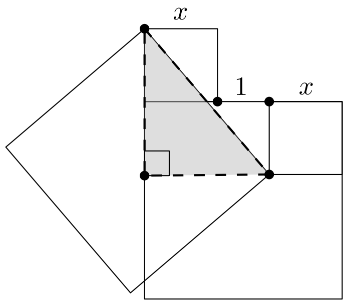


Vastus. 58

Lahendus. Olgu x lühema ruudu küljepikkus, siis Pythagorase teoreem joonisel märgitud hallis kolmnurgas annab

$$(2x)^2 + (1 + x)^2 = (1 + 2x)^2.$$

Siit saame me $x^2 = 2x$, kust $x = 2$. Seega otsitud vastus on $2(2^2 + 5^2) = 58$.



Ülesanne 25. Ronija Ruudit langetatakse vertikaalse seina tipust maapinna suunas. See tähendab, et Ruudi on nööri ühe otsa külge kinni seotud, nöör läbib seina tipus olevat kindlat punkti ning nööri teine ots on Brigitta käes, kes seisab maapinnal ning laseb nööril kontrollitult oma käte vahelt läbi libiseda. Nöör on elastne: Ruudi kaalu tõttu venib pinge all olev nööri osa (see osa, mis jääb Brigitte käte ning Ruudi vahele) 20 %. Nööri keskpunkti on tehtud märge. Ruudi langetamise ajal kohtub ta märgistatud osaga punktis, kus ta on ühe kolmandiku kõrgusel kogu seina kõrgusest. Hetkel, mil Ruudi puudutab maad ja nöör pole veel pinge alt vabanenud, on Brigittel üle veel 10 meetrit nööri. Mis on seina kõrgus meetrites? (Jätame arvestamata inimeste pikkused ning sõlmedes kulutatud nööri.)

Vastus. 18

Lahendus. Olgu venimata nööri pikkus l ja seina kõrgus h. Kui Ruudi kohtub märkega, siis pool veninud nöörist katab Ruudi kauguse seina tipust kahekordselt, kust

$$\frac{6}{5} \cdot \frac{l}{2} = 2 \cdot \frac{2h}{3}.$$

Kui Ruudi puudutab maad, saame me sarnaselt

$$\frac{6}{5}(l - 10) = 2h,$$

kuhu peale esimesest võrrandist $l = \frac{20h}{9}$ sisse asendamist leiame me $h = 18$.

Ülesanne 26. Sahtlis on n sokki. Kui sahtlist tõmmatakse kaks sokki (neid sahtlisse tagasi panemata), siis tõenäosus, et mõlemad sokid on musta värvi, on 2/15. Mis on vähim võimalik arvu n väärtus?

Vastus. 10

Lahendus. Olgu b mustade sokkide arv. Siis tõenäosus, et mõlemad sokid on mustad, on $\frac{b}{n} \cdot \frac{b\;1}{n\;1}$. Kuna see avaldis on võrdne väärtusega $\frac{2}{15}$, saame me

$$15 \cdot b \cdot (b - 1) = 2 \cdot n \cdot (n - 1)$$

Kuna nii 3 kui 5 jagavad vasakut poolt ning on omavahel ühistegurita ning arvuga 2 ühistegurita, siis peavad nad jagama liiget $n \cdot (n - 1)$ võrrandi paremal pool. Nüüd proovime väikeseid arvude 3 ja 5 kordseid n väärtusena ning leiame, et $n = 6$ annab meile $15 \cdot b \cdot (b - 1) = 2 \cdot 6 \cdot 5 = 60$. Kuid võrrandit $b \cdot (b - 1) = 4$ ei lahenda ükski täisarv, seega $n = 6$ ei sobi. Kui $n = 10$, siis $b \cdot (b - 1) = 12$ on rahuldatud $b = 4$ poolt. Seega on otsitav n väärtus 10.

Ülesanne 27. Leia suurim täisarv, mis vastab järgnevatele tingimustele:

- arv on seitsmekohaline,
- arvu kõik numbrid on erinevad,
- arv on arvu 11 kordne.

Vastus. 9876504

Lahendus. Me kasutame üheteistkümnega jaguvuse tunnust: arv jagub üheteistkümnega parajasti siis, kui arvu paaritutel kohtadel olevate numbrite liitmisel ja sellest arvu paarisarvulistel kohtadel olevate numbrite lahutamisel saadud arv jagub üheteistkümnega.

Kõikide seitsmekohaliste arvude hulgas on suurimad need, mis algavad suurimate numbritega. Seega valime me esimeseks numbriks 9 ning jätkame. Peale 98765 kirjutamist märkame me, et "paaritu" hulga summa on $9 + 7 + 5 = 21$ ning "paaris" hulga summa on $8 + 6 = 14$. Nende vahe on 7 ja me tahame saada sellest üheteistkümnega jaguva arvu kasutades vaid kahte numbrit hulgast $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Ainus sobiv viis on lisada 0 "paaris" hulka ning 4 "paaritusse" hulka, mis annab vastuseks 9876504. Kuna kõik teised lahendid peaksid algama viie numbriga, mis annavad väiksema arvu kui 98765, siis on meie leitud arv maksimaalne.

Alternatiivne lahendus. Alustame suurima võimaliku seitsmekohalise paarikaupa eri numbritega arvuga 9876543. Märkame, et see arv ei jagu arvuga 11, kuid 9876537 jagub ning on suurim arvu 11 kordne, mis on väiksem kui arv, millega me alustasime. Kuna selle arvu numbrid ei ole paarikaupa erinevad, lahutame me taas arvu 11 ja kontrollime uue saadud arvu numbreid. Nii saame me

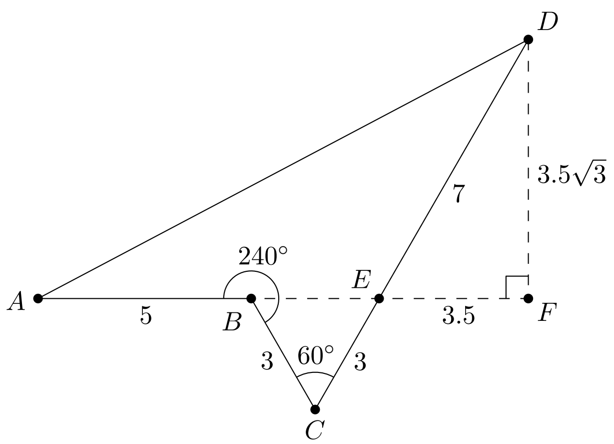
$$9876537 \longrightarrow 9876526 \longrightarrow 9876515 \longrightarrow 9876504$$

ja seega on vastuseks 9876504.

Ülesanne 28. Vaatleme nelinurka $ABCD$ küljepikkustega $AB = 5$, $BC = 3$ ja $CD = 10$. Tipu B juures asuva sisenurga suurus on 240 ning tipu C juures asuva sisenurga suurus on 60 . Leia külje AD pikkus.

Vastus. 13

Lahendus. Tekitame võrdkülgse kolmnurga BCE, kus punkt E asub lõigul CD. Siis AED on kolmnurk, kus $AE = 8$, $ED = 7$ ja $\backslash DEA = 120$. Seega koosinusteoreemist saame me $AD^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \cos 120 = 169$, kust $AD = 13$.



Alternatiivne lahendus ilma koosinusteoreemi kasutamata. Kui kolmnurka AED pikendada poolega võrdkülgsest kolmnurgast küljepikkusega 7 nagu joonisel, siis saame me Pythagorase teoreemist $AD^2 = (5+3+3.5)^2 + (3.5 \cdot \sqrt{3})^2 = 169$.

Ülesanne 29. Olgu a, b, c ja d positiivsed täisarvud. Mitu eri lahendit leidub võrrandil

$$2024 = (2 + a) \cdot (0 + b) \cdot (2 + c) \cdot (4 + d)?$$

Märkus: Antud võrrandi lahendiks on järjestatud nelik (a, b, c, d).

Vastus. 18

Lahendus. Esmalt leiame me arvu 2024 kanoonilise kuju, milleks on

$$2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23.$$

Kuna a, b, c ja d on positiivsed täisarvud, siis $2 + a \geq 3$, $2 + c \geq 3$ ja $4 + d \geq 5$. Tegur 1 või 2 võrrandi paremal pool saab esineda vaid ühe korra teguris $(0 + b)$ ning tegur 4 saab esineda vaid teguris $(2 + a)$ või $(2 + c)$.

Kuna võrrandi paremal pool asuv korrutis koosneb neljast tegurist, siis leidub täpselt neli arvu 2024 tegurdust, kus maksimaalselt üks tegur on väiksem kui 5, milleks on

$$2024 = 1 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 23 \quad \text{ja} \quad 2024 = 1 \cdot 4 \cdot 22 \cdot 23 \quad \text{ja} \quad 2024 = 1 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 46 \quad \text{ja} \quad 2024 = 2 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 23.$$

Esimeses tegurduses saame me $b = 1$ ja ülejäänud tegurid on $a + 2$, $c + 2$ ja $d + 4$ mingis järjekorras, kust me leiame 6 lahendust. Teises tegurduses saame me $b = 1$ ning seejärel kas $a+2 = 4$ või $c+2 = 4$. Kummaski juhus saame ülejäänud tegurid ära jagada kahel viisil, mis annab kokkuvõttes 4 lahendust sel juhul. Analoogselt saame me 4 lahendust nii kolmandas kui neljandas juhus. Kokkuvõttes on meil seega 18 eri lahendinelikut:

factorization of 2024	solution			
	a	b	c	d
$2024 = 8 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 23$	6	1	9	19
$2024 = 8 \cdot 1 \cdot 23 \cdot 11$	6	1	21	7
$2024 = 11 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 23$	9	1	6	19
$2024 = 11 \cdot 1 \cdot 23 \cdot 8$	9	1	21	4
$2024 = 23 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 11$	21	1	6	7
$2024 = 23 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 8$	21	1	9	4
$2024 = 4 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$	2	2	9	19
$2024 = 4 \cdot 2 \cdot 23 \cdot 11$	2	2	21	7
$2024 = 11 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 23$	9	2	2	19
$2024 = 23 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 11$	21	2	2	7
$2024 = 4 \cdot 1 \cdot 22 \cdot 23$	2	1	20	19
$2024 = 4 \cdot 1 \cdot 23 \cdot 22$	2	1	21	18
$2024 = 4 \cdot 1 \cdot 46 \cdot 11$	2	1	44	7
$2024 = 4 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 46$	2	1	9	42
$2024 = 22 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 23$	20	1	2	19
$2024 = 23 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 22$	21	1	2	18
$2024 = 46 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 11$	44	1	2	7
$2024 = 11 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 46$	9	1	2	42

Ülesanne 30. Olgu x ja y sellised positiivsed täisarvud, et

$$2^x \cdot 3^y = \left(24^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ \ +\frac{1}{60}}\right) \cdot \left(24^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ \ +\frac{1}{60}}\right)^2 \cdot \left(24^{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ \ +\frac{1}{60}}\right)^3 \cdots \left(24^{\frac{1}{60}}\right)^{59}.$$

Leia $x + y$ väärtus.

Vastus. 3540

Lahendus. Paneme meie võrrandi kirja kujul $2^x \cdot 3^y = 24^k$. Nüüd leiame

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{60} + \frac{2}{60} + \cdots + \frac{59}{60}\right) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \cdots + \frac{59}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+59) \cdot 59}{2} = \\ &= 15 \cdot 59. \end{aligned}$$

Seega $2^x \cdot 3^y = (2^3 \cdot 3^1)^{15\ 59}$, mistõttu $x = 3 \cdot 15 \cdot 59 = 45 \cdot 59$ ja $y = 15 \cdot 59$. Järelikult $x + y = 60 \cdot 59 = 3540$.

Ülesanne 31. Annele meeldivad õunad. Eriti meeldivad talle punastest ja rohelistest õuntest koosnevad õunajadad, milles on 18 õuna ning milles iga 12 järjestikuse õuna hulgas on vähemalt seitse rohelist õuna. Mitu sellist õunajada leidub, kus ei leidu rohkem kui kaheksat rohelist õuna?

Vastus. 21

Lahendus. Kui keskmised kuus õuna (ehk õunad 7–12) on kõik rohelised, siis tuleb esimese kuue ja viimase kuue õuna hulka lisada veel üks roheline õun, seega kaheksast rohelisest õunast piisab. Kui aga keskmise kuue õuna hulgast mõni roheline õun eemaldada, siis tuleks nii esimese kui viimase kuue õuna hulka lisada sama palju rohelisi õunu juurde, seega rohelisi õunu oleks kokku üle kaheksa. Seega 8 on vähim võimalik roheliste õunte arv ning kuus neist peavad olema jada keskel ning üks kummaski äärmises kuueses plokis.

Samas ei saa esimest ja viimast rohelist õuna paigutada juhuslikult. Et ülesande tingimust rahuldada, ei tohi nende asukohtade vahe olla suurem kui 12. Näiteks kui esimene roheline õun asub kohal 2, siis viimane saab asuda kohal 13 või 14. Seega sõltuvalt esimese rohelise õuna asukohast on viimase jaoks 1 kuni 6 võimalikku asukohta, kokku $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ võimalikku jada.

Ülesanne 32. Vambolal on münte väärtustega 1, 2 ja 5 senti. Tal on 33 ühesendist münti, 106 kahesendist münti ning 31 viiesendist münti. Ta tahab oma mündid jaotada kahte kuhja nii, et mõlemas kuhjas oleks sama palju münte ning mõlema kuhja koguväärtus oleks sama, ning anda üks kuhi oma õele. Mitmel eri viisil saab Vambola seda teha? Sama väärtusega münte me üksteisest ei erista.

Vastus. 12

Lahendus.

Olgu a, b, c vastavalt ühe- kahe- ja viiesendiste müntide arv õe kuhjas. Siis

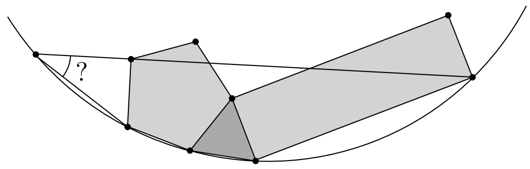
$$a + b + c = \frac{1}{2}(33 + 106 + 31) = 85,$$

ja

$$a + 2b + 5c = \frac{1}{2}(33 + 2 \cdot 106 + 5 \cdot 31) = 200.$$

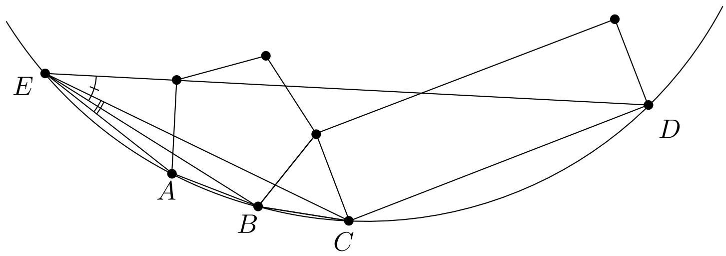
Lahutades teisest võrrandist esimese, saame $b + 4c = 115$. Sel võrrandil on lahend $b = 115 - 4c$ iga c jaoks. Kahesendiste müntide arvu tingimusest $0 < 115 - 4c < 106$ järeldub $c \in \{3, 4, \ldots, 28\}$. Et ka ühesendiseid münte oleks sobiv arv, peame lisama tingimuse $0 \leq 85 - (115 - 4c + c) = -30 + 3c \leq 33$. Siit näeme, et sobivad vaid $c \in \{10, 11, \ldots 21\}$. Seega on 12 sobivat võimalust.

Ülesanne 33. Joonisel on antud võrdkülgne kolmnurk, korrapärane viisnurk ning ristkülik nii, et mõned nende tipud asuvad ringjoonel (millest on näidatud vaid osa). Leia joonisel märgitud nurga suurus kraadides.



Vastus. 36

Lahendus. Meenutame, et kõõlnelinurgas on samale kõõlule erinevalt poolt toetuvate nurkade summa alati 180 .



Tähistades joonisel olulised punktid ning kasutades korrapäraste hulknurkade teadaolevaid nurki, saame

$$\backslash AEC = 180 - \backslash ABC = 180 - 60 - 108 = 12 .$$

Sarnaselt

$$\backslash BED = 180 - \backslash BCD = 180 - 60 - 90 = 30 .$$

Viimaks, kuna kolmnurk ABC on võrdhaarne, kehtib

$$\backslash BEC = \backslash BAC = \frac{180 - 108 - 60}{2} = 6$$

ja järelikult

$$\backslash AED = 12 + 30 - 6 = 36 .$$

Ülesanne 34. Mitmel eri viisil saab 9 malevankrit asetada 4×4 malelauale nii, et igat malevankrit ründab mõni teine malevanker? Kaks malevankrit ründavad teineteist parajasti siis, kui nad asuvad samas reas või veerus.

Vastus. 11296

Lahendus. Ilma lisatingimusteta on vankrite paigutamiseks $\binom{16}{9} = 11440$ võimalust. Et mingit vankrit ei ründaks ükski teine vanker, peab ta olema üksi nii oma reas kui veerus. Selle vankri paigutamiseks on $4 \cdot 4 = 16$ ning vastava rea ja veeru eemaldamisel on ülejäänud 8 vankri 9 ruudule paigutamiseks 9 võimalust. Seega on $16 \cdot 9 = 144$ paigutust, mis ei sobi ehk otsitav vastus on $11440 - 144 = 11296$.

Ülesanne 35. Leia suurim positiivne täisarv N, mis pole algarv ning mille kõik tegurid peale N enda on väiksemad kui 100.

Vastus. 9409

Lahendus. Kuna N ei ole algarv, siis tal leidub algtegur $p < N$. Tingimus $p < 100$ annab

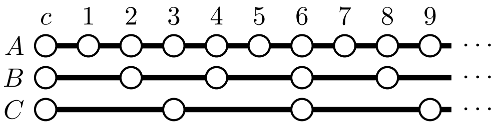
$$p \leq 97.$$

Paneme tähele, et $N = 97^2 = 9409$ rahuldab ülesande tingimusi.

Oletame, et sobiks ka mingi $N^0 > 9409$. Tema mistahes algteguri $p \leq 97$ korral on jagatis $\frac{N^0}{p}$ suurem kui 97. Seega $\frac{N^0}{p} \in \{98, 99\}$, sest tegemist on ka arvu N^0 jagajaga, mis peab olema väiksem kui 100. Kuid siis arvul N^0 leidub ka algtegur $k \in \{2, 3\}$ ning tegur $\frac{N^0}{k} > \frac{9409}{3} > 100$ annab vastuolu ülesande tingimusega.

Seega $N = 9409$ on otsitav arv.

Ülesanne 36. Joonlinnas on kolm bussiliini, suur bussijaam ning bussipeatused, mis on nummerdatud positiivsete täisarvudega $1, 2, 3, \ldots$. Kõik kolm bussiliini alustavad reisi bussijaamast (joonisel tähistatud kui c) ning läbivad seejärel oma peatused arvude poolest kasvavas järjekorras. Liin A peatub igas bussipeatuses (numbritega $1, 2, 3, \ldots$), liin B peatub igas teises peatuses (numbritega $2, 4, 6, \ldots$) ja liin C peatub igas kolmandas peatuses (numbritega $3, 6, 9, \ldots$). Üllar alustab oma reisi bussijaamast, valib bussi, ning tahab sõita peatusesse number 17. Igas peatuses, kus buss, millel Üllar hetkel on, peatub, võib ta bussi pealt maha tulla ning mõne teise bussiga edasi sõita. Mitmel eri viisil saab Üllar oma teekonda planeerida? (Teekonnad, mis erinevad vaid selle poolest, kui kaua Üllar mingis peatuses bussi ootab, loeme me samaks.)



Vastus. 845

Lahendus. Tähistagu s_0 peatust, kus peatuvad kõik kolm liini ning s_k olgu k. peatus pärast peatust s_0. Esmalt leiame, mitmel viisil on võimalik reisida peatusesse s_6 peatusest s_0.

1. Peatusesse s_1 saab jõuda ainult ühel viisil mööda liini A.
2. Peatusesse s_2 saab jõuda liiniga A peatusest s_1 või liiniga B peatusest s_0, kokku kaks võimalust.
3. Peatusesse s_3 saab jõuda liiniga C peatusest s_0 või liiniga A peatusest s_2, kuhu omakorda oli võimalik jõuda 2 viisil; kokku 3 võimalust.
4. Peatusesse s_4 saab jõuda liiniga A peatusest s_3 või liiniga B peatusest s_2, kokku $3 + 2 = 5$ võimalust.
5. Peatusesse s_5 saab jõuda ainult liiniga A peatusest s_4, seega on 5 võimalust.
6. Peatusesse s_6 saab jõuda liiniga A peatusest s_5, liiniga B peatusest s_4 või liiniga C peatusest s_3, kokku $3+5+5 = 13$ võimalust.

Peatuseks s_0 sobivad peatused $c, 6, 12$. Seega Üllar reisib kaks korda peatusest s_0 peatusesse s_6 ja siis peatusest s_0 peatusesse s_5. Selleks on kokku $5 \cdot 13 \cdot 13 = 845$ võimalust.

Alternatiivlahendus. Viitame peatustele numbritega, olgu $c = 0$. Olgu $J(s)$ võimaluste arv peatusesse s jõudmiseks. Igasse peatusesse s on võimalik jõuda peatusest $s - 1$ liiniga A. Kui s on paarisarv, on võimalik jõuda sinna ka peatusest $s - 2$ liiniga B. Kui s jagub kolmega, on võimalik sinna jõuda ka peatusest $s - 3$ liiniga c. Kokku saame

$$\begin{aligned} J(s) = J(s-1) & \\ & + J(s-2) \text{ kui } s \text{ jagub arvuga } 2 \\ & + J(s-3) \text{ kui } s \text{ jagub arvuga } 3. \end{aligned}$$

Ilmselgelt $J(0) = 1$, seega me saame arvutada $J(17)$ sammhaaval, nagu on näha järgmisest tabelist.

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$J(s)$	1	1	2	3	5	5	13	13	26	39	65	65	169	169	338	507	845	845

Ülesanne 37. Tähistusega $\lfloor x \rfloor$ tähistame me suurimat täisarvu, mis pole suurem reaalarvust x. Olgu $a_1, a_2, \ldots$ reaalarvude jada, kus $a_1 = \sqrt{3}$ ja iga $n \geq 1$ korral kehtib

$$a_{n+1} = \lfloor a_n \rfloor + \frac{1}{a_n - \lfloor a_n \rfloor}.$$

Mis on a_{2024} väärtus?

Vastus. $3034 + \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 3035 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

Lahendus. Arvu a_1 murdosa on $a_1 - \lfloor a_1 \rfloor = \sqrt{3} - 1$. Seega saame kirjutada $a_1 = 1 + \sqrt{3} - 1$. Arvutame jada esimesi liikmeid:

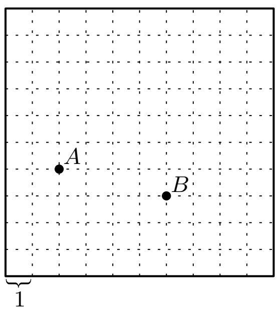
$$\begin{aligned}
a_2 &= 1 + \frac{1}{\sqrt{3}-1} = 1 + \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 2 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \\
a_3 &= 2 + \frac{2}{\sqrt{3}-1} = 2 + \frac{2\sqrt{3}+2}{2} = 2 + \sqrt{3} + 1 = 3 + 1 + \sqrt{3} - 1, \\
a_4 &= 4 + \frac{1}{\sqrt{3}-1} = 4 + \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 3 + 2 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}.
\end{aligned}$$

Paneme tähele, et arvudel a_1 ja a_3 on sama murdosa $\sqrt{3} - 1$ ning nende vahe on $a_3 - a_1 = 3$. Sarnaselt arvudel a_2 ja a_4 on sama murdosa $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ja nende vahe on $a_4 - a_2 = 3$. Seega oletame, et $a_{2k+1} = 3k + 1 + \sqrt{3} - 1$ ja $a_{2k+2} = 3k + 2 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}$, kus $k = 0, 1, \ldots$. Väide kehtib juhtudel $k = 1$ ja $k = 2$, ülejäänud juhtude jaoks kasutame induktsiooni. Rakendades definitsiooni $a_{n+1} = \lfloor a_n \rfloor + \frac{1}{a_n - \lfloor a_n \rfloor}$, näeme, et

$$\begin{aligned}
a_{2k+2} &= \lfloor a_{2k+1} \rfloor + \frac{1}{a_{2k+1} - \lfloor a_{2k+1} \rfloor} = 3k + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}-1} = 3k + 1 + \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 3k + 2 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \\
a_{2\cdot(k+1)+1} &= \lfloor a_{2k+2} \rfloor + \frac{1}{a_{2k+2} - \lfloor a_{2k+2} \rfloor} = 3k + 2 + \frac{2}{\sqrt{3}-1} = 3k + 2 + \frac{2 \cdot (\sqrt{3}+1)}{2} = 3 \cdot (k+1) + 1 + \sqrt{3} - 1.
\end{aligned}$$

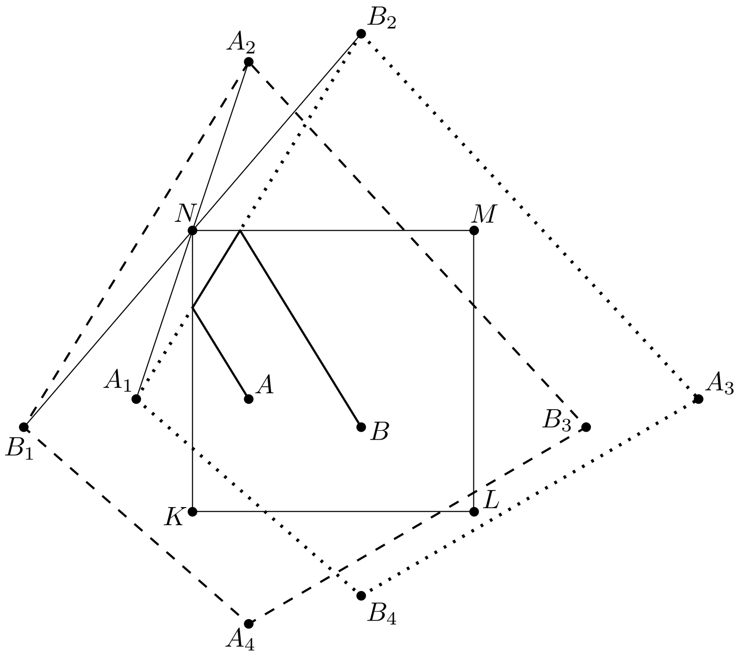
Seega $a_{2024} = 3034 + \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 3035 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Ülesanne 38. Ruudukujulisel piljardilaual mõõtmetega 10×10 on kaks palli, nagu juuresoleval joonisel näidatud. Iga pall on punkt, liigub alati sirgjoonelises trajektooris ning põrkub igast seinast tagasi sama nurga all, millega ta seina tabas. Vaatleme kõiki trajektoore, milles pall A põrkab esmalt vastu täpselt kahte seina ning seejärel põrkub palliga B. Leia nende trajektooride pikkuste ruutude summa.



Vastus. 2520

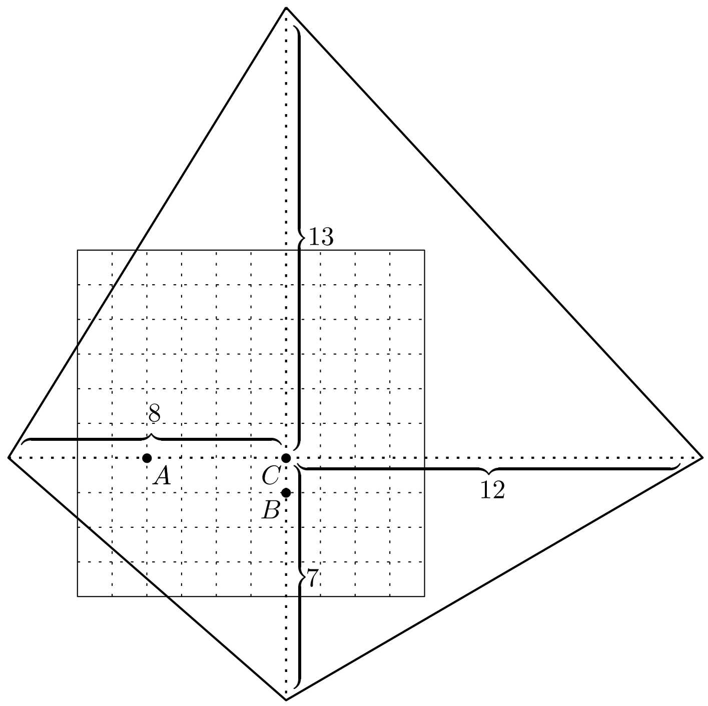
Lahendus. Tähistame alumise vasaku nurga suhtes $A = [2, 4]$ ja $B = [6, 3]$. Peegeldame punktid A ja B üle kõigi ruudu külgede ja tähistame punktid nii, nagu järgneval joonisel.



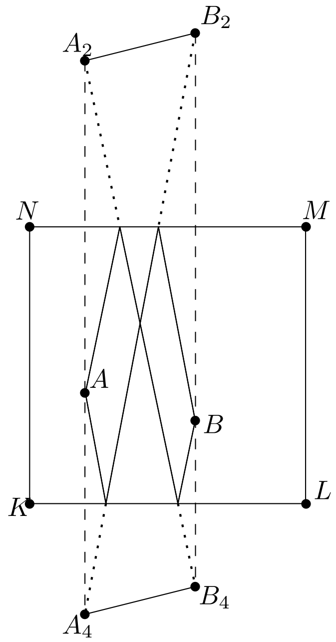
Paneme tähele, et teekond punktist A punkti B, mis sisaldab põrkeid vastu külgi KN ja MN, on samaväärne teekonnaga A_1B_2 tänu võrdsetele nurkadele, mis tekivad nii punkti peegeldamisel kui palli põrkamisel. Samuti paneme tähele, et ei ole võimalik põrgata kõigepealt vastu külge MN ja siis KN, sest see vastaks teekonnale A_2B_1, mis ei läbi algset ruutu.

Seega on kõik trajektoorid, mis sisaldavad kahte põrget ruudu lähisküldedel, kas nelinurga $A_1B_2A_3B_4$ või $B_1A_2B_3A_4$ küljed. Paneme tähele, et need nelinurgad on võrdsed ning igast võrdsete külgede paarist täpselt üks läbib ruutu ehk on sobiv trajektoor. Seega meil on vaja leida nelinurga $A_1B_2A_3B_4$ külgede ruutude summa. Kasutades Pythagorase teoreemi ning nelinurga diagonaalide ristumist punktis $C = [6, 4]$ (vt joonist), saame, et

$$2(8^2 + 13^2 + 12^2 + 7^2) = 852.$$



Trajektoorid, mis sisaldavad põrkeid ruudu vastasküldedel, on rööpkülikute $A_2B_2B_4A_4$ ja $A_1A_3B_3B_1$ diagonaalid (vt joonist).



Et need rööpkülikud on võrdsed ja diagonaalide ruutude summa on võrdne külgede ruutude summaga, saame, et nende teekondade ruutude summa on

$$2(20^2 + 1^2 + 4^2) = 834.$$

Seega otsitav summa on

$$852 + 2 \cdot 834 = 2520.$$

Ülesanne 39. Tähistagu $x \parallel y$ kahe positiivse täisarvu konkatenatsiooni ehk teisisõnu arvu, mis me saame, kui kirjutame teise arvu esimese arvu järele (näiteks $3 \parallel 4 = 34$, $24 \parallel 5 = 245$, ja $20 \parallel 24 = 2024$). Positiivne täisarv n on *kolmjaguv*, kui leiduvad kolm paarikaupa erinevat postiivset täisarvu (millest ükski ei alga nulliga) a, b ja c nii, et $n = a \parallel b \parallel c$ ning a jagab arvu b ja b jagab arvu c. Mis on suurim viiekohaline kolmjaguv arv?

Vastus. 94590

Lahendus. Kuna a, b, c on erinevad, saame jaguvuse tingimusest $2 \cdot a \leq b$ ja $2 \cdot b \leq c$. Tähistagu $s(k)$ arvu k numbrite arvu. Jaguvuse tingimusest järeldub, et jada $s(a)$, $s(b)$, $s(c)$ on mittekahanev. Seega on kaks võimalust:

1. $s(a) = 1$, $s(b) = 1$, $s(c) = 3$. Siis a on maksimaalselt $4 < \frac{9}{2}$. Suurima sobiva arvu saame juhu $a = 4$, $b = 8$, $c = 992$.

2. $s(a) = 1$, $s(b) = 2$, $s(c) = 2$. Siis b on maksimaalselt $49 < \frac{99}{2}$. Et maksimeerida arvu $a \parallel b \parallel c$, võtame $a = 9$. Siis maksimaalne b on $b = 45$ ning $c = 90$.

Seega otsitav arv on 94590.

Ülesanne 40. Tähistagu n_x numbrite järjendi n väärtust arvuna alusel x, näiteks kehtib võrduste ahel $242_7 = 2 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7 + 2 = 128_{10} = 10000000_2$. Leia kõikide täisarvude $x > 5$ summa, mille korral kehtib väide "15_x jagab arvu 2024_x jääki jätmata".

Vastus. 471

Lahendus. Otsime arve x nii, et murru $\frac{2x^3+2x+4}{x+5}$ väärtus oleks täisarv. Kuna

$$\frac{2x^3 + 2x + 4}{x + 5} = 2x^2 - 10x + 52 - \frac{256}{x + 5},$$

siis on vaja, et $x + 5$ jagaks arvu $256 = 2^8$. Kuna $x > 5$, siis $x + 5 > 10$. Sobivad jagajad on 16, 32, 64, 128, 256. Otsitav summa on seega

$$\sum_{i=4}^{8}(2^i - 5) = 2^9 - 2^4 - 25 = 512 - 16 - 25 = 471.$$

Ülesanne 41. Antud on kaks kasti. Esimeses kastis on viis töökorras lambipirni ning üheksa katkist lambipirni, ning teises kastis on üheksa töökorras ning viis katkist lambipirni. Töökorras lambipirnid töötavad alati, kuid katkised lambipirnid töötavad tõenäousega p (siin $0 < p < 1$), kus see tõenäosus on iga katkise lambipirni jaoks sama. Leia p väärtus, mille korral järgneval kahel sündmusel on sama tõenäosus:

1. Suvaliselt valitud lambipirn esimesest kastist töötab.
2. Kaks suvaliselt valitud lambipirni teisest kastist mõlemad töötavad.

Vastus. 7/20

Lahendus. Esimese sündmuse tõenäosus on

$$P_1 = \frac{1}{14}(5 + 9p)$$

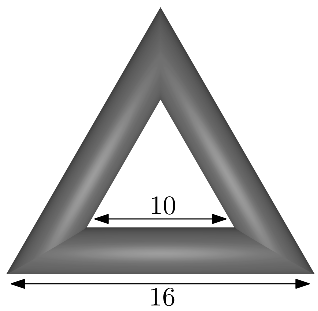
ja teise sündmuse tõenäosus on

$$P_2 = \frac{1}{\binom{14}{2}} \left(\binom{9}{2} + 9 \cdot 5p + \binom{5}{2} p^2 \right).$$

Meil on vaja lahendada võrrand $P_1 = P_2$, mis on ruutvõrrand, mida võib lahendada lahendivalemi abil. Alternatiivselt võime märgata, et $p = 1$ on kindlasti lahendiks, seega võime teise lahendi leida Viète'i valemite abil: Ruutvõrrandi $a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) = 0$ vabaliige on $a \cdot r_1 \cdot r_2$, kus r_1, r_2 on võrrandi lahendid ja a on ruutliikme kordaja. Seega teine lahend on

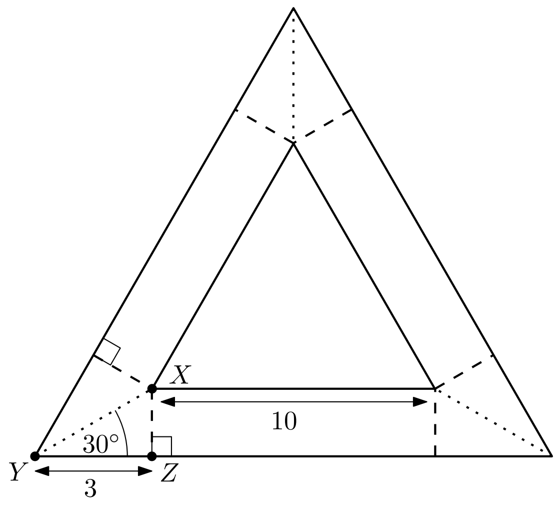
$$\frac{\frac{\binom{9}{2}}{\binom{14}{2}} - \frac{5}{14}}{\frac{\binom{5}{2}}{\binom{14}{2}}} = \frac{7}{20}.$$

Ülesanne 42. Leia pildil näidatud keha ruumala. Keha on moodustatud kolmest identsest algselt silindrilisest torust, mida kõiki on samamoodi lõigatud. Silindrite keskteljed moodustavad võrdkülgse kolmnurga, ning sise- ning väliskontuuride (mis on samuti võrdkülgsed kolmnurgad) pikkused on antud.



Vastus. $\frac{117}{4}$

Lahendus. Koostame järgmise joonise, märgime punktid X, Y, Z ja tõmbame ristuvad lõigud XZ ja YZ.



Võrdkülgsete kolmnurkade sümmeetriast saame $|YZ| = 3$ ja $|\angle ZYX| = 30^\circ$, järelikult $|XZ| = \sqrt{3}$. Punkt- ja kriipsjoontega keha osadeks lõigates saame kolm silindrit põhja raadiusega $\frac{|XZ|}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ja kõrgusega 10 ning kuus väiksemat tükki, mille saab panna kokku kolmeks silindriks sama raadiusega ja kõrgusega 3. Otsitav ruumala on seega

$$V = \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 (3 \cdot 10 + 3 \cdot 3) = \frac{117\pi}{4}.$$

Ülesanne 43. Kümme paarikaupa erinevat positiivset täisarvu on kirja pandud ühte ritta nii, et

- iga kahe järjestikuse arvu summa jagub arvuga 3,
- iga kolme järjestikuse arvu summa jagub arvuga 2.

Mis on nende kümne arvu vähim võimalik summa?

Vastus. 78

Lahendus. Optimaalne jada on näiteks $2, 1, 5, 4, 11, 7, 8, 13, 17, 10$, mille summa on 78.

Kui reas leidub kolmega jaguv arv, siis ka tema naabrid peavad jaguma kolmega, seega kõik arvud peavad jaguma kolmega. Seega minimaalne võimalik summa on $3 \cdot (1 + 2 + \cdots + 10) = 3 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 165 > 78$, mis ei saa olla optimaalne.

Et iga kolme järjestikuse arvu summa oleks paarisarv, peab nende hulgas olema kas kolm paarisarvu või üks paaris- ja kaks paaritut arvu. Kui leidub üks kolmik x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, kus on kolm paarisarvu, siis ka kolmikus x_{i-1}, x_i, x_{i+1} peab olema vähemalt kaks (ehk kolm) paarisarvu. Nii näeme, et kõik arvud on paaris, seega nende summa on vähemalt $2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 110 > 78$, mis ei saa olla optimaalne.

Seega on igas kolmikus kaks paaritut arvu (O) ja üks paarisarv (E). On kolm võimalikku paigutust:

- OEOOEOOEOO – Liites kokku 7 vähimat paaritut arvu ja 3 vähimat paarisarvu, mis ei jagu kolmega, saame $1 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 2 + 4 + 8 = 87 > 78$, mis ei saa olla optimaalne.
- OOEOOEOOEO – Sümmeetriline eelmise juhuga.
- EOOEOOEOOE – Liites kokku 6 vähimat paaritut arvu ja 4 vähimat paarisarvu, mis ei jagu kolmega, saame $1 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 2 + 4 + 8 + 10 = 78$, mis ongi otsitav vastus.

Ülesanne 44. Sophia mängib murdudega. Ta tahab leida positiivseid täisarve a, b, mis rahuldavad tingimusi

$$\frac{2020}{2024} < \frac{a^2}{b} < \frac{999}{1000}$$

nii, et $a + b$ on vähim võimalik. Mis on Sophia otsitud minimaalne $a + b$ väärtus?

Vastus. 553

Lahendus. Ülesande tingimus on samaväärne tingimusega

$$\frac{1000}{999} < \frac{b}{a^2} < \frac{2024}{2020}.$$

Seega Sophia tahab valida vähima a, mille jaoks leidub positiivne täisarv b, nii et

$$\frac{1000}{999} \cdot a^2 < b < \frac{2024}{2020} \cdot a^2 \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 + \frac{1}{999} \cdot a^2 < b < a^2 + \frac{4}{2020} \cdot a^2.$$

Kui $a < 32$, siis $a^2 < a^2 + \frac{a^2}{999} < a^2 + 1$. Seega kui leidub arve $a < 32$, nii et $\frac{4a^2}{2020} > 1$, siis piisab võtta sellistest arvudest a vähim. Paneme tähele, et

$$\frac{4 \cdot 22^2}{2020} = \frac{44^2}{2020} = \frac{1936}{2020} < 1 \quad \text{ja} \quad \frac{4 \cdot 23^2}{2020} = \frac{46^2}{2020} = \frac{2116}{2020} > 1.$$

Seega $a = 23$ ja $b = a^2 + 1 = 530$ rahuldavad ülesande tingimusi ning vastus on $a + b = 23 + 530 = 553$.

Ülesanne 45. Telgi põhi on kolmnurk küljepikkustega 1.3, 2 ja 2.1 meetrit. Tootja tahab reklaamida, et inimene pikkusega h mahub telki mis iganes pidi, ehk et telgi põranda iga punkti jaoks leidub magamisasend läbi selle punkti, ehk lõik pikkusega vähemalt h, mis jääb täielikult kolmnurga piiridesse. Mis on h maksimaalne võimalik väärtus meetrites?

Vastus. $\frac{126}{65}$

Lahendus. Väidame, et otsitav pikkus on kolmnurga pikima kõrguse pikkus. Tõepoolest, tõmmates sellele kõrgusele vastavast tipust kõikvõimalikud lõigud vastasküljeni, on selge, et kõrgus on neist lühim, seega läbi iga kolmnurga punkti saab tõmmata lõigu, mille pikkus on võrdne pikima kõrguse pikkusega. Näitamaks, et pikemat sobivat lõiku ei leidu, mõtleme selle kõrguse aluspunkti peale. Pikim lõik läbi selle punkti on kas vastav kõrgus või külg, millel uuritav punkt asub. Kolmnurga pindala valemist näeme, et pikim kõrgus vastab lühimale küljele. Seega, kui pikim kõrgus on pikem kui 1.3 meetrit, siis selle kõrguse pikkus ongi otsitav vastus.

Selle kõrguse pikkuse leidmiseks korrutame kõik pikkused esialgu kümnega (ehk arvutame ajutiselt detsimeetrites). Olgu $x, 13-x$ osad, milleks kõrgus jaotab külje pikkusega 13. Siis saame Pythagorase teoreemist

$$\begin{aligned} 20^2 - x^2 &= 21^2 - (13-x)^2, && (1)\\ 26x &= 128, && (2)\\ x &= \frac{64}{13}. && (3) \end{aligned}$$

Seega kõrguse pikkus on

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{20^2 - \left(\frac{64}{13}\right)^2}, && (4)\\ &= \frac{4}{13}\sqrt{25 \cdot 169 - 256}, && (5)\\ &= \frac{4}{13}\sqrt{9 \cdot 9 \cdot 49}, && (6)\\ &= \frac{252}{13}. && (7) \end{aligned}$$

Kuna $\frac{252}{13} > 13$, siis kõrgus tõesti on pikem kui vastav külg. Ülesande vastus meetrites on seega $\frac{252}{130} = \frac{126}{65}$.

Ülesanne 46. Leia suurim positiivne täisarv q nii, et iga täisarvu $n \geq 55$ korral jagab arv q korrutist

$$n(n+4)(n-23)(n-54)(n+63).$$

Vastus. 40

Lahendus. Olgu korrutis A. Vaadeldes arvu A mooduli 5 järgi, näeme, et tegurid on vastavalt n, $n+4$, $n+2$, $n+1$ ja $n+3$. Vähemalt üks neist on $0 \pmod 5$, seega $5 \mid A$. Kui n on paaris, siis korrutises leidub vähemalt kolm paarisarvu, seega $8 \mid A$. Kui n on paaritu, siis tegurid $n-23$ ja $n+63$ on paarisarvud vahega 86. Kuna $86 \equiv 2 \pmod 4$, siis üks paarisarvulistest teguritest jagub neljaga, seega $8 \mid A$. Järelikult ka $40 \mid A$.

Võttes näiteks $n = 59$, näeme, et suurimad kahe ja viie astmed, mis arvu A jagavad, on vastavalt 8 ja 5. Võttes $n = 55$, saame $3 \nmid A$. Viimaks, iga algarvu $p > 5$ korral kuuluvad korrutise A tegurid ülimalt $5 < p$ jäägiklassi mooduli p järgi, seega on alati võimalik n valida nii, et $p \nmid A$.

Järelikult $q = 40$.

Ülesanne 47. Adam, Bea, Charles, Daniel ja Erik osalevad kahel kursusel. Adam ja Bea osalevad ainult esimesel kursusel, Charles ja Erik osalevad ainult teisel kursusel ning Daniel osaleb mõlemal kursusel. Roberta teab, et mõlemal kursusel osaleb kolm tudengit, kuid ta ei tea, millised kolm. Seetõttu palub ta kõigil näidata näpuga juhuslikult ühe tudengi poole, kes nendega samal kursusel osaleb (näiteks Daniel valib ühe ülejäänud neljast tudengist, igaühe tõenäosusega $\frac{1}{4}$). Mis on tõenäosus, et Roberta suudab välja nuputada, et Daniel on see, kes osaleb mõlemal kursusel?

Vastus. $\frac{3}{4}$

Lahendus. Ütleme, et kaks tudengit on *ühendatud*, kui vähemalt üks neist näitab näpuga teise suunas.

Tõestame, et Roberta suudab õige vastuseni jõuda parajasti siis, kui Daniel on ühendatud vähemalt ühe tudengiga mõlemalt kursuselt. Juhul kui Daniel on ühendatud rohkem kui kahe tudengiga, on vastus ilmselge, sest kellelgi teisel ei ole nii palju kursusekaaslasi. Vastasel juhul on ta ühendatud täpselt ühe tudengiga mõlemalt kursuselt.

Olgu üldisust kitsendamata ühendused Adam – Daniel ja Charles – Daniel. Kuna Bea ei ole *ühendatud* Danieliga, siis ta näitab Adami suunas. Samamoodi näitab Erik Charlesi suunas. Seega leidub ühenduste ahel Bea – Adam – Daniel – Charles – Erik, kust järeldub, et Daniel saab ainsana osaleda mõlemal kursusel.

Teisalt, kui Danielil puudub ühendus ühe kursuse ülejäänud osalejatega, siis pole teda võimalik teda eristada ülejäänud teise kursuse osalejatest. Nüüd saame leida otsitava tõenäosuse.

1. Oletame, et Adam ja Bea näitavad teineteise suunas, aga Charles ja Erik mitte. Esimese sündmuse tõenäosus on $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ja teise sündmuse tõenäosus $\left(1 - \frac{1}{4}\right)$. Sellisel juhul suudab Roberta vastuse välja nuputada, kui Daniel näitab kas Adami või Bea suunas, mille tõenäosus on $\left(\frac{2}{4}\right)$. Sama tõenäosus kehtib ka siis, kui Charles ja Erik näitavad teineteise suunas, aga Adam ja Bea mitte.
2. Kui Adami kui Bea hulgast üks näitab Danieli suunas $\left(1 - \frac{1}{4}\right)$ ning sama kehtib ka Charlesi ja Eriku kohta $\left(1 - \frac{1}{4}\right)$, siis pole vahet, kuhu Daniel näitab.

Liites tõenäosused kokku, saame et vastus on

$$\frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{2}{4} + \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{32} + \frac{3}{32} + \frac{9}{16} = \frac{3}{4}.$$

Ülesanne 48. Funktsioon $f\colon \mathsf{R}_{\ 0} \to \mathsf{R}_{\ 0}$ rahuldab tingimusi

1. $f(x) = x^2$, kui $0 \leq x < 1$ ja
2. $f(x+1) = f(x) + x + 1$ kõikide mittenegatiivsete reaalarvude x jaoks.

Leia kõik sellised x väärtused, mille korral $f(x) = 482$.

Vastus. $15 + 11 \cdot \sqrt{2} = 15 + \sqrt{242}$

Lahendus. Olgu $\{x\}$ arvu x murdosa. Siis

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\lfloor x \rfloor + \{x\}) \\ &= \lfloor x \rfloor + \{x\} + f(\lfloor x \rfloor - 1 + \{x\}) = \cdots \\ &= \sum_{i=1}^{bxc} i + \lfloor x \rfloor \cdot \{x\} + f(\{x\}) \\ &= \frac{\lfloor x \rfloor \cdot (\lfloor x \rfloor + 1)}{2} + \lfloor x \rfloor \cdot \{x\} + \{x\}^2. \end{aligned}$$

Näitame, et f on rangelt kasvav. Kui $x, y \in [n, n+1)$, nii et $x < y$, siis järeldub funktsiooni f definitsioonist, et $f(x) < f(y)$. Teisalt näeme, et iga $x \in [n, n+1)$ jaoks kehtib $f(x) < f(n+1)$, sest

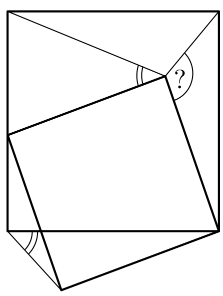
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\lfloor x \rfloor \cdot (\lfloor x \rfloor + 1)}{2} + \lfloor x \rfloor \cdot \{x\} + \{x\}^2 \\ &< \frac{\lfloor x \rfloor \cdot (\lfloor x \rfloor + 1)}{2} + \lfloor x \rfloor + 1 \\ &= \frac{(\lfloor x \rfloor + 2) \cdot (\lfloor x \rfloor + 1)}{2} \\ &= \frac{(n+2) \cdot (n+1)}{2} \\ &= f(n+1). \end{aligned}$$

Seega leidub võrrandil maksimaalselt üks lahend. Esmalt leiame, et suurim täisarv n, mis rahuldab tingimust $\frac{n^2+n}{2} \leq 482$, on $n = 30$. Seega $\lfloor x \rfloor = 30$. Järelikult

$$482 = f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor \cdot (\lfloor x \rfloor + 1)}{2} + \lfloor x \rfloor \cdot \{x\} + \{x\}^2 = 15 \cdot 31 + 30 \cdot \{x\} + \{x\}^2.$$

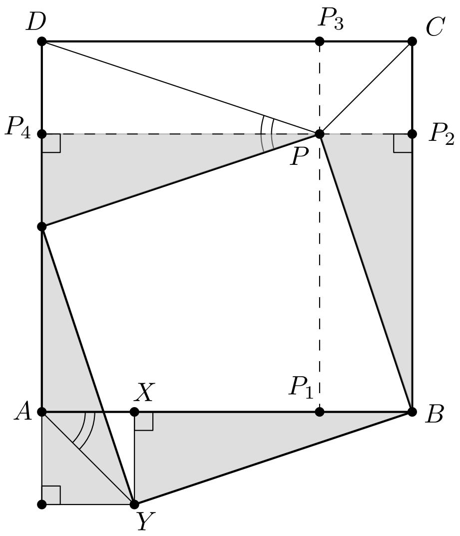
Selle ruutvõrrandi lahendamisel saame $\{x\} = -15 + \sqrt{242}$, mis on tõepoolest arvude 0 ja 1 vahel. Seega ainus lahend on $x = 30 - 15 + \sqrt{242} = 15 + 11\sqrt{2}$.

Ülesanne 49. Pildil on kaks ruutu ning üks paar võrdse suurusega märgitud nurki. Leia küsitava nurga suurus kraadides.



Vastus. 112.5

Lahendus. Lisame mõned lõigud ja punktid nii nagu alloleval joonisel.



Neli tähistatud kolmnurka on kõik täisnurksed kolmnurgad, mille hüpotenuus on väiksema ruudu külg ning üks nurk on α, mille võrra on ühte ruutu teise suhtes pööratud. Järelikult ristkülik P_4PP_3D koosneb samuti kahest sellisest kolmnurgast. See tähendab, et esialgsel joonisel märgitud nurgad on 2α. Samuti näeme tänu võrdsetele kolmnurkadele, et täisnurksed kolmnurgad AXY ja PP_2C on võrdhaarsed, mistõttu $2\alpha = 45$ ning otsitav nurk on

$$90 \; - \alpha + 45 \; = 112.5 \; .$$

Ülesanne 50. Mats tüdines ära arvude liitmisest ja korrutamisest ning leiutas enda tehte, *matsutamise*. Matsutamist tähistame me avaldisega $a \star b$, see on defineeritud reaalarvudel ning rahuldab järgnevaid tingimusi:

1. $(a + b) \star c = (a \star c) + (b \star c)$,
2. $a \star (b + c) = (a \star b) \star c$.

Kui on teada, et $3 \star 2 = 54$, siis leia $5 \star 4$.

Vastus. 1620

Lahendus. Teine tingimus annab $5 \star 4 = (5 \star 2) \star 2$. Tähistades $f(x) = x \star 2$, seisneb ülesanne arvu $f(f(5))$ leidmises, teades et $f(3) = 54$.

Esimene tingimus annab $f(a+b) = f(a) + f(b)$. Seega $54 = f(3) = f(1) + f(2) = f(1) + f(1) + f(1)$, kust $f(1) = 18$. Induktsiooni abil näeme, et $f(n) = 18n$ iga positiivse täisarvu n korral. Seega $f(5) = 18 \cdot 5$ ja $f(f(5)) = 18^2 \cdot 5 = 1620$.

Märkus: Selline tehe tõesti leidub, näiteks sobib $x \star y = x(3\sqrt{2})^y$.

Ülesanne 51. Marek värvis 10×11 ruudustiku ruudud mustaks ja valgeks nii, et ühelgi ruudul ei olnud rohkem kui ühte sama värvi naaberruutu. Kui mitmel viisil võis ta seda teha? Malelauad, mis on üksteisega sarnased alles pärast ühe pööramist, loeme erinevateks.

Vastus. 464

Lahendus. Alati, kui leiduvad kaks sama värvi ruutu teineteise kohal, siis nende kõrval on kaks teist värvi ruutu, omakorda nende kõrval kaks esimest värvi ruutu jne. Sellega on kaks rida üheselt määratud. Alternatiivselt võib ridu ükshaaval täita vaheldumisi mustade ja valgete ruutudega. Tähistades n rea doominote ja ruutudega täitmise võimaluste arvu $f(n)$-ga, näeme, et $f(0) = f(1) = 1$ ja $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$, mistõttu $f(n)$ on n. Fibonacci arv.

Alternatiivselt võime doominote ja ruutudega täita kõik veerud. Samas oleme nüüd lugenud topelt võimalusi täita kogu ruudustik nö malelaua kombel. Viimaks paneme tähele, et iga ruudustiku täitmise korral võime ülemise vasaku nurgaruudu värvida nii mustaks kui valgeks ning see määrab üheselt ülejäänud ruutude värvid.

Seega on sobivaid võimalusi $2 \cdot (f(11) + f(10) - 1) = 2 \cdot (144 + 89 - 1) = 464$.

Ülesanne 52. Helena võttis oma lemmikjada, Fibonacci jada $\{F_k\}_{k=0}^{\infty}$, mis rahuldab tingimusi $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $F_0 = 0$ ja $F_1 = 1$, ning lõi uue jada $\{m_k\}_{k=6}^{2024}$, mis on defineeritud kui $m_k = \frac{F_k + F_{k-1} + \cdots + F_{k-6}}{7}$. Mitu jada $\{m_k\}_{k=6}^{2024}$ liiget on täisarvud?

Vastus. 252

Lahendus. Meenutame, et $\sum_{i=0}^{k} F_i = F_{k+2} - 1$. Seda saab tõestada induktsiooni abil: juhul $k = 0$ kehtib $\sum_{i=0}^{0} F_i = F_0 = 0 = 1 - 1 = F_2 - 1$ ning induktsiooni samm järeldub sellest, et $\sum_{i=0}^{k+1} F_i = F_{k+1} + \sum_{i=0}^{k} F_i = F_{k+1} + F_{k+2} - 1 = F_{k+3} - 1$. Seega

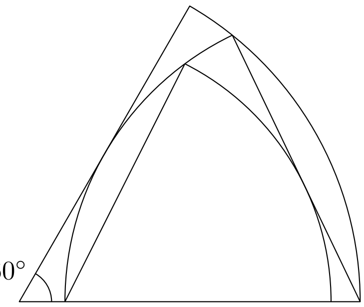
$$F_k + F_{k-1} + \cdots + F_{k-6} = \sum_{i=0}^{k} F_i - \sum_{i=0}^{k-7} F_i = F_{k+2} - F_{k-5} = 7 \cdot m_k.$$

Olgu d_l arvu F_l jääk seitsmega jagamisel. Ilmselgelt $d_l \equiv d_{l-1} + d_{l-2} \pmod 7$, seega

$$d_l = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 1, 6, 0, 6, 6, 5, 4, 2, 6, 1, 0, 1, 1, \ldots).$$

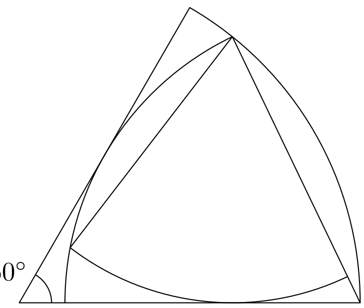
Järelikult d_l on perioodiline perioodiga 16. Paneme tähele, et $d_{l+2} \equiv d_{l-5} \pmod 7$, kui $l \equiv 4, 12 \pmod{16}$. Kuna $6 \leq l \leq 2024$ ja $2024 = 126 \cdot 16 + 8$, siis sobivad $l = 16 \cdot k + 4$, kus $1 \leq k \leq 126$ ning $l = 16 \cdot k + 12$, kus $0 \leq k \leq 125$. Kokku on seega $2 \cdot 126 = 252$ lahendit.

Ülesanne 53. Sektorisse suurusega 60° on joonistatud teine sektor ning selle sisse veel kolmas sektor, nagu pildil näidatud. Leia vähima ja suurima sektori raadiuste suhe.



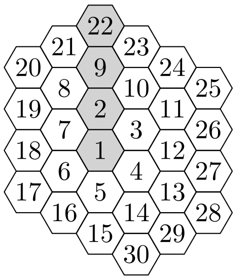
Vastus. $\sqrt{39}/8$

Lahendus. Pöörame vähimat sektorit, nagu näha järgneval joonisel.



Siit on selge, et vastuse leidmiseks peame leidma esimese ja teise kaare lõikepunkti y-koordinaadi. Olgu esimese sektori keskpunkt $(0, 0)$ ning parempoolne tipp $(1, 0)$. Siis selle sektori võrrand on $x^2 + y^2 = 1$ ning keskmise sektori võrrand $(x - 1)^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2$. Lahutades esimese võrrandi teisest, saame $1 - 2x = \frac{3}{4} - 1$ ehk $x = \frac{5}{8}$. Siit järeldub $y = \pm\frac{\sqrt{39}}{8}$, seega vastus on $\frac{\sqrt{39}}{8}$.

Ülesanne 54. Mesitarus on 2024 kuusnurkset kärge. Taru keskel on ühes kärjes 1 ml mett. Spiraalselt, nagu pildil näidatud, on igas järgnevas kärjes rohkem mett, kuni viimases kärjes on 2024 ml mett. Mesilasema tahab ehitada tee keskmisest kärjest otse ääre suunas, nagu pildil halli värviga näidatud. Et seda teha, tuleb kõikidest hallidest kärgedest mesi eemaldada. Kui palju mett (milliliitrites) tuleb kärgedest tee ehitamiseks eemaldada?



Vastus. 17928

Lahendus. Tähistagu $H(n)$ mee kogust teekonna n. kärjes: $H(1) = 2$, $H(2) = 9$ jne. Vaatleme kuusnurki, mis koosnevad kärgedest, mis on keskpunktist ühel kaugusel. Spiraalil kärjest $H(n)$ kärge $H(n+1)$, me läbime viis külge kuusnurgas küljepikkusega n ning ühe külje kuusnurgas küljepikkusega $n+1$. Seega $H(n+1) = H(n)+5n+(n+1) = H(n)+6n+1$. Järelikult

$$
\begin{aligned}
H(n) &= 6(n-1) + 1 + H(n-1) = \cdots \\
&= 6 \cdot ((n-1) + (n-2) + \cdots + 1) + (n-1) + H(1) \\
&= 6 \cdot \frac{(n-1)n}{2} + n + 1 \\
&= 3n^2 - 2n + 1.
\end{aligned}
$$

Olgu N kärgede arv teel. Kuna kärgesid on 2024, siis N on suurim täisarv, mille korral

$$
\begin{aligned}
H(N) &\leq 2024, \\
3N^2 - 2N &\leq 2023, \\
N^2 - \frac{2}{3}N &\leq 674 + \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Kuna $27^2 - \frac{2}{3} \cdot 27 > 729 - 27 > 675$, siis $N \leq 26$. Tõepoolest $26^2 - \frac{2}{3} \cdot 26 < 676 - 18 < 674$, seega $N = 26$.

Viimaks leiame summa

$$
\begin{aligned}
1 + \sum_{k=1}^{N} H(k) &= 1 + 3\sum_{k=1}^{N} k^2 - 2\sum_{k=1}^{N} k + \sum_{k=1}^{N} 1 \\
&= 1 + \frac{1}{2}N(N+1)(2N+1) - N(N+1) + N \\
&= 1 + 13 \cdot 27 \cdot 53 - 26 \cdot 27 + 26 \\
&= 17928.
\end{aligned}
$$

Alternatiivselt võib summa väärtuse leida, pannes tähele, et

$$
H(k) = 6 \cdot \frac{(k-1)k}{2} + k + 1 = 6\binom{k}{2} + \binom{k+1}{1}
$$

ja kasutades järgnevat omadust, mida tuntakse hokikepi omaduse nime all

$$
\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \cdots + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m+1}.
$$

Siis

$$
\begin{aligned}
1 + \sum_{k=1}^{N} H(k) &= 1 + 6\sum_{k=1}^{N} \binom{k}{2} + \sum_{k=1}^{N} \binom{k+1}{1} \\
&= 1 + 6\binom{N+1}{3} + \left(\binom{N+2}{2} - 1\right) \\
&= 27 \cdot 26 \cdot 25 + 14 \cdot 27 \\
&= 17928.
\end{aligned}
$$

Ülesanne 55. Mitu eri täisarvu on nimekirjas

$$\left\lfloor \frac{1^2}{2024} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2^2}{2024} \right\rfloor, \ldots, \left\lfloor \frac{2024^2}{2024} \right\rfloor,$$

kus $\lfloor x \rfloor$ tähistab suurimat täisarvu, mis on väiksem kui või võrdne arvuga x?

Vastus. 1519

Lahendus. Kuna $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$, siis $n \leq 1011$ korral kehtib $\frac{(n+1)^2}{2024} - \frac{n^2}{2024} = \frac{2n+1}{2024} \leq \frac{2023}{2024} < 1$ ja seega $\left\lfloor \frac{(n+1)^2}{2024} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n^2}{2024} \right\rfloor + 1$. Siit järeldub, et arvude $\left\lfloor \frac{1^2}{2024} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2^2}{2024} \right\rfloor, \ldots, \left\lfloor \frac{1012^2}{2024} \right\rfloor$ hulgas on kõik täisarvud vahemikus $\left\lfloor \frac{1^2}{2024} \right\rfloor = 0$ kuni $\left\lfloor \frac{1012^2}{2024} \right\rfloor = 506$, seega jada esimese 1012 liikme hulgas leidub 507 erinevat arvu.

Teisalt kui $n \geq 1012$, siis $\frac{(n+1)^2}{2024} - \frac{n^2}{2024} = \frac{2n+1}{2024} \geq \frac{2025}{2024} > 1$ ning seega $\left\lfloor \frac{(n+1)^2}{2024} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{n^2}{2024} \right\rfloor$. Järelikult kõik arvud $\left\lfloor \frac{1013^2}{2024} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{1014^2}{2024} \right\rfloor, \ldots, \left\lfloor \frac{2024^2}{2024} \right\rfloor$ (ehk jada viimased 1012 liiget) on erinevad ning suuremad jada esimesest 1012 liikmest.

Seega on jadas kokku $507 + 1012 = 1519$ erinevat arvu.

Ülesanne 56. Mitu järjestatud nelikut (a, b, c, d) leidub, kus $a, b, c, d \in \{1, 2, \ldots, 17\}$ on paarikaupa erinevad ning $a - b + c - d$ jagub arvuga 17?

Vastus. 3808

Lahendus. Vaatleme korrapärast 17-nurka $P_1 \ldots P_{17}$. Tingimus $a - b \equiv d - c \pmod{17}$ on samaväärne sellega, et P_a, P_b, P_c, P_d moodustavad võrdhaarse trapetsi, mille alused on P_aP_c ja P_bP_d. 17-nurga mistahes tipu eemaldamisel saab ülejäänud 16 tippu jaotada 8 paralleelseks lõiguks, millest mistahes paari saab trapetsi jaoks kasutada. Seega on $17 \cdot \binom{8}{2} = 476$ sobivat arvuhulka, millest igaühest saab moodustada 8 järjestatud nelikut valides, kumb alus on P_aP_c ja kumb P_bP_d ning arve a ja c ning b ja d omavahel vahetades. Seega vastus on $8 \cdot 476 = 3808$.

Ülesanne 57. Olgu $ABCD$ ristkülik ja E punkt küljel CD nii, et $2DE = EC$. Olgu F lõikude BD ja AE lõikepunkt. Kui on teada, et $\backslash AFD = 45$, siis leia $\frac{AD}{AB}$.

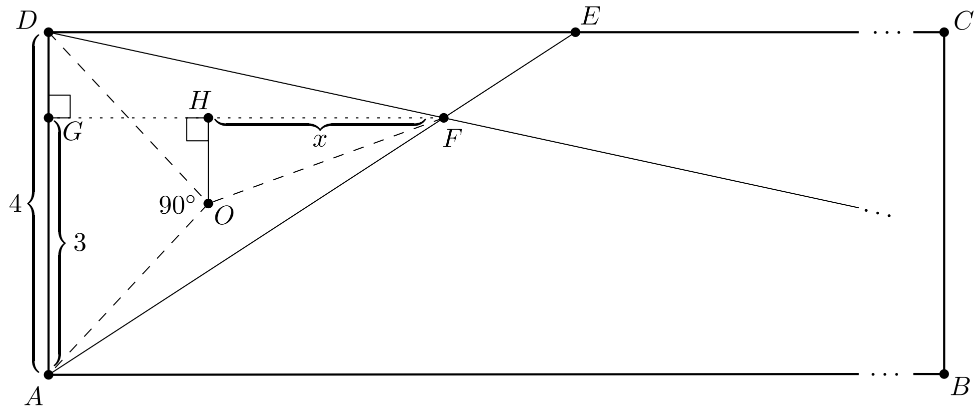
Vastus. $\frac{p\overline{7}\;\,2}{3}$

Lahendus. Antud pole ühtegi lõigupikkust, seega olgu üldisust kitsendamata $AD = 4$. Olgu G punkti F projektsioon sirgele AD, O kolmnurga ADF ümberringjoone keskpunkt ja H punkti O projektsioon sirgele GF. Kolmnurgad ABF ja EDF on sarnased sarnasusteguriga $AB : ED = 3 : 1$, seega $AG = 3$. Samuti $\backslash AOD = 2\backslash AFD = 90$, seega AOD on võrdhaarne täisnurkne kolmnurk. Punkti O kaugus nii sirgest AB kui AD on seega 2. Tähistades $x = HF$, annab Pythagorase teoreem

$$x^2 + (3-2)^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8 \Rightarrow x = \sqrt{7}.$$

Kuna kolmnurgad DGF ja DAB on sarnased, on vastus

$$\frac{DA}{AB} = \frac{DG}{DF} = \frac{1}{2+\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}-2}{3}.$$



Ülesanne 58. Olgu $P(x)$ selline kümnenda astme polünoom täisarvuliste kordajatega, et kõik selle juured on reaalarvulised ja $P(x)$ jagab polünoomi $P(P(x) + 2x - 4)$. Leia $\frac{P(2024)}{P(206)}$. *Märkus:* Me ütleme, et polünoom $P(x)$ jagab polünoomi $Q(x)$, kui polünoomidel $P(x)$ ja $Q(x)$ on täisarvulised kordajad ja leidub täisarvuliste kordajatega polünoom $R(x)$ nii, et $Q(x) = R(x) \cdot P(x)$.

Vastus. $10^{10} = 10000000000$

Lahendus. Olgu r polünoomi $P(x)$ juur. Siis ülesande tingimuste põhjal on ka $2r - 4, 2(2r - 4) - 4 = 4r - 12, 2(4r - 12) - 4 = 8r - 28, \ldots, 2^n r - 2^{n+2} + 4$ polünoomi $P(x)$ juured. Aga kümnenda astme polünoomil $P(x)$ saab olla maksimaalselt 10 juurt. Seega leiduvad $j > i$, nii et $2^i r - 2^{i+2} + 4 = 2^j r - 2^{j+2} + 4$. Järelikult $2^i \cdot (r - 4) = 2^j \cdot (r - 4)$ ehk $r = 4$. Seega $P(x) = a \cdot (x - 4)^{10}$, kus a on nullist erinev reaalarv. Seega $\frac{P(2024)}{P(206)} = \left(\frac{2020}{202}\right)^{10} = 10^{10} = 10000000000$.

Ülesanne 59. Jaak on ringis, kus on 2024 inimest. Nad viskavad üksteisele lendavat taldrikut. Esimesel positsioonil olev inimene viskab taldriku kolmandal positsioonil olevale inimesele, kes viskab selle viiendal positsioonil olevale inimesele, ja nii edasi: iga inimene viskab taldriku endast ülejärgmisele inimesele (ehk jätavad ühe inimese vahele). Vahele jäetud inimesed saavad pahaseks ning lahkuvad ringist koheselt. Protsessi jätkatakse, kuni ringis on alles vaid kaks inimest. Kui Jaak tahab olla üks kahest allesjääjast, siis millistel positsioonidel võib ta alguses seista? Leia kõigi selliste positsioonide summa.

Vastus. 2978

Lahendus. Kui ringis oleks 2^n inimest, siis ühe ringiga lahkuks kõik paarisarvulisel positsioonil asuvad inimesed ning sarnane olukord korduks $2^{n\;1}$ inimesega, kusjuures ringi alustaks taas inimene positsioonil 1. Seega jääks tema lõpuks alles. Ringis on algul aga $2024 = 1024 + 1000$ inimest, seega pärast esimest 1000 viset on ringis alles 1024 inimest ning taldrik on inimese käes numbriga 2001. Seega tema on üks viimasest kahest allesjäävast inimesest. Teise allesjääva inimese leidmiseks paneme tähele, et kui ringis on $2^n + 2^{n+1}$ inimest, siis teine allesjääv inimene on positsioonil 1. Tõepoolest: Väide kehtib $n = 1$ ehk 3 inimesest koosneva ringi jaoks ning kui ringis on $2^{n+1} + 2^{n+2}$ inimest, siis pärast ühte ringi on alles $2^n + 2^{n+1}$ inimest ning taldrik on endiselt inimese käes numbriga 1, mis tõestab induktsiooni sammu. Seega teine allesjääv inimene on see, kelle käes on taldrik hetkel, kui alles on $1024 + 512$ inimest. Kuna $2024 = 1024 + 512 + 488$, siis selle inimese positsioon on $2 \cdot 488 + 1 = 977$. Seega vastus on $2001 + 977 = 2978$.

Ülesanne 60. Juss mängib kolme sõbraga lendava taldrikuga. Nad järgivad järgmist reeglit: mängijale, kes sulle taldriku viskas, ei tohi taldrikut kohe tagasi visata. Juss alustas mängu ning kümne viske pärast hoidis ta taldrikut jälle käes. Mitmel eri viisil oli võimalik neid kümmet viset teha?

Vastus. 414

Lahendus. Esmalt leiame kõik võimalused kümne viske sooritamiseks, sõltumata sellest, kas taldrik on Jussi käes pärast kümmet viset. Esimese viske jaoks on 3 võimalust ning igal järgneval viskel on 2 võimalust, seega n viske sooritamiseks on $3 \cdot 2^{n\;1}$ võimalust.

Olgu y_n n viskest koosnevate jadade arv, mille lõpuks on taldrik Jussi käes. Et $n + 1$. viskega saaks jõuda taldrik tagasi Jussi kätte, siis kõigist $3 \cdot 2^{n\;1}$ jadast, mis koosnevad n viskest, ei sobi need, kus Jussil on taldrik pärast n. või $n - 1$. viset. Samuti paneme tähele, et neid olukordi, kus Jussil on taldrik pärast $n - 1$. viset, peame loendama topelt, sest ta jõuab veel visata taldriku ühele kahest inimesest. Kokkuvõtteks oleme leidnud, et $y_{n+1} = 3 \cdot 2^{n\;1} - y_n - 2y_{n\;1}$.

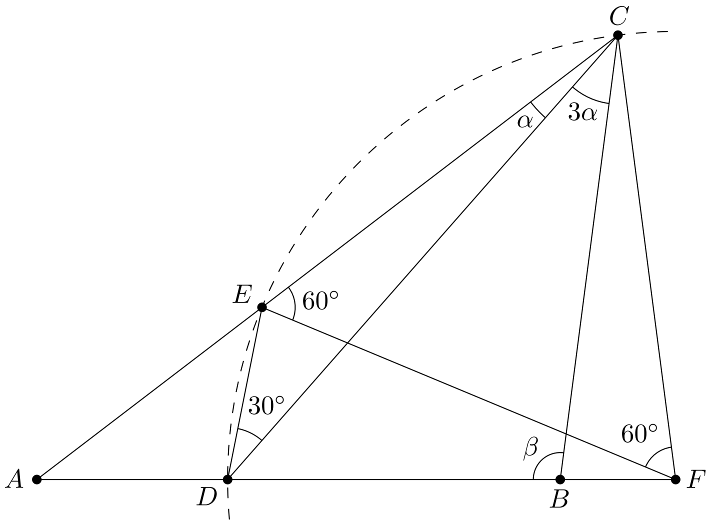
Ilmselgelt $y_1 = 0$ ja $y_2 = 0$, seega saame seosest $y_{n+1} = 3 \cdot 2^{n\;1} - y_n - 2y_{n\;1}$ arvutada, et $y_3 = 3 \cdot 2^1 - 0 - 0 = 6$, $y_4 = 3 \cdot 2^2 - 6 = 6$, $y_5 = 3 \cdot 2^3 - 6 - 12 = 6$, $y_6 = 3 \cdot 2^4 - 6 - 12 = 30$, $y_7 = 3 \cdot 2^5 - 30 - 12 = 54$, $y_8 = 3 \cdot 2^6 - 54 - 60 = 78$, $y_9 = 3 \cdot 2^7 - 78 - 108 = 198$, $y_{10} = 3 \cdot 2^8 - 198 - 156 = 414$.

Alternatiivlahendus: Käsitleme n viskest koosnevat jada, mille alguses ja lõpus on taldrik Jussi käes, aga vahepeal mitte. Kui jada algab mängu alguses, on Jussi viske jaoks 3 võimalust ja järgmise viske jaoks 2 võimalust, pärast mida on visked üheselt määratud. Kui jada on mängu keskel, on mõlema viske jaoks kaks võimalust. Iga sellise jada pikkus on vähemalt 3, seega kümnest viskest koosneva mängu sellisteks jadadeks jaotamiseks on järgmised võimalused: 10, $3 + 7$, $7 + 3$, $6 + 4$, $4 + 6$, $5 + 5$, $3 + 3 + 4$, $3 + 4 + 3$ ja $4 + 3 + 3$. Ühest jadast koosneva mängu jaoks on 6 võimalust, kahest jadast koosneva mängu jaoks $6 \cdot 4$ võimalust ja kolmest jadast koosneva mängu jaoks $6 \cdot 4 \cdot 4$ võimalust, seega kokku on $6 \cdot (1 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 4) = 6 \cdot 69 = 414$ võimalust.

Ülesanne 61. Punkt D kolmnurga ABC küljel ABC on selline, et $\backslash ACD = 11.3$ ja $\backslash DCB = 33.9$. Lisaks $\backslash CBA = 97.4$. Leia $\backslash AED$, kus E on punkt küljel AC nii, et $EC = BC$.

Vastus. 41.3

Lahendus. Tähistame $\alpha = 11.3$ ja $\beta = 97.4$, siis $\angle DCB = 3\alpha$. Olgu $F \neq B$ punkt sirgel AB, nii et $CB = CF$.



Leiame nurga $\angle BCF$: on teada, et $\angle FBC = 180 - \beta$ ja et kolmnurk $\triangle BCF$ on võrdhaarne, seega $\angle BCF = \frac{1}{2}(180 - 2\angle FBC) = 2\beta - 180$. See tähendab, et

$$\angle ECF = \alpha + 3\alpha + 2\beta - 180 = 4 \cdot 11.3 + 2 \cdot 97.4 - 180 = 60 .$$

Kuna $CF = CB = CE$, siis $\triangle CEF$ on võrdkülgne.

Näitame, et $FC = FD$: Kuna $\angle DCF = 60 - \alpha$ ja $\angle CFD = 180 - \beta$, siis

$$\angle FDC = 180 - (60 - \alpha) - (180 - \beta) = \alpha + \beta - 60 = 48.7 = 60 - \alpha = \angle DCF,$$

seega $\triangle CDF$ on võrdhaarne, nagu soovitud F. Koos kolmnurga $\triangle CEF$ võrdkülgsusega tähendab see, et $FC = FE = FD$, seega F on kolmnurga CED ümberringjoone keskpunkt. Järelikult $\angle CDE = \frac{1}{2}\angle CFE = 30$ ja $\angle DEC = 180 - \alpha - 30$. Viimaks

$$\angle AED = 180 - \angle DEC = 30 + \alpha = 41.3 .$$

Ülesanne 62. Reaalarvud $a > b > 1$ rahuldavad võrratust

$$(ab+1)^2 + (a+b)^2 \leq 2(a+b)(a^2 - ab + b^2 + 1).$$

Leia avaldise

$$\frac{\sqrt{a-b}}{b-1}$$

minimaalne võimalik väärtus.

Vastus. $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Lahendus. Kirjutame võrratuse ümber järgnevalt:

$$\begin{aligned}(ab+1)^2 + (a+b)^2 &\leq 2(a+b)(a^2 - ab + b^2 + 1),\\ 0 &\leq 2a^3 + 2b^3 - a^2b^2 - a^2 - b^2 - 4ab + 2a + 2b - 1,\\ 0 &\leq (a^2 - 2b + 1)(2a - b^2 - 1).\end{aligned}$$

Kuna $a > b > 1$, siis $a^2 > b^2$, ning seega $a^2 - 2b + 1 > b^2 - 2b + 1 = (b-1)^2 > 0$. Seega teise teguri kohta kehtib

$$\begin{aligned}2a - b^2 - 1 &\geq 0,\\ 2a - 2b &\geq b^2 - 2b + 1,\\ 2(a-b) &\geq (b-1)^2,\\ \frac{\sqrt{a-b}}{b-1} &\geq \frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Väärtus $1/\sqrt{2}$ saab kehtida näiteks siis, kui $a = 5/2$ ja $b = 2$ (võrduse jaoks peab kehtima $a = (b^2+1)/2$).

Ülesanne 63. Olgu x, y, z sellised paarikaupa erinevad nullist erinevad täisarvud, et

$$\frac{(x-1)^2}{z}+\frac{(y-1)^2}{x}+\frac{(z-1)^2}{y}=\frac{(x-1)^2}{y}+\frac{(y-1)^2}{z}+\frac{(z-1)^2}{x}.$$

Leia avaldise

$$|64x+19y+4z|$$

minimaalne võimalik väärtus.

Vastus. 7

Lahendus. Tähistame $\sum_{\text{cyc}} Q(x,y,z)=Q(x,y,z)+Q(y,z,x)+Q(z,x,y)$.

Korrutades antud võrrandi pooli teguriga $xyz\neq 0$, saame

$$P(x,y,z)=x(x-1)^2(y-z)+y(y-1)^2(z-x)+z(z-1)^2(x-y)=\sum_{\text{cyc}} x(x-1)^2(y-z)=0.$$

Et $P=0$, kui $x=y$, $y=z$ või $z=x$, siis ta peab jaguma polünoomiga $(x-y)(y-z)(z-x)=\sum_{\text{cyc}} x^2(z-y)$. Et $P(x,y,z)$ on neljanda astme polünoom ja $\sum_{\text{cyc}} x^2(z-y)$ on kolmanda astme polünoom, siis nende jagatis peab olema lineaarpolünoom, seega

$$P(x,y,z)=\left(\sum_{\text{cyc}} x^2(z-y)\right)\cdot(ax+by+cz+d).$$

Kuna $xy-xz+yz-yx+zx-zy=\sum_{\text{cyc}} x(y-z)=0$, siis

$$\begin{aligned}P(x,y,z)&=\sum_{\text{cyc}}\left(x^3(y-z)-2x^2(y-z)+x(y-z)\right)\\&=\sum_{\text{cyc}}\left(x^3(y-z)-2x^2(y-z)\right)+0\\&=\left(\sum_{\text{cyc}} x^2(z-y)\right)\cdot(ax+by+cz+d).\end{aligned}$$

Polünoomid on võrdsed, kui kõik nende vastavad liikmed on võrdsed. Seega $x^2(z-y)\cdot ax=x^3(y-z)$ ehk $a=-1$ ning analoogselt $b=c=-1$. Samuti näeme võrdusest $x^2(z-y)\cdot d=-2x^2(y-z)$, et $d=2$. Järelikult

$$P(x,y,z)=(x-y)(y-z)(z-x)(2-x-y-z)=0.$$

Kuna meid huvitavad vaid erinevate arvude kolmikud (x,y,z), siis järelikult $x+y+z=2$. Ühtlasi näeme, et iga kolmik, mis rahuldab seda tingimust, rahuldab ka ülesande võrrandit.

Et leida avaldise $|64x+19y+4z|$ minimaalne väärtus, lahutame temast $4(x+y+z)-8=0$, et saada

$$|64x+19y+4z|=|15\cdot(4x+y)+8|.$$

Otsime täisarvu $4x+y$, mille korral oleks väärtus minimaalne. See on ilmselgelt $4x+y=-1$, mis on saavutatav näiteks juhul $(x,y,z)=(-2,7,-3)$. Seega vastus on 7.