1. Feladat Öt játékos játszik egy játékot, ahol minden körben valaki egy pontot tud szerezni. A játék akkor ér véget, amikor valaki összegyűjt 10 pontot. Hány körből állhat a lehető leghosszabb ilyen játék?

Eredmény. 46

Megoldás. Amikor a játék véget ér, a győztesnek 10 pontja van, mindenki másnak pedig legfeljebb 9 pontja, ami összesen $10 + 4 \cdot 9 = 46$.

2. Feladat Gábornak van négy kártyája, amelyekre az 1, 2, 3 és 6 számok vannak írva. Szeretné elrendezni az összes kártyát úgy, hogy két számot alkossanak (A és B), ahol A többszöröse B-nek (például az $A = 36$ és $B = 12$ megfelelő). Hányféleképpen teheti ezt meg?

Eredmény. 21

Megoldás. Nézzünk meg 2 esetet:

I. B egy kártyát tartalmaz, A pedig hármat. Nézzük meg B lehetséges értékeit:

- $B = 1$: A $2, 3, 6$ bármilyen permutációja $\to$ 6 lehetőség.
- $B = 2$: A 6-ra végződik $\to$ 2 lehetőség.
- $B = 3$: A $1, 2, 6$ bármilyen permutációja, mert a számjegyek összege osztható 3-mal $\to$ 6 lehetőség.
- $B = 6$: A 2-re végződik $\to$ 2 lehetőség.

II. A és B is két kártyából állnak. Ekkor az A/B arány kevesebb, mint 6, szóval 1, 2, 3, 4 vagy 5 lehet. Nézzük végig a lehetőségeket:

1: Nem lehetséges, mert ekkor $A = B$.

2: A 2-re vagy 6-ra végződik. Ha A 2-re végződik, akkor B 6-ra vagy 1-re végződik. Az első esetben 32 és 16 lesz a megoldás, a második esetben 62 és 31 $\to$ 2 lehetőség.

Ha A 6-ra végződik, akkor, B 3-ra végződik, a megoldás 26 és 13 $\to$ 1 lehetőség.

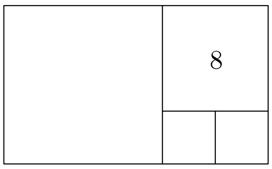
3: A 6-tal vagy 3-mal kezdődik. Az első esetben B 2-vel kezdődik, tehát 63 és 21 jön ki. A második esetben B 1-gyek kezdődik és 36 and 12 jön ki. $\to$ 2 lehetőség.

4: A 6-tal kezdődik és 2-re végződik, mert páros. Tehát $A = 62$, de ez nem osztható 4-gyel.

5: A nem végződhet 5-re vagy 0-re, ezért ez nem lehetséges.

Mindent összeszámolva 21 lehetőséget kaptunk.

3. Feladat Az ábra négy négyzetet tartalmaz, és az egyiknek a területe 8. Mi a legnagyobb négyzet területe?



Eredmény. 18

Megoldás. Az ábrán szereplő négyzetek méretarányai $3 : 2 : 1$. Ezért a legnagyobb négyzet területe $\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 8 = 18$.

4. Feladat Egy parkban van néhány szarka, matematikus és kentaur. Összességében 15 farkuk és 94 kezük van. Hány láb található a parkban?

Megjegyzés: Egy szarkának nincs keze, de van két lába és egy farka. Egy matematikusnak van két keze és két lába, de nincs farka. Egy kentaurnak két keze, négy lába és egy farka van.

Eredmény. 124

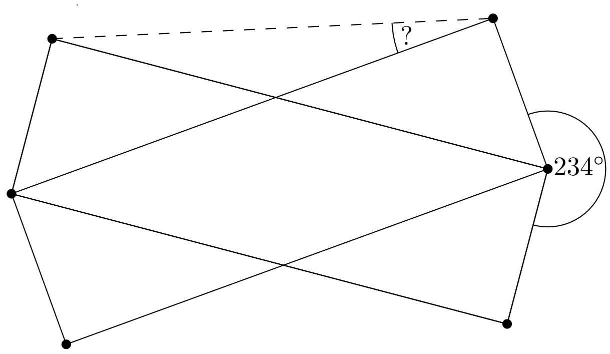
Megoldás. Legyen a szarkák, matematikusok és kentaurok száma rendre s, m és k. A farkak számából tudjuk, hogy $s + k = 15$, a kezek számából pedig $2m + 2k = 94$ jön ki. A lábak száma összesen $2s + 2m + 4k = 2(s + k) + (2m + 2k) = 30 + 94 = 124$.

5. Feladat A tévékészülékeden három csatorna van: első, második és harmadik. Minden csatornáról csak olyanra tudsz átkapcsolni, aminek a száma pontosan eggyel tér el, tehát például az első csatornáról csak a másodikra lehet lépni. Elkezdesz tévét nézni a kettes csatornán, majd 11 alkalommal csatornát váltasz. A csatornáknak hányféle különböző sorozatát tudod így elérni?

Eredmény. 64

Megoldás. A sorozatban 12 csatorna szerepel, és a páratlanadik pozíciókban biztosan a kettes csatornának kell állnia. A páros pozíciókban pedig vagy az egyes vagy a hármas csatornát nézzük. Hat darab párosadik pozíció van a sorozatban, ezért a lehetőségek száma $2^6 = 64$.

6. Feladat Az ábrán két egybevágó téglalap és egy megadott szög látható. Hány fokos az ábrán kérdőjellel jelölt szög?



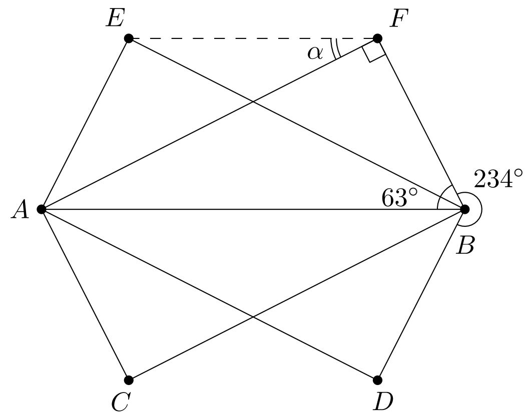
Eredmény. 27°

Megoldás. Nevezzük el a pontokat az ábrán látható módon. Az AB közös átló felezi a $FBD\sphericalangle$ szöget, ezért

$$FBA\sphericalangle = \frac{360^\circ - 234^\circ}{2} = 63^\circ.$$

Továbbá az EF szaggatott vonal merőleges AB-re, ezért $EFB\sphericalangle + FBA\sphericalangle = 180^\circ$. Kivonjuk ebből az $AFB\sphericalangle$ derékszöget, így azt kapjuk, hogy

$$\alpha = 180^\circ - 90^\circ - 63^\circ = 27^\circ.$$



7. Feladat Mi lesz $x^3 - 14x + 2024$ értéke, ha $x^2 - 4x + 2 = 0$?

Eredmény. 2016

Megoldás. Vegyük az $x^3 - 14x + 2024$ keresett értéket, és vonjunk ki belőle $x(x^2 - 4x + 2) = 0$-t, hogy az x^3 tag kiessen, így $4x^2 - 16x + 2024$-et kapunk. Szeretnénk, hogy a $4x^2$ is kiessen, ezért kivonunk $4(x^2 - 4x + 2) = 0$-t, ekkor 2016-et kapunk és ez a keresett érték.

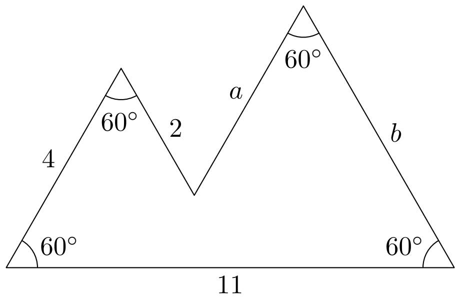
8. Feladat Misi választott egy pozitív egész n számot, és leírta hogy hány páros számjegye van, hány páratlan számjegye van, és összesen hány számjegye van, ebben a sorrendben. Összeolvasta ezt a három számot balról jobbra (figyelmen kívül hagyva az esetleges nullákat a bal oldalon) és így újra az n számot kapta. Mi a lehetséges legkisebb n?

Például: ha Misi a 2024 számból indult ki, akkor a páros számjegyek száma 4, a páratlan számjegyek száma 0, az összes számjegy száma 4, tehát összeolvasva őket 404-et kapna.

Eredmény. 123

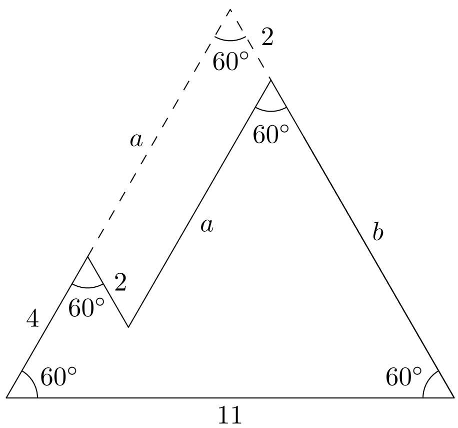
Megoldás. A keresett szám nem lehet egyjegyű, mert a számjegy vagy páros vagy páratlan, azaz valahova be lesz számolva. Kétjegyű sem lehet, mert akkor 2-re kell végződnie, ami páros szám, így az összeolvasáskor már háromjegyű számot kapna. Keressünk egy jó háromjegyű számot. Ekkor a számjegyek száma 3, a páros és páratlan jegyek számának összege szintén 3, így ezek a lehetőségek jönnek szóba: 33, 123, 213 és 303. Lejátszva a háromjegyű lehetőségeken Misi módszerét, mindig az 123 számot kapjuk eredményül, beleértve azt is, amikor 123-ból indultunk ki, tehát a keresett szám a 123.

9. Feladat Az alábbi ábrán egy ötszög látható, amelynek néhány szögét és oldalhosszát megadtuk. Határozzátok meg $a + b$ értékét!



Eredmény. 16

Megoldás. Egészítsük ki az ötszöget egy paralellogrammával, úgy, hogy egy szabályos háromszöget kapjunk, a háromszög oldala $11 = 4 + a = 2 + b$, ahogy az ábrán is látszik.



Ebből kiszámolható, hogy $a = 7$, $b = 9$, tehát $a + b = 16$.

10. Feladat A *Kopala studienku* ("Kutat ásott a lány") című szlovák népdalban egy lány azt vizsgálja, hogy a kútja egyformán mély és széles-e. Definíció szerint a kút egy egyenes henger, melynek magassága a kút mélysége, és alapkörének átmérője a kút szélessége. A lány tudja, hogy egy hét alatt tud olyan kutat ásni, ami kellő szélességű, viszont mélysége csak a szükséges hossz $\frac{1}{3}$ része. Emellett Matuska János egy hét alatt olyan kutat tud ásni, ami kellően mély, viszont csak fele olyan széles, mint kellene. A befektetett erőfeszítés egyenesen arányos a kiásott föld mennyiségével. Hány nap alatt tudnak ketten együtt az előírásnak megfelelő kutat ásni?

Eredmény. 12

Megoldás. A feladat feltételezi, hogy a szükséges idő arányos a kiásott föld térfogatával. A kút egy egyenes körhenger, azért a térfogata $V = \frac{\pi}{4} \cdot D \cdot W^2$, ahol D a mélység, W a szélesség (az átmérő). A lány 7 nap alatt ás ki $\frac{\pi}{4} \cdot \frac{D}{3} \cdot W^2 = \frac{1}{3}V$ térfogatot, tehát 21 nap alatt ásná ki a teljes kutat. János viszont 7 nap alatt $\frac{\pi}{4} \cdot D \cdot \left(\frac{W}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}V$ térfogatú földet ás ki, azaz 28 nap alatt ásná ki a teljes kutat. Tehát egy nap alatt a lány az kút $\frac{1}{21}$-ed részét ássa ki, János pedig a kút $\frac{1}{28}$-ad részét, azaz ketten együtt egy nap alatt a $\frac{1}{21} + \frac{1}{28} = \frac{1}{12}$-ed részét. Ebből látható, hogy együtt 12 nap alatt tudnák kiásni a kutat.

11. Feladat Adott egy négyzetrács, ami 10×10 egységoldalú négyzetből áll össze. Határozzátok meg, hogy hány olyan $\sqrt{5}$ hosszúságú szakaszt találhatunk, ami a rács két csúcsát köti össze.

Eredmény. 360

Megoldás. Vegyük észre, hogy egy 2×1-es téglalapnak két $\sqrt{5}$ hosszúságú átlója van. (És könnyen látható, hogy máshogy nem kaphatunk $\sqrt{5}$ hosszúságú szakaszt.) Keressük meg az összes 2×1-es téglalapot! Ha a téglalap függőlegesen áll, akkor a 10-féleképpen tudunk kiválasztani egy oszlopot, és 9-féleképpen két szomszédos sort, ahova elhelyezzük.

Tehát 90-féleképpen tudjuk elhelyezni a 10×10-es négyzetrácson. Ha a téglalap vízszintesen fekszik, akkor hasonló módon újabb 90 lehetőséget találunk. Tehát, ha vesszük ezen $90 + 90$ téglalap átlóit, akkor összesen 360 megfelelő $\sqrt{5}$ hosszúságú szakaszt találunk.

12. Feladat Ha M, A, T és H különböző nemnulla számjegyek és a

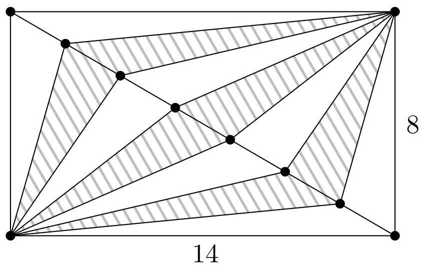
$$2024 + HAHA = MATH$$

egyenlőség teljesül, akkor mi lehet a négyjegyű $MATH$ szám lehető legnagyobb értéke?

Eredmény. 5963

Megoldás. A százas helyiértéken $MATH$ és $HAHA$ ugyanazt a számjegyet tartalmazza és a 2024-ben ezen a helyiértéken 0 szerepel, ezért az összeadás során nem vittünk át semmit, amikor a tizes helyiértéken álló számokat adtuk össze. Tehát $TH = HA + 24$ és $M = H + 2$. Azonban, A és 4 összeadása esetén kell, hogy legyen továbbvitt érték, mert különben $T = H + 2 = M$ lenne, és feltettük hogy a betűk mind különböző számokat jelölnek. Ez alapján $H = A + 4 - 10 = A - 6$, így $M = A - 4$ és $T = A - 3$. Ebből már könnyen megkapható, hogy $MATH$ értéke 3741, 4852 vagy 5963, és ezek közül a 5963 legnagyobb.

13. Feladat Egy zebra-téglalap oldalhosszai 14 és 8. Az átlóját felosztottuk 7 egyenlő hosszú szakaszra. Mekkora a satírozott rész területe?



Eredmény. 48

Megoldás. Nézzük az átlón az egyik oldalon fekvő 7 háromszöget. Mindnek ugyanakkora a magassága és az alapja is, ezért a területük is egyenlő. Emiatt a satírozott rész területe $\frac{3}{7}$ része a teljes téglalap területének. Tehát a megoldás $\frac{3}{7} \cdot 8 \cdot 14 = 48$.

14. Feladat Az iskolában van egy matekos klub. Ha egy új lány csatlakozik a klubhoz, de a fiúk 20%-a kilép belőle, akkor a fiúk és lányok száma egyenlő lesz. Másrészt viszont, ha egy lány kilépne a klubból és ezután a lányok száma növekedne 30%-kal, akkor is egyenlő lenne a fiúk és lányok száma. Hány gyerek van a matekklubban?

Eredmény. 116

Megoldás. Legyen a lányok száma l és a fiúk száma f. Az állítások alapján az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

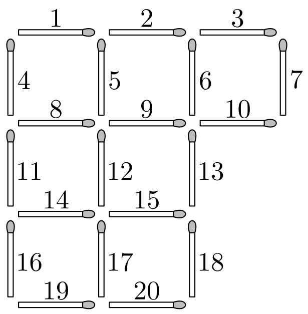
$$l + 1 = \frac{4}{5}f,$$
$$\frac{13}{10}(l - 1) = f.$$

Helyettesítsük be a $f = \frac{5}{4}l + \frac{5}{4}$ egyenlőséget a második egyenletbe, ekkor

$$\frac{5}{4}l + \frac{5}{4} = \frac{13}{10}l - \frac{13}{10},$$

ennek a megoldása $l = 51$, ezért $f = \frac{13}{10} \cdot 50 = 65$. A keresett válasz $l + f = 51 + 65 = 116$.

15. Feladat Az ábrán a gyufaszálak kilenc négyzetet alkotnak. Vegyetek el három gyufát úgy, hogy öt négyzet maradjon, és minden gyufaszál továbbra is valamilyen négyzethez tartozzon. Minden gyufához hozzárendeltünk egy számot az ábrán látható módon. Adjátok meg, mi az eltávolított gyufahármashoz tartozó számok összegének lehető legnagyobb értéke.



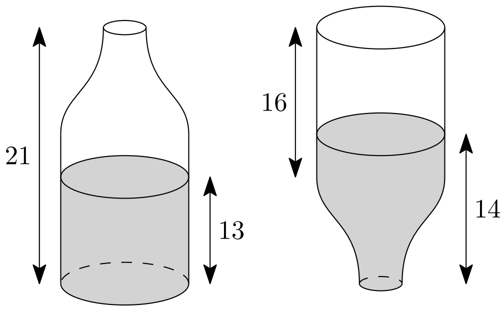
Eredmény. 50

Megoldás. Van 7 darab 1 oldalhosszúságú négyzet és két darab 2 oldalhosszúságú négyzet. Ahhoz, hogy 5-re csökkentsük a négyzetek számát, pontosan 4 négyzetet kell megszüntetnünk. Ahhoz, hogy a $3, 7, 6, 10$ gyufák által határolt négyzetet eltüntessük, legalább három gyufát el kell közülük venni, így ez lesz az egyik olyan négyzet, ami megmarad. Fontos megjegyezni, hogy a 6-os gyufaszálat nem lehet elvenni, mert megszüntetné ezt a négyzetet és a négyzet másik három gyufáját már nem vehetnénk fel.

A 11-es vagy 13-as gyufa eltávolításával egyszerre megszüntetjük mindkét nagy négyzetet. Ha ez megtörténik, akkor egy négyzetet kell eltüntetnünk két gyufa eltávolításával. Vegyük azt az esetet, amikor a 11-es gyufát vesszük el; ekkor lehetőség van a 12-es és 13-as, vagy a 18-as és 20-as gyufapár elvételére. Míg ha a 13-as gyufát vesszük el először, akkor elvehető utána az 1-es és 3-as vagy a 11-es és 12-es vagy a 16-os és 19-es gyufapár. Ezek közül a lehetőségek közül a 11-es, 18-as és 20-as gyufa összege a legnagyobb, 49. Ha mindkét nagy négyzetet meghagyjuk, akkor egyedül az 5-ös, 12-es és 17-es gyufaszálakat vehetjük el, ami nem eredményezne lehetséges megoldást.

Mivel a 6-os gyufát nem vehetjük el és az egyik nagy négyzetet meg kell szüntetnünk, feltételezhetjük, hogy a következő gyufapárok közül valamelyiket el kell vennünk: 18 és 20, 16 és 19, 1 és 4. Ez az elvétel egyszerre két négyzetet szüntet meg, egy kicsit és egy nagyot. Ezt követően egy gyufaszálat kell elvennünk, ami pontosan két négyzetet szüntet meg. A $18, 20$ pár esetén ez lehet vagy a 11-es gyufa, ami egy kis négyzetet és a második nagyot szünteti meg, vagy a 12-es, ami két kis négyzetet szüntet meg, ezzel $18 + 20 + 12 = 50$-es összeget eredményezve. A 13-as gyufát nem vehetjük el, hiszen akkor a 15-ös gyufa egyik négyzethez sem tartozna. Hasonlóképp feltételezhetjük, hogy a $16, 19$ páros, valamint a 13-as gyufa elvétele 48-as összeget eredményezne. Így a keresett válasz 50.

16. Feladat Lukácsnak van egy 21 egység magas palackja, ami egy 16 magas hengerből és a nyakánál egy szabálytalan alakzatból áll. Lukács valamennyi vizet töltött a palackba és megállapította, hogy a víz magassága a palackban 13. Ezután fejjel lefelé fordította a zárt palackot és észrevette, hogy így 14 egység magasra ér a víz. Számoljátok ki, hogy a palack térfogatának hány százaléka van vízzel töltve!

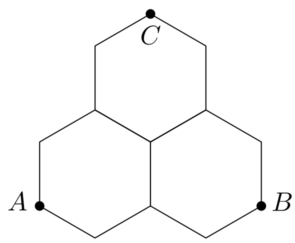


Eredmény. 65

Megoldás. Legyen r a henger alapjának sugara! Az első állásból kiderül, hogy a palackban lévő víz térfogata $13\pi r^2$. Hasonlóképp a második állásból kiderül, hogy a palackban lévő levegő tárfogata $(21 - 14)\pi r^2 = 7\pi r^2$. Így a palack teljes térfogata $(13 + 7)\pi r^2 = 20\pi r^2$ és a keresett százalékérték

$$\frac{13\pi r^2}{20\pi r^2} = \frac{13}{20} = 65\,\%.$$

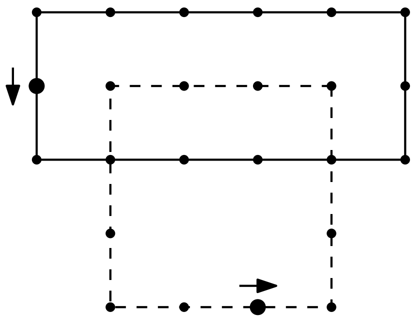
17. Feladat András lakhelye Hexagónia, egy olyan város, ahol minden utca 1 km hosszú és az utcák három szabályos hatszög oldalait képezik. András először el akar menni a barátnőjéért, majd cukrászdába menni vele. Az ábrán András az A pontból indul, a barátnője a B pontban lakik, a cukrászda pedig a C pontban található. András nem szeretne kétszer ugyanazon az utcán végigmenni. Mi az összege az összes lehetséges útvonal hosszúságának (kilométerben)?



Eredmény. 28

Megoldás. Négy olyan útvonal van A és B között, ami nem halad át a C ponton. Ezek közül egynél két módon lehet eljutni C-be, egynél pontosan egy lehetőség van eljutni C-be, míg a maradék kettő esetben nincs olyan mód eljutni C-be, hogy ne menjünk át kétszer ugyanazon az úton. András összességében három lehetséges módon tud eljutni a cukrászdába a barátnője házát érintve. Ezek közül kettő 10 utca hosszúságú, egy pedig 8 utca hosszúságú. A lehetséges útvonalak összege 28 kilométer.

18. Feladat Két őr négyszögletes alakban járőrözik a képen látható módon. A sebességük állandó, egy perc alatt érnek át egyik pöttyel jelölt pontból a következőbe. Hány perc után fognak először találkozni, ha a nyíllal jelölt pontokból indulnak?



Eredmény. 44

Megoldás. Legyen az A őr az, amelyik 14 perc alatt tesz meg egy kört (téglalap alakú útvonal), B pedig az, aki 12 perc alatt (négyzet alakú útvonal). Két lehetséges találkozási pontja van az őröknek. Ha a baloldali pontban találkoznak, miután A őr megtett a egész kört, B pedig b egész kört, akkor a

$$14a + 2 = 12b + 8$$

egyenlet biztosan teljesül. Ezt az egyenletet egyszerűsíthetjük $7a = 6b + 3$-ra, amiből következik, hogy $7 \mid 6b + 3$. Ha próbálkozunk $b \in \{0, 1, 2 \dots\}$ behelyettesítésével, akkor láthatjuk, hogy $b = 3$ és $a = 3$ a lehető legkisebb megoldás. Hasonlóképp a jobb oldali ponton akkor találkoznak az őrök, ha

$$14a + 5 = 12b + 3$$

teljesül. Így egyszerűsíthetünk $7a = 6b - 1$-re, tehát megkapjuk, hogy $7 \mid 6b - 1$, ami miatt ebben az esetben biztos, hogy $b \geq 6$. Ezek alapján kiszámolható, hogy az őrök $14 \cdot 3 + 2 = 44$ perc után találkoznak először.

19. Feladat Az a, b és c pozitív egész számok eleget tesznek a következő egyenleteknek:

$$\sqrt{a^2 + b^2 - 172} = c,$$
$$\sqrt{c^2 + b^2 - 220} = a.$$

Mi a lehető legnagyobb értéke az $a + b + c$ összegnek?

Eredmény. 26

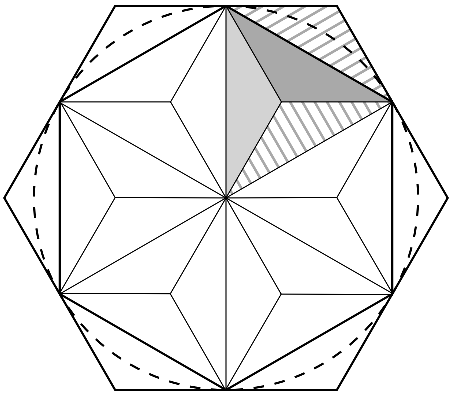
Megoldás. Emeljük négyzetre mindkét egyenletet és számoljuk ki az összegüket, ami $2b^2 = 392$. Mivel b-nek pozitívnak kell lennie, az egyetlen megoldás $b = 14$. Ezt az első egyenlet négyzetébe behelyettesítve megkapjuk, hogy $a^2 + 24 = c^2$ vagy $c^2 - a^2 = 24$. Legyen $d = c - a$; ekkor d páros szám, hiszen c és a mindketten vagy párosak vagy páratlanok.

A $c^2 - a^2 = (c - a)(c + a)$ egyenlet értéke alulról korlátos $d(d + 2)$-vel, ami $d \geq 6$ esetén legalább 48, ez pedig nagyobb mint 24. Ezáltal d lehetséges értékei $d = 2$ és $d = 4$. Az előbbi esetben megkapjuk, hogy $a + c = 12$, az értékek pedig $a = 5$ és $c = 7$. Utóbbi esetben $a + c = 6$, az értékek pedig $a = 1$ és $c = 5$. Tehát $a + b + c$ lehető legnagyobb értéke $5 + 14 + 7 = 26$.

20. Feladat Vegyünk egy kört, majd rajzoljuk meg a köréírt és beírt szabályos hatszögeit. A köréírt hatszögnek mekkora részét fedi le a beírt hatszög?

Eredmény. $\frac{3}{4}$

Megoldás. Ha az ábrán látható módon egybevágó háromszögekre osztjuk a hatszögeket, majd számolunk, megkapjuk a választ, ami $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$.



Alternatív megoldás. Legyen r a kör sugara! Mindkét hatszöget feloszthatjuk 6 szabályos háromszögre; a beírt hatszögnél a háromszögek magassága $\frac{1}{2}\sqrt{3}\,r$, míg a köréírt hatszögnél r. Így a hosszúságok közti méretarány $k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, ezáltal a területek közti méretarány $k^2 = \frac{3}{4}$.

21. Feladat Egy ember n-edik születésnapját akkor hívjuk *négyzetszületésnapnak*, ha $n > 1$ és ha egy p prímszám osztója n-nek, akkor p^2 is osztója n-nek. Például $n = 8 = 2^3$ négyzetszületésnap, viszont $n = 56 = 8 \cdot 7$ nem az. Jenő papa ebben az évben ünnepelte 196. születésnapját. Hány négyzetszületésnapja volt már életében?

Eredmény. 20

Megoldás. Bármely négyzetszületésnapnak a p^k kifejezés egy vagy több osztójából kell állnia, ahol $k > 1$. Az összes 196-nál nem nagyobb ilyen osztó $S = \{4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 125, 128, 144, 169, 196\}$. Láthatjuk, hogy S bármely két vagy több 27-nél nagyobb tagjának szorzata vagy önmaga is S tagja, vagy nagyobb, mint 196. A 27-nél nem nagyobb számok esetében csak $8 = 2^3$ és $27 = 3^3$ nem négyzetszám. Mivel négyzetszámok szorzata négyzetszám, az eredmény vagy S tagja lenne, vagy nagyobb lenne mint 196. Végül pedig azok a szorzatok, amelyekben 8 vagy 27, valamint S egy másik tagja szerepel, és kisebbek 196-nál, de nincsenek még S-ben, a $27 \cdot 4 = 108$ és a $8 \cdot 9 = 72$. Ebből következik, hogy a keresett négyzetszületésnapokból $18 + 2 = 20$ van.

22. Feladat A Matematikai Menet nevű, igényességet mellőző matematikaverseny már 10 éve zajlik. Az n. évben a versenyen feladott feladatok száma mindig $n+2$ volt, és mindegyik feladatot a szokásos módon 1-től $n+2$-ig számoztak. A verseny 11. évében a szervezők szeretnének mindegyik korábbi évből egy-egy feladatot átvenni, hogy így 10 feladatból álló feladatsort tudjanak összerakni, ahol az 1-től 10-ig számozott feladatok megtartják a korábban kapott számukat. Hányféle különböző feladatsort tudnak összerakni, ha a korábbi években nem szerepelt kétszer ugyanaz a feladat?

Eredmény. $3^8 \cdot 2 = 13122$

Megoldás. A szervezők három feladat közül választhatnak az 1. évből. A második évből a maradék $4 - 1 = 3$ feladat közül választhatnak, mivel az egyik feladatsorszám már foglalt. Könnyen látható, hogy ez a minta megmarad a többi évre is, vagyis a k-adik év feladataiból válogatva már $k-1$ feladat nem elérhető a korábbi döntés(ek) miatt, ezért csak három lehetőség marad egészen a 9. évig, amikor megjelenik a 11-es sorszámú feladat, ami már túl nagy, így itt már csak két lehetőség közül tudnak választani. Végül pedig a 10. év feladatai közt szerepel a 11-es és 12-es sorszámú, amelyeket nem lehet választani, így ebből az évből csupán egy feladat marad választható. Összességében $3^8 \cdot 2 = 13122$ különféle feladatsort tudnak összeállítani így.

23. Feladat Találjátok meg azt a legkisebb pozitív egész számot, aminek első számjegye 1 és igaz rá az alábbi állítás: amikor az 1-es számjegyet áttesszük a szám végére, az így kapott szám az eredeti háromszorosa.

Egy példa az első számjegy áthelyezésére: $174 \to 741$.

Eredmény. 142857

Megoldás. Mivel tudjuk, hogy a szám utolsó számjegye 1, megpróbálhatjuk visszafejteni a számot a következőképp:

$$\begin{aligned}
\ldots x \cdot 3 = \ldots 1 &\Rightarrow x = 7 \\
\ldots y7 \cdot 3 = \ldots 71 &\Rightarrow y = 5 \\
\ldots z57 \cdot 3 = \ldots 571 &\Rightarrow z = 8 \\
\ldots t857 \cdot 3 = \ldots 8571 &\Rightarrow t = 2 \\
\ldots s2857 \cdot 3 = \ldots 28571 &\Rightarrow s = 4 \\
\ldots r42857 \cdot 3 = \ldots 428571 &\Rightarrow r = 1.
\end{aligned}$$

És valóban, $142857 \cdot 3 = 428571$ megfelel az állításnak.

Alternatív megoldás. Bármely legalább kétjegyű, 1-gyel kezdődő pozitív egész szám felírható $10^k + a$ alakban, ahol $k \geq 1$ és a egy k-jegyű szám. Miután áttesszük az 1-es számjegyet az elejéről a végére, a szám átváltozik $10a + 1$ alakúra. Tehát a következő egyenletet kell megoldanunk a-ra és k-ra:

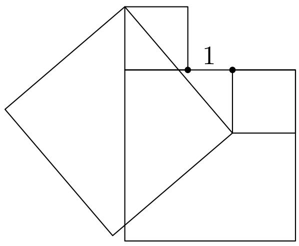
$$3 \cdot (10^k + a) = 10a + 1;$$

ezt egyszerűsíthetjük:

$$3 \cdot 10^k - 1 = 7a.$$

A bal oldalon lévő szám nem más, mint egy 2-es számjegy, amit k darab kilences követ. Keressük meg a kellő számú kilencest úgy, hogy megpróbáljuk elosztani $2999\ldots$-et 7-tel addig, amíg eltűnik a maradék. Így megkapjuk, hogy $a = 42857$, ami a 142857 megoldáshoz vezet.

24. Feladat A képen látható két pár egybevágó (pozitív oldalhosszúságú) négyzet konfigurációja, ahol a jelölt pontok távolsága 1. Mi a négy négyzet területének összege?

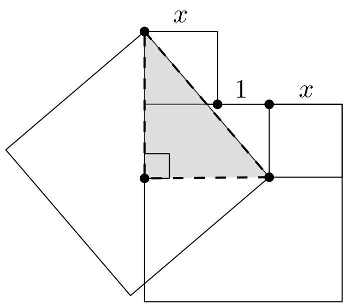


Eredmény. 58

Megoldás. Ha a kisebb négyzetek oldalait elnevezzük x-nek, a képen szürkére színezett derékszögű háromszögre pedig a Pitagorasz-tételt alkalmazzuk, akkor megkapjuk, hogy

$$(2x)^2 + (1 + x)^2 = (1 + 2x)^2.$$

Ezt az egyenletet egyszerűsíthetjük $x^2 = 2x$-re, amiből következik, hogy $x = 2$. Tehát a válasz $2(2^2 + 5^2) = 58$.



25. Feladat Krisztián, a falmászó egy függőleges fal tetejéről ereszkedik le. Ez azt jelenti, hogy ő a kötél egyik végéhez van kötve, a kötél átmegy egy rögzített ponton a fal tetején, majd leér Lukácshoz, aki a földön áll és kézzel engedi lejjebb csúszni a kötelet. A kötél rugalmas és Krisztián súlyától a terhelt része (Krisztián és Lukács között) 20 %-kal kinyúlik. A kötél meg van jelölve a felénél, és ahogy Krisztián egyre lejjebb ereszkedik, a jelöléssel akkor találkozik, amikor eléri a fal magasságának földtől számított egyharmadát. Ettől megnyugszik, mert biztos lesz, hogy a kötél elég hosszú, és elkezd gondolkodni azon, hogy vajon milyen magas az egész fal. Amikor földet ér és a kötél még ugyanolyan feszes, még mindig marad 10 méter szabad kötél Lukács mögött. Az emberek magasságát és a megkötött csomók kötélhosszúságát figyelmen kívül hagyva, mi a fal teljes magassága méterben?

Eredmény. 18

Megoldás. Legyen a kötél nyugalmi hossza l és a fal magassága h! Amikor a falmászó eléri a jelölést, akkor a kötél (kinyújtott) fele kétszerese a falmászó fal tetejétől mért távolságának, így teljesül a következő egyenlet:

$$\frac{6}{5} \cdot \frac{l}{2} = 2 \cdot \frac{2h}{3}.$$

Amikor a falmászó földet ér, hasonlóképp megkapjuk, hogy

$$\frac{6}{5}(l - 10) = 2h,$$

amit könnyen megoldhatunk, ha behelyettesítjük $l = \frac{20h}{9}$-et az első egyenletből, és megkapjuk a megoldást, ami $h = 18$.

26. Feladat Egy fiókban van n darab zokni. Ha két zoknit veszünk ki véletlenszerűen anélkül, hogy visszatennénk őket, annak az esélye, hogy mindkettő fekete színű, 2/15. Mi az n lehető legkisebb értéke?

Eredmény. 10

Megoldás. Legyen b a fekete zoknik száma. Ekkor annak a valószínűsége, hogy mindkét zokni fekete, $\frac{b}{n} \cdot \frac{b-1}{n-1}$. Mivel ez a kifejezés megegyezik $\frac{2}{15}$-del, a következő egyenletnek muszáj teljesülnie:

$$15 \cdot b \cdot (b-1) = 2 \cdot n \cdot (n-1).$$

Mivel 3 és 5 is osztója a bal oldalnak és mindketten relatív prímek 2-vel, biztosan osztói $n \cdot (n-1)$-nek a jobb oldalon. Nézzük meg az egyenletet 3 és 5 kisebb többszöröseivel, és vegyük észre, hogy ha $n = 6$, akkor $15 \cdot b \cdot (b-1) = 2 \cdot 6 \cdot 5 = 60$. Azonban a $b \cdot (b-1) = 4$ egyenletnek nincs egész szám gyöke, így $n = 6$ nem lehetséges megoldás. Ha $n = 10$, akkor $b \cdot (b-1) = 12$-re megoldás a $b = 4$. Ezáltal a lehető legkisebb n-érték 10.

27. Feladat Találjátok meg a legnagyobb egész számot, ami megfelel az alábbiaknak:

- pontosan hét számjegyű,
- nincs két egyforma számjegye,
- többszöröse 11-nek.

Eredmény. 9876504

Megoldás. A 11-gyel való osztás szabályát fogjuk alkalmazni: egy szám akkor és csak akkor osztható 11-gyel, ha a páros és páratlan helyiértékén álló számjegyei összegének különbsége osztható 11-gyel.

Az adott számú számjeggyel rendelkező számok közül (jelen esetben a hétjegyűek közül) a legnagyobbak azok, amelyek a legnagyobb számjegyekkel kezdődnek. Így kezdjük a megoldás keresését azzal, hogy leírjuk a számjegyeket 9-től kezdve lefelé haladva! Ha leírjuk a 98765-öt, láthatjuk, hogy a „páratlan” helyiértékek összege $9 + 7 + 5 = 21$ és a „páros” helyiértékeké $8 + 6 = 14$. A kettő közti különbség 7, és 11-gyel oszthatóvá kell tennünk úgy, hogy pontosan két számjegyet használunk fel a $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ halmazból. Ennek egyetlen módja, ha 0-t adunk a „párosokhoz” és 4-et a „páratlanokhoz”, ezzel megkapva a 9876504 eredményt. mivel az összes többi, kritériumoknak megfelelő számnak 98765-nél kisebb ötjegyű sorozattal kellene kezdődnie, valóban ez a lehető legnagyobb ilyen szám.

Alternatív megoldás. Kezdjük a legnagyobb különböző számjegyekből álló hétjegyű számmal, ami 9876543. Vagy a 11-gyel való osztás szabályát, vagy írásbeli osztást alkalmazva jöjjünk rá, hogy ez a szám nem osztható 11-gyel, viszont 9876537 igen, és ez 11 legnagyobb többszöröse, ami kisebb, mint az a szám, amiből kiindultunk. Mivel ennek viszont nem különbözőek a számjegyei, kivonunk belőle 11-et és megnézzük a kapott számot is a számjegyek különbözősége szempontjából. Néhány lépés múlva

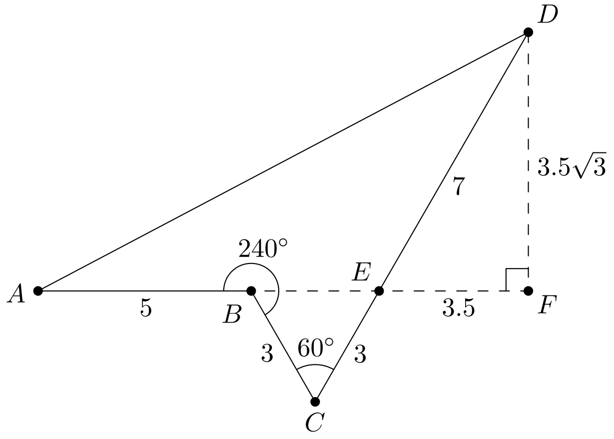
$$9876537 \longrightarrow 9876526 \longrightarrow 9876515 \longrightarrow 9876504$$

eljutunk a keresett számig, ami 9876504.

28. Feladat Legyen az $ABCD$ négyszög oldalainak hossza $AB = 5$, $BC = 3$ és $CD = 10$. A B csúcsnál lévő belső szög 240°, míg a C csúcsnál lévő 60°. Számoljátok ki az AD oldal hosszát!

Eredmény. 13

Megoldás. Rajzoljuk be az ábrán látható BCE szabályos háromszöget úgy, hogy E a CD szakaszon helyezkedik el. Ekkor AED olyan háromszög, ahol $AE = 8$, $ED = 7$ és $DEA\sphericalangle = 120°$. Így a koszinusztétel alapján $AD^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \cos 120° = 169$, tehát $AD = 13$.



Alternatív megoldás a koszinusztétel használata nékül. Ha az AED háromszöget meghosszabbítjuk egy 7 oldalhosszúságú szabályos háromszög felével, tudjuk használni a Pitagorasz-télelt, hogy megkapjuk $AD^2 = (5+3+3{,}5)^2 + (3{,}5\cdot\sqrt{3})^2 = 169$-et.

29. Feladat Hány pozitív egészekből álló rendezett (a, b, c, d) számnégyes elégíti ki a következő egyenletet?

$$2024 = (2 + a) \cdot (0 + b) \cdot (2 + c) \cdot (4 + d)$$

Eredmény. 18

Megoldás. Először is bontsuk prímtényezőire a 2024-et:

$$2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23.$$

Mivel a, b, c és d pozitív egész számok, tudjuk, hogy $2 + a \geq 3$, $2 + c \geq 3$ és $4 + d \geq 5$. Az egyenlet jobb oldalán 1-es vagy 2-es szorzótényező csak egyszer fordulhat elő $(0 + b)$-ben, illetve 4-es tényező is csak egyszer fordulhat elő $(2 + a)$-ban vagy $(2 + c)$-ben.

Mivel az egyenlet jobb oldalán lévő szorzatnak négy tényezője van, négy lehetséges felbontása van 2024-nek, amelyekben legfeljebb egy tényező lehet kisebb 4-nél, vagyis

$$2024 = 1 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 23 \quad \text{és} \quad 2024 = 1 \cdot 4 \cdot 22 \cdot 23 \quad \text{és} \quad 2024 = 1 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 46 \quad \text{és} \quad 2024 = 2 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 23.$$

Az első felbontásnál $b = 1$ és a fennmaradó tényezőket kioszthatjuk $a + 2$, $c + 2$ és $d + 4$ között bárhogy, ezáltal 6 megoldást eredményezve. A második felbontásnál $b = 1$, ezután pedig vagy $a + 2 = 4$, vagy $c + 2 = 4$. És mindkét esetben kétféle módon osztható fel a másik két tényező, tehát ennek a felosztásnak 4 megoldása van. Ugyanezen az elven a harmadik és negyedik felbontásnak is négy-négy megoldása van. Tehát összességében 18 különböző számnégyes létezik mint lehetséges megoldás:

2024 felbontása	megoldás			
	a	b	c	d
$2024 = 8 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 23$	6	1	9	19
$2024 = 8 \cdot 1 \cdot 23 \cdot 11$	6	1	21	7
$2024 = 11 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 23$	9	1	6	19
$2024 = 11 \cdot 1 \cdot 23 \cdot 8$	9	1	21	4
$2024 = 23 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 11$	21	1	6	7
$2024 = 23 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 8$	21	1	9	4
$2024 = 4 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$	2	2	9	19
$2024 = 4 \cdot 2 \cdot 23 \cdot 11$	2	2	21	7
$2024 = 11 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 23$	9	2	2	19
$2024 = 23 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 11$	21	2	2	7
$2024 = 4 \cdot 1 \cdot 22 \cdot 23$	2	1	20	19
$2024 = 4 \cdot 1 \cdot 23 \cdot 22$	2	1	21	18
$2024 = 4 \cdot 1 \cdot 46 \cdot 11$	2	1	44	7
$2024 = 4 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 46$	2	1	9	42
$2024 = 22 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 23$	20	1	2	19
$2024 = 23 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 22$	21	1	2	18
$2024 = 46 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 11$	44	1	2	7
$2024 = 11 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 46$	9	1	2	42

30. Feladat Legyen x és y két pozitív egész szám, amelyekre igaz, hogy

$$2^x \cdot 3^y = \left(24^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{60}}\right) \cdot \left(24^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{60}}\right)^2 \cdot \left(24^{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{60}}\right)^3 \cdots \left(24^{\frac{1}{60}}\right)^{59}.$$

Adjátok meg $x + y$ értékét!

Eredmény. 3540

Megoldás. Mivel $2^x \cdot 3^y = 24^k$, tudjuk, hogy

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{60} + \frac{2}{60} + \cdots + \frac{59}{60}\right) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \cdots + \frac{59}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 + 59) \cdot 59}{2} = \\ &= 15 \cdot 59. \end{aligned}$$

Ebből következik $2^x \cdot 3^y = (2^3 \cdot 3^1)^{15 \cdot 59}$, ami azt jelenti, hogy $x = 3 \cdot 15 \cdot 59 = 45 \cdot 59$ és $y = 15 \cdot 59$. Tehát $x + y = 60 \cdot 59 = 3540$.

31. Feladat Anna imádja az almát, kifejezetten a 18 elem hosszú, piros- és zöldalmákból álló sorozatokat, amelyek úgy vannak elrendezve, hogy bennük bármely egybefüggő egytucat almából álló sor legalább hét zöldalmát tartalmaz. Hány ilyen, legfeljebb összesen nyolc zöldalmát tartalmazó sorozat létezik?

Eredmény. 21

Megoldás. Vizsgáljuk egy pillanatra csak az első és utolsó tucat almát! Ha a középső féltucatnyi almasor (vagyis a 7–12. helyen álló almák) kizárólag zöldalmákból áll, akkor az első és az utolsó tucat almából is csak egy-egy zöld hiányzik, amit könnyen korrigálhatunk úgy, hogy az első és az utolsó féltucat alma közé bárhová elhelyezünk egy-egy zöldet, így összesen nyolc zöldalma elég a feltétel teljesítéséhez. Ha a középső féltucat alma közül valahány piros, akkor több zöldalma kell összesen, hiszen mindegyik középső féltucatból eltávolított zöldalma helyett kettőt kell behelyeznünk (egyet az első féltucatba, egyet az utolsó féltucatba). Így hát 8 a zöldalmák minimális mennyisége, melyek közül hatot mindenképp középre kell helyeznünk, egyet az első féltucat közé, egyet pedig a sorozat végén lévő féltucat közé.

Azonban az első és utolsó zöldalmát nem helyezhetjük el tetszőlegesen. Ahhoz, hogy mindegyik egybefüggő egytucat almára teljesüljön a feltétel, a két szélső zöldalma közti távolság nem lehet több 12-nél, például ha az első zöldalma a 2-es helyre kerül, akkor az utolsó a 13-as vagy a 14-es helyre kerülhet. Az első zöldalma elhelyezkedésétől függően tehát az utolsó zöldalma elhelyezésére 1-től 6-ig terjedő lehetőség van. Ezeket összeadva megkapjuk, hogy $1+2+3+4+5+6 = 21$ lehetséges sorozat létezik.

32. Feladat Ferkónak 1 Ft, 2 Ft és 5 Ft értékű érméi vannak. 1 Ft-osból 33 db van neki, 2 Ft-osból 106 db, 5 Ft-osból pedig 31 db. Két halomba akarja szétosztani őket úgy, hogy mindkettőben azonos számú érme legyen és a két halom összértéke megegyezzen, hogy majd az egyik kupacot a húgának adja. Hányféleképpen tudja összeállítani azt a kupacot, amit a húgának ad? Az azonos értékű érmék megkülönböztethetetlenek.

Eredmény. 12

Megoldás. Legyen a, b és c rendre a Ferkó húgának adott kupacban lévő 1 Ft-os, 2 Ft-os és 5 Ft-os érmék száma. Így létrejönnek a következő egyenletek:

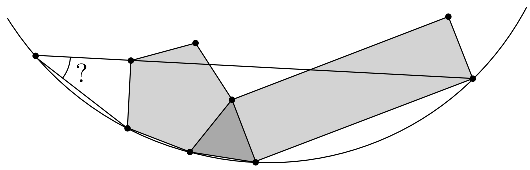
$$a + b + c = \frac{1}{2}(33 + 106 + 31) = 85,$$

és

$$a + 2b + 5c = \frac{1}{2}(33 + 2 \cdot 106 + 5 \cdot 31) = 200.$$

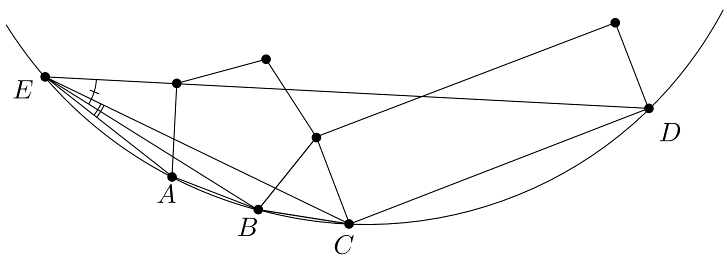
Ha kivonjuk az első egyenletet a másodikból, megkapjuk, hogy $b + 4c = 115$. Ennek az egyenetnek $b = 115 - 4c$ alakban felírható megoldásai vannak minden c-re. Azonban a b-re vonatkozó $0 < 115 - 4c < 106$ megszorítások feltételezik, hogy $c \in \{3, 4, \ldots, 28\}$. De nem mindegyik megoldásnak van értelmezhető eredménye az 1 Ft-os érmék számára. Ezért be kell vezetnünk a $0 \le 85 - (115 - 4c + c) = -30 + 3c \le 33$ kitételt c-re. Ebből láthatjuk, hogy c-nek csak a $\{10, 11, \ldots 21\}$ halmazból kikerülő értékei vezetnek elfogadható megoldáshoz. Tehát összesen 12 lehetséges mód van a szétosztásra.

33. Feladat Az ábrán egy szabályos háromszög, egy szabályos ötszög és egy téglalap úgy helyezkedik el, hogy a csúcsaik egy része ráfekszik egy körre (amelynek csak egy ívét látjuk). Adjátok meg a kérdőjellel jelölt szög méretét fokban!



Eredmény. 36°

Megoldás. Elevenítsük fel azt a tényt, hogy egy adott ω kör esetén az a szög, mely alatt egy, az ω köríven fekvő Z pontból egy XY körív látszik (melynek végpontjai szintén az ω körön fekszenek) csak attól függ, hogy a Z pont az X és Y pontok által meghatározott két körív közül melyiken fekszik, és a két lehetséges szög összege 180°.



A mi helyzetünkben, néhány pontot elnevezve a fenti kép szerint, illetve a szabályos ötszögek és háromszögek ismert belső szögei alapján

$$AEC\sphericalangle = 180^\circ - ABC\sphericalangle = 180^\circ - 60^\circ - 108^\circ = 12^\circ.$$

Hasonlóan,

$$BED\sphericalangle = 180^\circ - BCD\sphericalangle = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ.$$

Végül, mivel ABC egy egyenlő szárú háromszög,

$$BEC\sphericalangle = BAC\sphericalangle = \frac{180^\circ - 108^\circ - 60^\circ}{2} = 6^\circ,$$

és így a három szög átfedéseiből kiszámítható, hogy

$$AED\sphericalangle = 12^\circ + 30^\circ - 6^\circ = 36^\circ.$$

34. Feladat Hányféleképpen tudunk 9 bástyát elhelyezni egy 4×4-es sakktáblán úgy, hogy mindegyik bástyát támadja legalább egy másik bástya? Két bástya akkor támadja egymást, ha ugyanabban a sorban vagy oszlopban állnak.

Eredmény. 11296

Megoldás. Számoljuk meg azokat az elrendezéseket, ahol legalább egy bástyát nem támad egy másik bástya sem. Egy ilyen bástyának egyedül kell lennie a sorában és az oszlopában is, ami azt jelenti, hogy legfeljebb egy ilyen bástya lehet a táblán. Bármelyik mezőre elhelyezhetjük, $4 \cdot 4 = 16$ módon. A hozzá tartozó sort és oszlopot kivéve marad kilenc mező, ahová el kell helyeznünk a maradék nyolc bástyát. Az üresen maradó mezőt 9-féleképp választhatjuk ki. Összesen $16 \cdot 9 = 144$ különböző módon rendezhetjük el így a bástyákat. Annak az összes módja, hogy tizenhat mezőből kilencet kiválasszunk, $\binom{16}{9} = 11440$, tehát a keresett eredmény $11440 - 144 = 11296$.

35. Feladat Találjátok meg a legnagyobb N pozitív egész számot, ami nem prímszám és az N-en kívüli összes osztója kisebb mint 100.

Eredmény. 9409

Megoldás. Mivel N nem prímszám, vagy egyenlő 1-gyel, vagy létezik egy $p < N$ prímszám, ami osztója N-nek. A $p < 100$ kikötés elvezet minket ahhoz, hogy

$$p \leq 97.$$

Vegyük észre, hogy $N = 97^2 = 9409$ eleget tesz a feltételeknek.

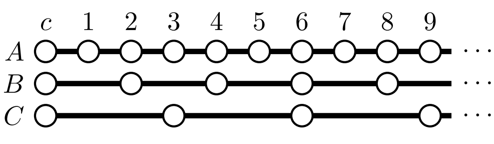
Feltételezzük, hogy létezik egy $N' > 9409$ szám, ami szintén kielégíti a feltételeket. Ha $p \leq 97$ olyan prímszám, ami osztója N'-nek, akkor $\frac{N'}{p}$ hányadosa 97-nél nagyobb egész szám. Ebből következik, hogy $\frac{N'}{p} \in \{98, 99\}$, hiszen N' minden osztójának 100-nál kisebbnek kell lennie. Viszont ekkor N' osztható $k \in \{2, 3\}$-val, és a megadott feltételből következik, hogy

$$N' = k \cdot \frac{N'}{k} \leq 3 \cdot 99 < 97^2,$$

ami ellentmondás.

Ezért $N = 9409$ a keresett szám.

36. Feladat Vonalvárosban van három buszjárat, egy központi buszállomás és $1, 2, 3, \ldots$ pozitív egész számokkal jelölt buszmegállók. Mindhárom járat a központi állomásról indul (amit az ábrán c-vel jelöltünk), majd növekvő sorrendben áthaladnak az összes megállón. Az A buszjárat mindegyik megállóban megáll $(1, 2, 3, \ldots)$, míg a B járat minden második megállóban $(2, 4, 6, \ldots)$, a C járat pedig minden harmadik megállóban $(3, 6, 9, \ldots)$. Dani a központi állomásról indul, kiválaszt egy buszt, és a 17-es megállóba szeretne eljutni. Az összes olyan megállóban, ahol a jelenlegi busza megáll, leszállhat és felülhet egy másik buszra, vagy maradhat ugyanazon a buszon a következő megállóig. Hányféleképpen tud Dani eljutni a célállomására, ha a csak várakozási időben különböző útvonalakat azonosnak tekintjük?



Eredmény. 845

Megoldás. Nevezzünk egy buszmegállót s_0-nak, ha mindhárom buszjárat megáll ott, és legyen s_k az s_0-t követő k-adik buszmegálló, ahol az A járat megáll. Számoljuk ki, hogy hányféleképpen tud Dani eljutni az s_6-os megállóig az s_0-ból.

1. Dani pontosan egyféleképpen juthat el az s_1-es megállóba, mégpedig az A buszjárattal.
2. Kétféleképpen lehet eljutni az s_2-es megállóba, vagy az A buszjárattal az s_1 megállóból, vagy a B járattal az s_0 megállóból.
3. Hogy eljusson az s_3-as megállóig, Dani vagy felült a C járatra az s_0 megállóban, vagy az A járatra az s_2 megállóban (amit 2 módon érhetett el); tehát erre 3 lehetősége volt összesen.
4. Az s_4-es megállóba eljutni vagy az A járattal lehet az s_3 megállóból, vagy a B járattal az s_2 megállóból, vagyis $3 + 2 = 5$ módja van az idejutásnak.
5. Hogy az s_5-ös megállót elérjük, mindössze egy lehetőség van, mégpedig az A buszjárattal az s_4 megállóból, így ide is 5 módon lehet eljutni.
6. Végül pedig, hogy eljussunk az s_6-os megállóba, vagy az A járatra kell felszállni az s_5 megállóban, vagy a B járatra az s_4 megállóban, vagy a C járatra az s_3 megállóban, ezért összesen $3 + 5 + 5 = 13$ módon tudunk idejutni.

Mindhárom buszjárat megáll a c-vel jelölt központi állomáson, a 6-os számú buszmegállóban, illetve a 12-es számú buszmegállóban. Mivel bármelyik olyan megálló, ahol mindegyik járat megáll, behelyettesíthető s_0-nak, 13-féleképpen juthat el Dani a c központi állomásból a 6-os megállóba és a 6-os megállóból a 12-es megállóba. Kikövetkeztethetjük, hogy ahhoz, hogy a 12-esből a 17-es megállóig elérjen, ugyanaz, mintha az s_5-ös megállóba menne az s_0-ból, tehát ennek 5 lehetséges módja van. Összességében $5 \cdot 13 \cdot 13 = 845$ különböző módon juthat el Dani a 17-es megállóba.

Alternatív megoldás. Hivatkozzunk a buszmegállókra a sorszámukkal és legyen $c = 0$. Bármely s megállót elérhetünk az A buszjárattal, szóval minden eggyel korábbi $s - 1$ megállóig tartó utazást meghosszabbíthatunk az s megállóig az A buszjárat segítségével. Ha a B járat megáll az s megállóban, akkor az utazás meghosszabbítható $s - 2$-ből s-ig. Hasonló megállapítás igaz az olyan s megállókra, ahol a C járat áll meg. Tehát ha $J(s)$-sel jelöljük azoknak az útvonalaknak a számát, ahányféleképpen Dani eljuthat s-be, akkor $s \geq 1$-re megkapjuk, hogy

$$\begin{aligned} J(s) = J(s-1) & \\ &+ J(s-2) \text{ ha } s \text{ osztható kettővel} \\ &+ J(s-3) \text{ ha } s \text{ osztható hárommal.} \end{aligned}$$

Mivel a központi állomás csak egyféleképpen „elérhető”, tudjuk, hogy $J(0) = 1$ és megállapíthatjuk $J(17)$ értékét az ismert ismétlődés segítségével; a táblázat alatti nyilak azt mutatják, mely értékek adódnak össze az adott cella értékét adva.

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$J(s)$	1	1	2	3	5	5	13	13	26	39	65	65	169	169	338	507	845	845

37. Feladat Az $\lfloor x \rfloor$ jelöli azt a legnagyobb egész számot, ami nem nagyobb, mint az x valós szám. Legyen $a_1, a_2, \ldots$ valós számok olyan sorozata, ahol $a_1 = \sqrt{3}$ és minden $n \geq 1$-re teljesül

$$a_{n+1} = \lfloor a_n \rfloor + \frac{1}{a_n - \lfloor a_n \rfloor}.$$

Mi az a_{2024} elem értéke?

Eredmény. $3034 + \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 3035 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

Megoldás. Tudjuk, hogy a_1 törtrésze $a_1 - \lfloor a_1 \rfloor = \sqrt{3} - 1$. Ezért felírható úgy, hogy $a_1 = 1 + \sqrt{3} - 1$. Számoljuk ki az első pár elemet!

$$\begin{aligned} a_2 &= 1 + \frac{1}{\sqrt{3}-1} = 1 + \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 2 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \\ a_3 &= 2 + \frac{2}{\sqrt{3}-1} = 2 + \frac{2\sqrt{3}+2}{2} = 2 + \sqrt{3} + 1 = 3 + 1 + \sqrt{3} - 1, \\ a_4 &= 4 + \frac{1}{\sqrt{3}-1} = 4 + \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 3 + 2 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}. \end{aligned}$$

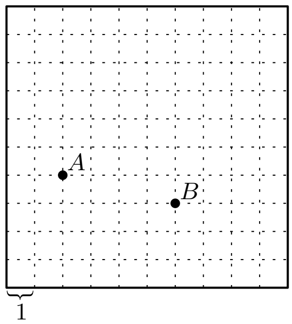
Vegyük észre, hogy az a_1 és a_3 elemeknek ugyanaz a törtrésze, $\sqrt{3}-1$, és különbségük $a_3 - a_1 = 3$. Ugyanez mondható el a_2-ről és a_4-ről, törtrészük egyaránt $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ és különbségük $a_4 - a_2 = 3$. Ez a következő feltevéshez vezet minket: $a_{2k+1} = 3k+1+\sqrt{3}-1$ és $a_{2k+2} = 3k+2+\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, ahol $k = 0, 1, \ldots$. Ennek érvényességét az összes k-ra bizonyíthatjuk indukcióval; egyértelmű $k = 1$-re és $k = 2$-re. A többi értékre elég behelyettesíteni a képleteket az $a_{n+1} = \lfloor a_n \rfloor + \frac{1}{a_n - \lfloor a_n \rfloor}$ definícióba. Figyeljük meg, hogy

$$a_{2k+2} = \lfloor a_{2k+1} \rfloor + \frac{1}{a_{2k+1} - \lfloor a_{2k+1} \rfloor} = 3k+1+\frac{1}{\sqrt{3}-1} = 3k+1+\frac{\sqrt{3}+1}{2} = 3k+2+\frac{\sqrt{3}-1}{2},$$

$$a_{2\cdot(k+1)+1} = \lfloor a_{2k+2} \rfloor + \frac{1}{a_{2k+2} - \lfloor a_{2k+2} \rfloor} = 3k+2+\frac{2}{\sqrt{3}-1} = 3k+2+\frac{2\cdot(\sqrt{3}+1)}{2} = 3\cdot(k+1)+1+\sqrt{3}-1.$$

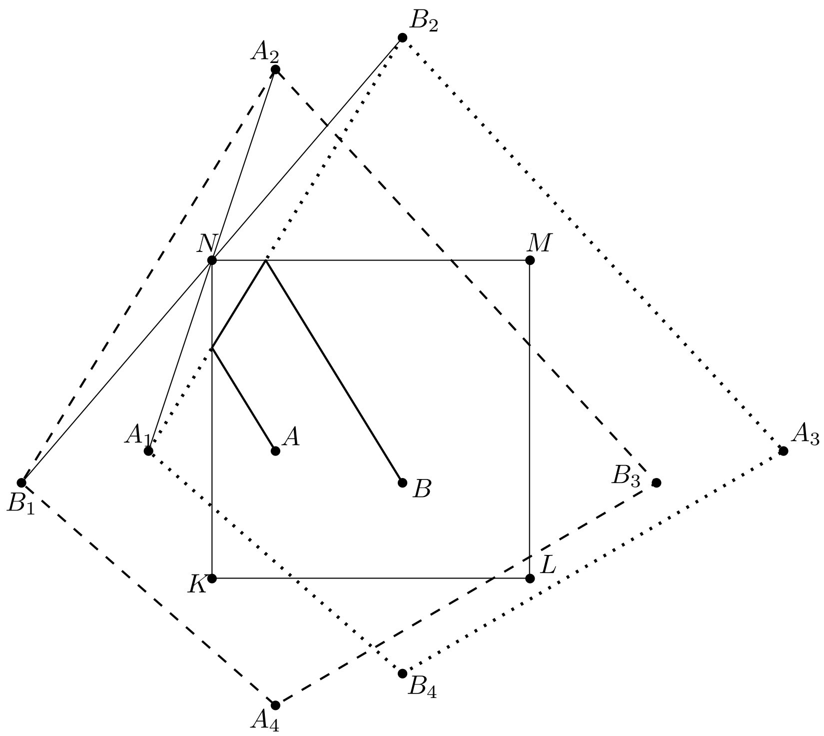
Tehát $a_{2024} = 3034 + \frac{\sqrt{3}+1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

38. Feladat Vegyünk egy 10×10-es biliárdasztalt rajta két golyóval, a képen látható elrendezésben. Mindkét golyó kiterjedés nélküli (pontszerű), mindig egyenesen mozog és amikor falba ütközik, ugyanolyan szögben pattan vissza róla. Nézzétek meg az összes lehetséges útvonalat, amelyben az A golyó pontosan két falról pattan vissza, mielőtt beleütközik a B golyóba, és számoljátok ki az utak hosszúságának négyzetösszegét!



Eredmény. 2520

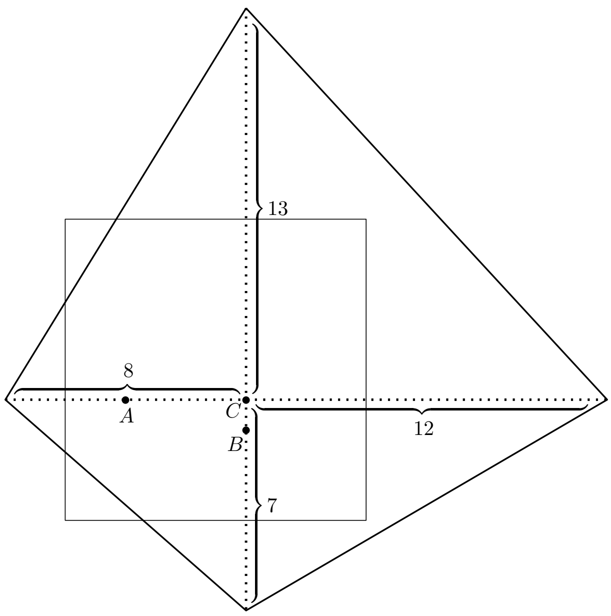
Megoldás. Először jegyezzük meg, hogy $A = [2, 4]$ és $B = [6, 3]$ a négyzet bal alsó sarkától számítva. Tükrözzük A-t és B-t a négyzet oldalaira és nevezzük el a kapott pontokat az alábbi ábrának megfelelően!



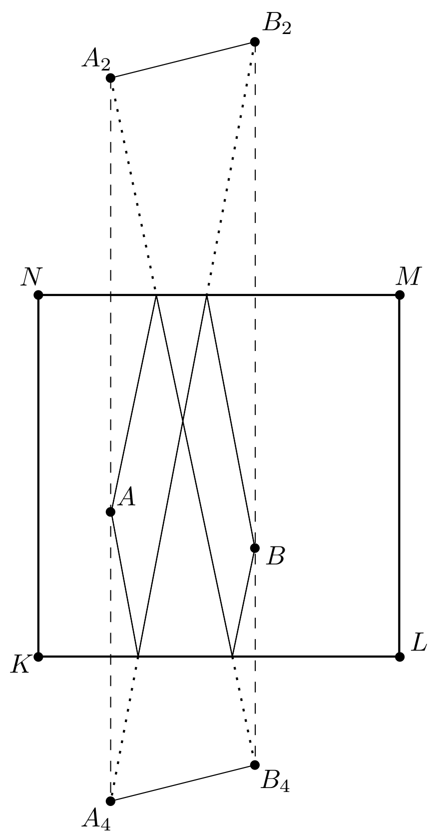
Tekintsük azt a pályát A és B között, ami KN-ről, majd MN-ről pattan vissza, és tükrözzük KN-re (illetve MN-re) az A-ból (illetve B-ből) kiinduló szakaszt. A visszaverődés törvényei miatt ekkor pontosan az A_1B_2 szakaszt kapjuk (a folytatásban úgy fogalmazunk, hogy a pályát *kiegyenesítettük* A_1B_2-vé). Megjegyzendő, hogy ez az egyetlen elfogadható pálya, ami pontosan erről a két falról pattan vissza. Egy lehetséges $A \to MN \to KN \to B$ pálya kiegyenesítése az A_2B_1 szakaszt eredményezné, ami egy pontban sem metszi a $KLMN$ négyzetet. Ez a visszaverődés tulajdonságainak köszönhető, melyek miatt N felezőpontja az A_1A_2 és a B_1B_2 szakasznak is. Tehát ez utóbbi pálya nem lehetséges.

Hasonlóképp a $KLMN$ négyzet két szomszédos oldaláról visszapattanó összes keresett pálya kiegyenesíthető az $A_1B_2A_3B_4$ négyszög (vagy az eltolt hasonmása, $B_1A_2B_3A_4$) egyik oldalává. Az összetartozó egybevágó oldalak közül pontosan egyet használunk, mert a másik ellentmondáshoz vezetne. Ebből következik, hogy ezek a pályák olyan járulékot adnak a végleges négyzetösszeghez, mint az $A_1B_2A_3B_4$ négyszög oldalhosszúságainak négyzetösszege. A Pitagorasz-tételt használva, illetve tudván, hogy a négyszög átlói merőlegesek és a $C = [6, 4]$ pontban metszik egymást (lásd az alábbi ábrán), kiszámolhatjuk, hogy

$$2(8^2 + 13^2 + 12^2 + 7^2) = 852.$$



Most már csak azokat az eseteket kell megvizsgálnunk, ahol a pálya a $KLMN$ négyzet két ellentétes faláról pattan vissza, mint ahogy az alábbi két példa mutatja:



Ebben az esetben mindkét sorrend lehetséges, vagyis a járulék egyenlő az $A_2B_2B_4A_4$ és $A_1A_3B_3B_1$ paralelogrammák átlóinak négyzetösszegével. Azt a tényt alapul véve, hogy egy paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalhosszainak négyzetösszegével, mindkét paralelogrammára megkapjuk, hogy

$$2(20^2 + 1^2 + 4^2) = 834.$$

Így tehát a teljes négyzetösszeg

$$852 + 2 \cdot 834 = 2520.$$

39. Feladat Jelölje két pozitív egész szám összefűzését (konkatenációját) $x \parallel y$, azaz ha sorban leírjuk x számjegyeit és y számjegyeit is egymás után, akkor kapjuk a $x \parallel y$ számot. Például $3 \parallel 4 = 34$, $24 \parallel 5 = 245$ és $20 \parallel 24 = 2024$. Azt mondjuk, hogy egy n pozitív egész szám *hármasosztódós*, ha van 3 különböző a, b és c pozitív egész szám (nem kezdődhetnek nullával) úgy, hogy $n = a \parallel b \parallel c$ és a osztója b-nek, továbbá b osztója c-nek. Mi a legnagyobb ötjegyű hármasosztódós szám?

Eredmény. 94590

Megoldás. Vegyük észre, hogy az a, b és c számok különbözősége és az oszthatósági kitétel miatt teljesül $2 \cdot a \leq b$ és $2 \cdot b \leq c$. Nevezzük $s(k)$-nak k számjegyeinek számát! Az oszthatósági kitételekből következik, hogy az $s(a)$, $s(b)$ és $s(c)$ mennyiségek sorban nem csökkenőek. Tehát csak két eset lehetséges:

1. A számjegyek száma $s(a) = 1$, $s(b) = 1$ és $s(c) = 3$. Ekkor az a szám legfeljebb $4 < \frac{9}{2}$. Ez a következő eredményhez vezet: $a = 4$, $b = 8$ és $c = 992$.

2. A számjegyek száma $s(a) = 1$, $s(b) = 2$ és $s(c) = 2$. Ekkor a b szám legfeljebb $49 < \frac{99}{2}$. Hogy maximalizáljuk $a \parallel b \parallel c$ értékét, feltételezzük, hogy az első számjegy 9. Így b lehető legnagyobb értéke $b = 45$, amiből következik, hogy $c = 90$. Bármely kisebb a érték kisebb eredményhez vezetne.

Tehát a lehető legnagyobb keresett szám 94590.

40. Feladat Használjuk az S_x jelölést, ahol S számjegyek egy sorozata és x egy alsó indexbe tett pozitív egész, amely nagyobb minden S-ben használt számjegynél! Ezzel azt jelezzük, hogy a számot x alapú számrendszerben kell érteni. Például $242_7 = 2 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7 + 2 = 128_{10} = 10000000_2$. Keressétek meg az összes olyan $x > 5$ egész szám összegét, melyre igaz a következő állítás:

$$2024_x \text{ osztható } 15_x\text{-szel.}$$

Eredmény. 471

Megoldás. Olyan x értéket keresünk, amire teljesül, hogy a $\frac{2x^3+2x+4}{x+5}$ tört értéke egész szám. Mivel

$$\frac{2x^3 + 2x + 4}{x + 5} = 2x^2 - 10x + 52 - \frac{256}{x + 5},$$

elégséges, ha $x + 5$ osztója $256 = 2^8$-nak. Mivel $x > 5$, ezért 10-nél nagyobb osztókat keresünk. Az összes ilyen osztó 16, 32, 64, 128 és 256. Ezáltal a keresett megoldás a következő összeg:

$$\sum_{i=4}^{8}(2^i - 5) = 2^9 - 2^4 - 25 = 512 - 16 - 25 = 471.$$

41. Feladat Van két dobozunk: az elsőben öt tökéletes és kilenc hibás villanykörte van, a második dobozban pedig kilenc tökéletes és öt hibás villanykörte. A tökéletes körték mindig működnek, a hibások viszont p valószínűséggel működnek (ahol $0 < p < 1$) és ez a p minden körtére ugyanaz. Adjátok meg p értékét, ha tudjuk, hogy az alábbi két esemény valószínűsége megegyezik:

1. Egy első dobozból véletlenszerűen választott villanykörte működik.

2. A második dobozból véletlenszerűen választva két villanykörtét, mindkettő működik.

Eredmény. 7/20

Megoldás. Forduljunk egyenesen a kombinatorikai módszerek felé: Az első esemény valószínűsége

$$P_1 = \frac{1}{14}(5+9p),$$

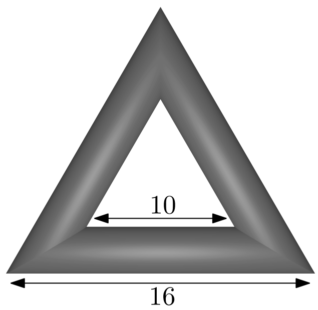
míg a második eseményre azt kapjuk, hogy

$$P_2 = \frac{1}{\binom{14}{2}}\left(\binom{9}{2} + 9\cdot 5p + \binom{5}{2}p^2\right).$$

Most az a célunk, hogy kiszámoljuk $P_1 = P_2$-t, ami egy másodfokú egyenlet és a szokott módokon megoldható. Azonban észrevehetjük, hogy $p = 1$ biztosan az egyik megoldás, így könnyedén megtalálhatjuk a másikat is Viète-formulák használatával: idézzük fel, hogy egy $a\cdot(x-r_1)\cdot(x-r_2) = 0$ másodfokú egyenlet konstans tagja $a\cdot r_1\cdot r_2$, ahol r_1 és r_2 a gyökök, és a az x^2 másodfokú tag együtthatója. Így megtalálhatjuk a másik megoldást a következőképp:

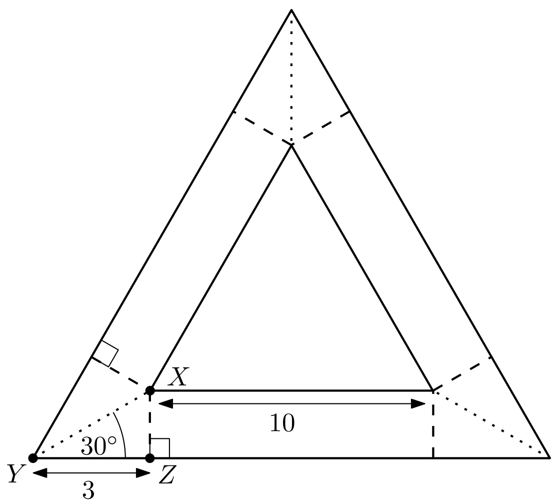
$$\frac{\frac{\binom{9}{2}}{\binom{14}{2}} - \frac{5}{14}}{\frac{\binom{5}{2}}{\binom{14}{2}}} = \frac{7}{20}.$$

42. Feladat Határozzátok meg az alábbi, három egybevágó csonkolt körhengerből álló test térfogatát! A hengerek tengelyei egy szabályos háromszög csúcsaiban metszik egymást. Megadtuk a belső és külső határolóélek hosszát (melyek ugyanúgy szabályos háromszögeket adnak ki).



Eredmény. $\frac{117\pi}{4}$

Megoldás. Nézzük a testnek azt a metszetét, amelyen a legbelső és legkülső éle található és rajzoljuk be az XZ szakaszt YZ-re merőlegesen, ahogy a képen látható.



A testet meghatározó szabályos háromszögek szimmetriája miatt tudjuk, hogy $|YZ| = 3$ és $|ZYX\sphericalangle| = 30°$, tehát $|XZ| = \sqrt{3}$. Ha az egész testet elvágjuk az ábrán jelzett pontozott és szaggatott vonalak síkjai mentén, akkor kapunk három $\frac{|XZ|}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sugarú és 10 magasságú hengert, valamint hat kisebb darabot, amelyeket kettesével összeilletszve létrehozhatunk három ugyanilyen sugarú, 3 magasságú hengert. Tehát a keresett térfogat

$$V = \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2(3\cdot 10 + 3\cdot 3) = \frac{117\pi}{4}.$$

43. Feladat Tíz páronként különböző pozitív egész számot felírtunk egy sorba.

- Bármely két szomszédos szám összege osztható hárommal,
- bármely három szomszédos szám összege osztható kettővel.

Mi a tíz szám összegének lehető legkisebb értéke?

Eredmény. 78

Megoldás. Az optimális számsor $2, 1, 5, 4, 11, 7, 8, 13, 17, 10$, ezek összege 78.

Ha az egyik szám osztható 3-mal, akkor a szomszédai is oszthatók 3-mal és így tovább, az összes szám osztható lesz hárommal. Tehát ekkor a lehető legkisebb összeg $3 \cdot (1 + 2 + \cdots + 10) = 3 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 165 > 78$, ami nem lehet optimális.

Mivel három egymást követő számnak 2-vel oszthatónak kell lennie, két lehetőségünk van mindegyik számhármasra: vagy mindhárom páros, vagy a három közül kettő páratlan és egy páros. Vizsgáljuk meg az x_i, x_{i+1}, x_{i+2} számhármast, ahol mindhárom szám páros. Ekkor az x_{i-1}, x_i, x_{i+1} számhármas nem tartalmazhat két páratlant, vagyis x_{i-1} ugyancsak páros. Ezáltal ebben az esetben mindegyik szám páros. A lehető legkisebb összeg $2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 110 > 78$, ami nem lehet optimális.

Tehát mindegyik számhármasban lennie kell két páratlan (N) számnak és egy párosnak (S). Három lehetséges elrendezés létezik:

- NSNNSNNSNN – Ha összeadjuk a 7 legkisebb páratlan és a 3 legkisebb páros számot, amelyek nem oszthatók hárommal, akkor az $1 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 2 + 4 + 8 = 87 > 78$ lehető legkisebb összeget kapjuk, így ez az elrendezés nem optimális.
- NNSNNSNNSN – Ez az elrendezés szimmetrikus az előzőre.
- SNNSNNSNNS – Ha összeadjuk a 6 legkisebb páratlan és a 4 legkisebb páros számot, amelyek nem oszthatók hárommal, akkor az $1 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 2 + 4 + 8 + 10 = 78$ lehető legkisebb összeget kapjuk, ami a keresett megoldás.

44. Feladat Zsófi törtszámokkal játszadozik. Le akar írni két pozitív egész a, b számot, amelyekre teljesül, hogy

$$\frac{2020}{2024} < \frac{a^2}{b} < \frac{999}{1000}$$

és $a + b$ a lehető legkisebb. Tegyetek ti is úgy, mint Zsófi, és adjátok be megoldásként ezt a minimális $a + b$ összeget.

Eredmény. 553

Megoldás. A megadott egyenlőtlenség ekvivalens azzal, hogy

$$\frac{1000}{999} < \frac{b}{a^2} < \frac{2024}{2020}.$$

Ezért Zsófinak úgy kell kiválasztania a-t, hogy az legyen a legkisebb pozitív egész, melyre létezik olyan b pozitív egész, amire teljesül

$$\frac{1000}{999} \cdot a^2 < b < \frac{2024}{2020} \cdot a^2 \iff a^2 + \frac{1}{999} \cdot a^2 < b < a^2 + \frac{4}{2020} \cdot a^2.$$

Ha $a < 32$, azt kapja, hogy $a^2 < a^2 + \frac{a^2}{999} < a^2 + 1$. Ha van olyan $a < 32$, amire igaz, hogy $\frac{4a^2}{2020} > 1$, akkor veheti a legkisebb a-t, ami eleget tesz ennek az egyenlőtlenségnek. Ekkor

$$\frac{4 \cdot 22^2}{2020} = \frac{44^2}{2020} = \frac{1936}{2020} < 1 \quad \text{és} \quad \frac{4 \cdot 23^2}{2020} = \frac{46^2}{2020} = \frac{2116}{2020} > 1.$$

Tehát $a = 23$ és $b = a^2 + 1 = 530$ értékekre teljesül a feladatban megadott egyenlőtlenség, így a keresett érték $a + b = 23 + 530 = 553$.

45. Feladat Egy sátor padlója háromszög alakú, amelynek oldalhosszai 1,3; 2 és 2,1 méteresek. A gyártó úgy szeretné reklámozni a sátrat, hogy egy h magasságú ember *bárhogyan* le tud benne feküdni, ami azt jelenti, hogy a padló bármelyik pontja egy lehetséges alvópozícióhoz tartozik (azaz egy h hosszú szakaszban levő pont, ahol ez a szakasz teljes egészében a háromszögben van). Legfeljebb mekkora lehet h, méterben kifejezve?

Eredmény. $\frac{126}{65}$

Megoldás. Azt állítjuk, hogy a leghosszabb szakasz, amit egy hegyesszögű háromszögbe írhatunk (mint pl. a sátor padlója) annak egy tetszőleges pontját metszve, az a leghosszabb magassága. Ha egy oldalhoz berajzoljuk az összes összekötő szakaszt a szemben lévő csúcsból, befedve a teljes háromszöget, akkor a legrövidebb behúzott szakasz az adott oldal magassága (mivel egy hegyesszögű háromszög magában foglalja mindegyik magasságvonalát). Már csak azt kell megmutatnunk, hogy nincs ennél hosszabb szakasz, ami megfelel a kitételnek. Nézzük meg a leghosszabb magasság talppontját. Ha a hozzátartozó oldal rövidebb, mint a magasság, akkor nincs hosszabb szakasz, ami beférne a háromszögbe (hiszen mindegyik talppontot tartalmazó szakasz legfeljebb olyan hosszú, mint vagy az oldalhoz tartozó magasság, vagy maga az oldal). A háromszög területére vonatkozó képletből kiderül, hogy a leghosszabb magasság a legrövidebb oldalhoz tartozik, ami esetünkben 1,3 méter. Ezáltal ha az ehhez tartozó magasság hosszabb 1,3 méternél, akkor megvagyunk.

Sok módja van az oldalhoz tartozó magasság kiszámolásának. Használhatnánk a Hérón-képletet a terület kiszámolására, majd eloszthatnánk az oldalhossz felével. Mi egy ennél egyszerűbb módszert alkalmazunk. Felszorozzuk az összes értéket 10-zel (vagyis deciméterben számolunk méter helyett). Legyen $x, 13 - x$ azok a hosszok, ahol a keresett magasság vonala metszi a 13 hosszúságú oldalt. Ezután a Pitagorasz-tétel segítségével kiszámoljuk, hogy

$$\begin{aligned} 20^2 - x^2 &= 21^2 - (13 - x)^2, &(1)\\ 26x &= 128, &(2)\\ x &= \frac{64}{13}. &(3) \end{aligned}$$

Ezáltal a magasság

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{20^2 - \left(\frac{64}{13}\right)^2}, &(4)\\ &= \frac{4}{13}\sqrt{25 \cdot 169 - 256}, &(5)\\ &= \frac{4}{13}\sqrt{9 \cdot 9 \cdot 49}, &(6)\\ &= \frac{252}{13}. &(7) \end{aligned}$$

Mivel $\frac{252}{13} > 13$, ezért a magasság nagyobb, mint az oldalhossz, mint ahogy azt szeretnénk. A végeredmény tehát méterben mérve $\frac{252}{130} = \frac{126}{65}$.

46. Feladat Keressétek meg a legnagyobb olyan q pozitív egész számot, amire igaz, hogy bármely $n \geq 55$ pozitív egész esetén q osztója a következő szorzatnak:

$$n(n + 4)(n - 23)(n - 54)(n + 63).$$

Eredmény. 40

Megoldás. Legyen a szorzat eredménye A. Ha megpróbáljuk elosztani A-t 5-tel, akkor látjuk, hogy az egyes tényezők rendre az n, $n + 4$, $n + 2$, $n + 1$, és $n + 3$ maradékosztályokban lesznek. Mivel mind különböznek, legalább egyikük 0 (mod 5), vagyis $5 \mid A$. Ha n páros, akkor A-nak három páros tényezője van, tehát $8 \mid A$. Ha n páratlan, akkor két páros tényező van, $n - 23$ és $n + 63$, melyek különbsége 86. Továbbá $86 \equiv 2 \pmod 4$, szóval pontosan egy tényező többszöröse 4-nek, vagyis $8 \mid A$. Együttesen ez azt jelenti, hogy $40 \mid A$.

Ha $n = 59$, megkapjuk, hogy 2 és 5 legnagyobb többszörösei, amik osztói A-nak, pontosan 8 és 5. Ha $n = 55$, megkapjuk, hogy $3 \nmid A$. Végül pedig bármely $p > 5$ prímre A szorzótényezői legfeljebb $5 < p$ különböző maradékosztályt foglalnak el p-vel való osztáskor, tehát mindenképp tudunk úgy n-t választani, hogy $p \nmid A$.

Ezáltal az eredmény $q = 40$.

47. Feladat Ádám, Bea, Cili, Dani és Erik két kurzuson vesz részt. Ádám és Bea csak az egyikre jár, Cili és Erik pedig csak a másikra, míg Dani mindkettőt látogatja. Roberta tudja, hogy mindkét kurzusra három-három diák jár, de azt nem tudja, hogy melyik három. Így megkér mindenkit, hogy véletlenszerűen mutasson rá valamelyik csoporttársára a kurzusokról (tehát Dani bármelyik másik diákra $\frac{1}{4}$-es valószínűséggel mutat rá stb.). Mi a valószínűsége annak, hogy Roberta képes lesz ebből rájönni, hogy Dani az, aki mindkét kurzust látogatja?

Eredmény. $\frac{3}{4}$

Megoldás. Ha egy diák rámutat egy másik diákra, akkor azt mondjuk, hogy *kapcsolat* van köztük.

Roberta akkor és csak akkor tudja beazonosítani Danit, ha mindkét kurzusról legalább egy diáknak *kapcsolata* van vele. Ha Daninak kettőnél több *kapcsolata* van, akkor már nyilvánvaló a helyzet, mert senki másnak nem lehet ilyen sok *kapcsolata*. Másképp Daninak pontosan egy-egy *kapcsolata* van mindkét kurzusból.

Az általánosság megsértése nélkül feltételezzük, hogy *kapcsolat* van Ádám – Dani és Cili – Dani között. Mivel Beának nincs *kapcsolata* Danival, szükségszerűen Ádámra mutat. Hasonlóképp Erik Cilire mutat. Ezáltal van egy *kapcsolati* útvonalunk: Bea – Ádám – Dani – Cili – Erik; mivel bármely olyan lehetséges *kapcsolati* útvonalnak, amely 4 hosszú és mind az 5 diákot magába foglalja, Dani van a közepén, így ez az eset is kitalálható.

Ellenkező esetben ha Daninak az egyik kurzussal nincs *kapcsolata*, feltételezhető, hogy csak a másikat látogatja (mivel az egyikkel való kapcsolatáról nincs információnk), és ezáltal nem megkülönböztethető az arra az órára járó társaitól.

Most kiszámolhatjuk az ezekből következő valószínűséget.

1. Feltételezzük, hogy Ádám és Bea egymásra mutatnak, míg Cili és Erik nem egymásra mutatnak. Ezek közül az előbbinek a valószínűsége $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. A második eseménynél Cili és Erik közül legalább egyikük Danira mutat, ennek valószínűsége $\left(1 - \frac{1}{4}\right)$; végül pedig Dani biztosan Bea és Ádám közül mutat valakire $\left(\frac{2}{4}\right)$. Hasonló helyzet áll fenn, ha Cili és Erik mutat egymásra, Ádám és Bea pedig nem.

2. Máskülönben Bea és Ádám közül legalább egyikük Danira mutat $\left(1 - \frac{1}{4}\right)$; ugyanez elmondható Ciliről és Erikről $\left(1 - \frac{1}{4}\right)$ és lényegtelen, hogy Dani kire mutat.

Mindent összeadva megkapjuk, hogy

$$\frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{2}{4} + \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{32} + \frac{3}{32} + \frac{9}{16} = \frac{3}{4}.$$

48. Feladat Az $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ függvény eleget tesz a következőknek:

1. $f(x) = x^2$ bármely $0 \leq x < 1$ számra és

2. $f(x+1) = f(x) + x + 1$ bármely nemnegatív valós x-re.

Keressétek meg az összes lehetséges x-et úgy, hogy $f(x) = 482$.

Eredmény. $15 + 11 \cdot \sqrt{2} = 15 + \sqrt{242}$

Megoldás. Jelölje $\{x\}$ x törtrészét! Feltéve, hogy $\lfloor x \rfloor \geq 1$, a megadott feltételek alapján számolhatunk:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\lfloor x \rfloor + \{x\}) \\ &= \lfloor x \rfloor + \{x\} + f(\lfloor x \rfloor - 1 + \{x\}) = \cdots \\ &= \sum_{i=1}^{\lfloor x \rfloor} i + \lfloor x \rfloor \cdot \{x\} + f(\{x\}) \\ &= \frac{\lfloor x \rfloor \cdot (\lfloor x \rfloor + 1)}{2} + \lfloor x \rfloor \cdot \{x\} + \{x\}^2. \end{aligned}$$

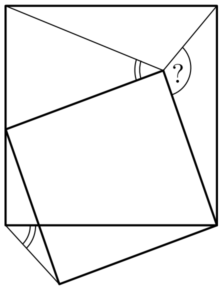
Vegyük észre, hogy a kapott képlet $\lfloor x \rfloor = 0$-ra is működik!

Most mutassuk meg, hogy f szigorúan monoton nő! Rögzítsünk egy tetszőleges $n \geq 0$ egészt! Minden $x, y \in [n, n+1)$-re, ahol $x < y$, a definíció szerint $f(x) < f(y)$. Másrészt, minden $x \in [n, n+1)$-re a $f(x) < f(n+1)$ feltétel teljesül, mivel

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\lfloor x \rfloor \cdot (\lfloor x \rfloor + 1)}{2} + \lfloor x \rfloor \cdot \{x\} + \{x\}^2 \\ &< \frac{\lfloor x \rfloor \cdot (\lfloor x \rfloor + 1)}{2} + \lfloor x \rfloor + 1 \\ &= \frac{(\lfloor x \rfloor + 2) \cdot (\lfloor x \rfloor + 1)}{2} \\ &= \frac{(n+2) \cdot (n+1)}{2} \\ &= f(n+1). \end{aligned}$$

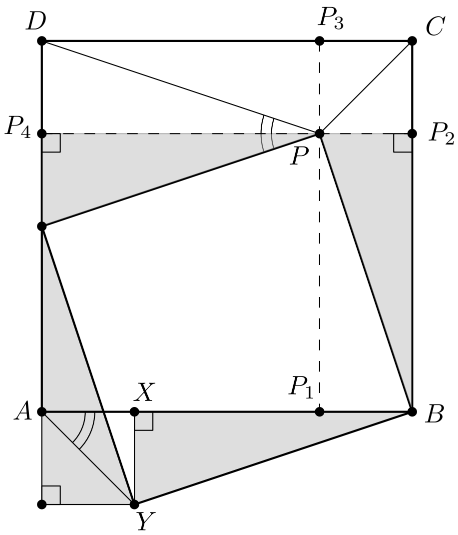
Ebből következik, hogy legfeljebb egy x megoldása van a megadott $f(x) = 482$ egyenletnek. A legnagyobb n egész, melyre $\frac{n^2+n}{2} \leq 482$ teljesül, a 30, így $\lfloor x \rfloor = 30$. Innen $482 = f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor \cdot (\lfloor x \rfloor + 1)}{2} + \lfloor x \rfloor \cdot \{x\} + \{x\}^2 = 15 \cdot 31 + 30 \cdot \{x\} + \{x\}^2$ egy másodfokú egyenletet ad $\{x\}$-re, melynek egy egyértelmű $\{x\} = -15 + \sqrt{242}$ megoldása van $[0,1)$-en. Tehát $x = 30 - 15 + \sqrt{242} = 15 + 11\sqrt{2}$.

49. Feladat Az ábrán két négyzet és két egyforma nagyságú szög látható (utóbbiakat megjelöltük). Határozzátok meg a kérdőjellel jelzett szög nagyságát fokban!



Eredmény. 112.5

Megoldás. Vegyük a keresett szögnél levő csúcsnak a nagy négyzet oldalaira való merőleges vetületeit, és jelöljük a pontokat az ábra szerint!



Könnyen belátható, hogy a négy szürke háromszög egybevágó. Mindegyik háromszög derékszögű, az átfogóik megegyeznek a kisebb négyzet oldalhosszával, és egy-egy szög α, amit az határoz meg, hogy a két négyzetet egymáshoz képest mennyivel forgattuk el. Ebből következik, hogy P_4PP_3D egy téglalap, amit a szürke háromszögek újabb két egybevágó másolata határoz meg, így a kétvonalas szög az állításban 2α. $AXY\triangle$ és $PP_2C\triangle$ egyenlő szárú derékszögű háromszögek (a szürke háromszögek egybevágósága miatt), tehát $2\alpha = 45°$, és a keresett szöget megkaphatjuk:

$$90° - \alpha + 45° = 112{,}5°.$$

50. Feladat Csilla megunta a hagyományos műveleteket, úgymint az összeadás és a szorzás. Így kitalálta a saját műveletét, a *csillagozást*. Ezt a valós számok halmazán értelmezett műveletet $a \star b$ módon jelöljük, és a következőek igazak rá:

1. $(a + b) \star c = (a \star c) + (b \star c)$,
2. $a \star (b + c) = (a \star b) \star c$.

Ha tudjuk, hogy $3 \star 2 = 54$, keressétek meg $5 \star 4$ értékét!

Eredmény. 1620

Megoldás. A második tulajdonságból $5 \star 4 = (5 \star 2) \star 2$. Ha eljelöljük $f(x) = x \star 2$-t, a feladat átfogalmazható, hogy kapjuk meg $f(f(5))$ értékét, ha tudjuk, hogy $f(3) = 54$.

Az első tulajdonságból egyértelműen következik $f(a + b) = f(a) + f(b)$. Így $54 = f(3) = f(1) + f(2) = f(1) + f(1) + f(1)$, tehát $f(1) = 18$. Ebből indukcióval könnyen megkapható, hogy $f(n) = 18n$ minden pozitív egész n-re, amiből végül $f(5) = 18 \cdot 5$ és $f(f(5)) = 18^2 \cdot 5 = 1620$.

Hogy belássuk, hogy tényleg létezik ilyen művelet, tekintsük az $x \star y = x(3\sqrt{2})^y$ definíciót! Erről az exponenciális függvény alapvető tulajdonságai alapján ellenőrizhetjük, hogy egyértelműen meghatározott minden valós x-re és y-ra, illetve kielégíti a fenti feltételeket.

51. Feladat Márk kiszínezte egy 10×11-es négyzetrács négyzeteit fehérre és feketére úgy, hogy mindegyik négyzetnek legfeljebb egy vele azonos színű szomszédja legyen (két négyzet szomszédos, ha van közös élük). Hányféleképpen tudta ezt megtenni? Azokat a színezéseket, amelyek csak forgatás után lesznek egyformák, különbözőnek tekintjük.

Eredmény. 464

Megoldás. Ha van egy 2×1-es egyszínű „dominónk”, az egész dupla sort vagy dupla oszlopot, melyet ez a dominó meghatároz, ugyanilyen dominókkal kell váltakozó színben kitölteni. Ez biztosítja, hogy minden dominó ugyanolyan irányítással legyen letéve. Gyors emlékeztetőnek: egy $n \times 1$-es tartományt dominókkal és négyzetekkel kitölteni $f(n)$ lehetséges módon lehet, ahol $f(n)$ a Fibonacci-sorozat, $f(0) = f(1) = 1$ kezdettel.

Mivel minden dominónak azonos irányítással kell rendelkeznie, és a következő sorok vagy oszlopok az első sor vagy oszlop másolatai, viszont nem szeretnénk a szokásos négyzetrácsot kétszer számolni, $f(10) + f(11) - 1$ lehetséges kitöltés lesz. Ebből a tényleges színezéseket meg lehet kapni, ha a bal felső sarokban levő mezőnek kiválasztjuk a színét, és a négyzetrácsot onnantól váltakozó színekkel töltjük fel.

Így az összes lehetőség $2 \cdot (144 + 89 - 1) = 464$.

52. Feladat Heléna nemrég tanult a mozgóátlagról. Vette a kedvenc sorozatát, a $\{F_k\}_{k=0}^{\infty}$ Fibonacci-sort, mely eleget tesz az $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ egyenletnek, ha $F_0 = 0$ és $F_1 = 1$, és létrehozta a mozgóátlagokból álló $\{m_k\}_{k=6}^{2024}$ sorozatot, ami eleget tesz az $m_k = \frac{F_k+F_{k-1}+\cdots+F_{k-6}}{7}$ egyenletnek. Az $\{m_k\}_{k=6}^{2024}$ sorozat hány eleme egész szám?

Eredmény. 252

Megoldás. Elevenítsük fel azt a tényt, hogy $\sum_{i=0}^{k} F_i = F_{k+2} - 1$! Ezt indukcióval be is lehet bizonyítani: az első lépésre $\sum_{i=0}^{0} F_i = F_0 = 0 = 1 - 1 = F_2 - 1$, és a második lépésre $\sum_{i=0}^{k+1} F_i = F_{k+1} + \sum_{i=0}^{k} F_i = F_{k+1} + F_{k+2} - 1 = F_{k+3} - 1$. Innen

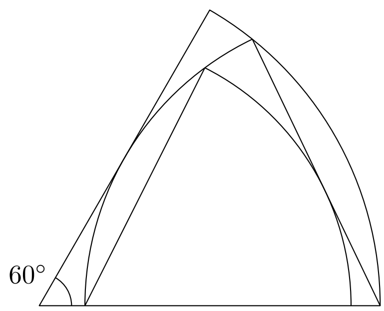
$$F_k + F_{k-1} + \cdots + F_{k-6} = \sum_{i=0}^{k} F_i - \sum_{i=0}^{k-7} F_i = F_{k+2} - F_{k-5} = 7 \cdot m_k.$$

Legyen d_l F_l 7-tel való osztási maradéka. A tagok a $\{d_l\}_{l=0}^{2024}$ sorozatban:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 1, 6, 0, 6, 6, 5, 4, 2, 6, 1, 0, 1, 1, \ldots 0$$

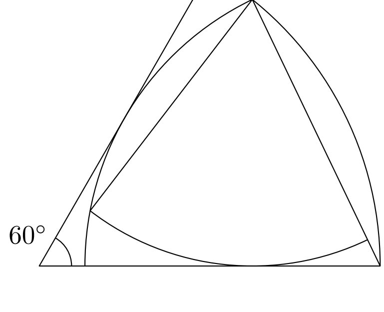
és mivel $d_l \equiv d_{l-1} + d_{l-2} \pmod 7$, egyértelmű, hogy a d_l osztási maradékok sorozata periodikus, 16-os periódussal. Minden olyan l indexre, amelyre $d_{l+2} \equiv d_{l-5} \pmod 7$, igaz $l \equiv 4, 12 \pmod{16}$. Mivel $6 \leq l \leq 2024$ és $2024 = 126 \cdot 16 + 8$, lesznek $l = 16 \cdot k + 4$ alakú megoldásaink $1 \leq k \leq 126$-ra, és $l = 16 \cdot k + 12$ alakú megoldásaink $0 \leq k \leq 125$-re. Összesen így $2 \cdot 126 = 252$ megoldás lesz.

53. Feladat Egy $60°$ középponti szögű körcikkbe az ábrán látható módon rajzoltunk még egy körcikket, majd abba egy harmadikat. Határozzátok meg a legkisebb és a legnagyobb körcikk sugarának arányát!



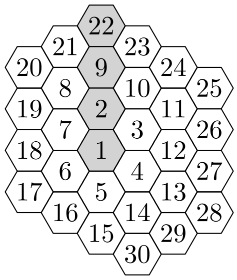
Eredmény. $\sqrt{39}/8$

Megoldás. Forgassuk el a legkisebb körcikket, ahogy a lenti ábrán látható!



Innen látszik, hogy valójában az első és a második körív metszéspontjának y-koordinátáját akarjuk meghatározni. Legyen az első körcikk középpontja a $(0,0)$-ban, és a jobb oldali csúcs $(1,0)$-ban! Ekkor a legnagyobb kör egyenlete $x^2+y^2=1$, és a középső köré $(x-1)^2+y^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$. Kivonva az első egyenletet a másodikból, $1-2x=\frac{3}{4}-1$, és így $x=\frac{5}{8}$. Innen egyszerűen következik, hogy $y=\pm\frac{\sqrt{39}}{8}$, és mivel a negatív megoldáshoz nem tartozik geometriailag értelmes elrendezés, az egyetlen megoldás $\frac{\sqrt{39}}{8}$.

54. Feladat Egy méhkaptárban 2024 hatszögletű sejt található. A kaptár közepén 1 ml méz van. Az ábrán is látható spirális alakban növekszik az egyes sejtekben lévő méz mennyisége, így az utolsó sejtben 2024 ml méz van. A méhkirálynő úgy dönt, hogy főútvonalat szeretne építeni a középső sejttől közvetlenül kifelé, az ábrán szürkével jelölt módon. Ehhez a szürke sejtekben lévő összes mézet el kell távolítani az útból. Összesen hány milliliter mézet kell odébb vinni a terv megvalósításához?



Eredmény. 17928

Megoldás. Jelöljük $H(n)$-nel a keresett főútvonalon a középső sejttől számított n-edik sejtben levő méz mennyiségét! Ekkor $H(1)=2$, $H(2)=9$ és így tovább. Most vessünk egy pillantást a középponttól pontosan n távolságra levő sejtek által alkotott hatszögre! Hogy ennek a hatszögnek bármely oldalán végighaladjunk, n lépést kell tennünk. Tehát, hogy a spirálon végighaladva megkapjuk $H(n)$-ből $H(n+1)$-et, be kell járnunk az n oldalhosszúságú hatszög öt oldalát, és az $(n+1)$ oldalhosszúságú hatszög egy oldalát. Ebből következik, hogy $H(n+1)=H(n)+5n+(n+1)=H(n)+6n+1$. A sorozat zárt alakját megtalálhatjuk:

$$\begin{aligned}H(n)&=6(n-1)+1+H(n-1)=\cdots\\&=6\cdot((n-1)+(n-2)+\cdots+1)+(n-1)+H(1)\\&=6\cdot\frac{(n-1)n}{2}+n+1\\&=3n^2-2n+1.\end{aligned}$$

Hogy megkapjuk a teljes keresett mézmennyiséget, ki kell számítanunk a főútvonalon fekvő hatszögek N számát (a középső sejtet nem számítva). Mivel pontosan 2024 hatszög van, N az a legnagyobb egész, amely teljesíti a következő feltételt:

$$\begin{aligned}H(N)&\le 2024,\\3N^2-2N&\le 2023,\\N^2-\frac{2}{3}N&\le 674+\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Mivel $27^2-\frac{2}{3}\cdot 27>729-27>675$, N értéke legfeljebb 26 lehet, és $26^2-\frac{2}{3}\cdot 26<676-18<674$ valóban teljesül, így $N=26$ a főútvonalat alkotó sejtek keresett száma.

Még meg kell határoznunk a mézmennyiséget:

$$\begin{aligned}1+\sum_{k=1}^{N}H(k)&=1+3\sum_{k=1}^{N}k^2-2\sum_{k=1}^{N}k+\sum_{k=1}^{N}1\\&=1+\frac{1}{2}N(N+1)(2N+1)-N(N+1)+N\\&=1+13\cdot 27\cdot 53-26\cdot 27+26\\&=17928.\end{aligned}$$

Egy másik mód a végső összeg meghatározására észrevenni, hogy

$$H(k)=6\cdot\frac{(k-1)k}{2}+k+1=6\binom{k}{2}+\binom{k+1}{1}$$

és visszaemlékezni a Pascal-háromszög következő azonosságára (amit egyes környékeken hokiütő-azonosságnak is neveznek):

$$\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \cdots + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

Ebből

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{k=1}^{N} H(k) &= 1 + 6\sum_{k=1}^{N}\binom{k}{2} + \sum_{k=1}^{N}\binom{k+1}{1} \\ &= 1 + 6\binom{N+1}{3} + \left(\binom{N+2}{2} - 1\right) \\ &= 27\cdot 26\cdot 25 + 14\cdot 27 \\ &= 17928. \end{aligned}$$

55. Feladat Hány különféle egész szám fordul elő az

$$\left\lfloor \frac{1^2}{2024} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2^2}{2024} \right\rfloor, \ldots, \left\lfloor \frac{2024^2}{2024} \right\rfloor,$$

felsorolásban, ahol $\lfloor x \rfloor$ a legnagyobb x-nél kisebb vagy vele egyenlő egész számot jelöli?

Eredmény. 1519

Megoldás. Mivel $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$, $n \le 1011$-re igaz, hogy $\frac{(n+1)^2}{2024} - \frac{n^2}{2024} = \frac{2n+1}{2024} \le \frac{2023}{2024} < 1$, és így $\left\lfloor \frac{(n+1)^2}{2024} \right\rfloor \le \left\lfloor \frac{n^2}{2024} \right\rfloor + 1$. Ebből tudjuk, hogy a $\left\lfloor \frac{1^2}{2024} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2^2}{2024} \right\rfloor, \ldots, \left\lfloor \frac{1012^2}{2024} \right\rfloor$ lista minden egészt tartalmaz $\left\lfloor \frac{1^2}{2024} \right\rfloor = 0$-tól $\left\lfloor \frac{1012^2}{2024} \right\rfloor = 506$-ig, így a sorozat első 1012 tagja közt 507 különböző lesz.

Másrészt, $n \ge 1012$-re igaz, hogy $\frac{(n+1)^2}{2024} - \frac{n^2}{2024} = \frac{2n+1}{2024} \ge \frac{2025}{2024} > 1$, és így $\left\lfloor \frac{(n+1)^2}{2024} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{n^2}{2024} \right\rfloor$. Tehát minden $\left\lfloor \frac{1013^2}{2024} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{1014^2}{2024} \right\rfloor, \ldots, \left\lfloor \frac{2024^2}{2024} \right\rfloor$ elem új a felsorolásban (mivel szigorúan nagyobb, mint az előző), tehát a sorozat utolsó 1012 eleme közt mind az 1012 különböző (és a sorozat első felében levő tagoktól is eltérnek).

Összesen így a sorozat $507 + 1012 = 1519$ különböző elemet tartalmaz.

56. Feladat Hány olyan (a, b, c, d) páronként különböző számokból álló rendezett számnégyes létezik, amire igaz, hogy $a, b, c, d \in \{1, 2, \ldots, 17\}$ és $a - b + c - d$ osztható 17-tel?

Eredmény. 3808

Megoldás. Szerkesszünk egy szabályos 17-szöget $P_1 \ldots P_{17}$ csúcsokkal! A feladatban szereplő $a - b \equiv d - c \pmod{17}$ állítás geometriai nyelvre fordításából P_a, P_b, P_c és P_d egy egyenlő szárú trapézt alkotnak P_aP_c és P_bP_d párhuzamos alapokkal. Ha egy csúcsot eltávolítunk, a maradék 16 csúcsot párokba lehet rendezni, ami 8 párhuzamos egyenest határoz meg, melyből bármelyik kettőt egy megfelelő trapéz alkotására lehet használni (és így kapjuk az $\{a, b, c, d\}$ halmazokat). Ilyen halmazból tehát $17 \cdot \binom{8}{2} = 476$ van, és mindegyik több rendezett számnégyest határoz meg: először ki kell választanunk, hogy melyik alap legyen P_aP_c és melyik P_bP_d, ezen felül a és c, illetve b és d páronként megcserélhetők, tehát összesen $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ lehetőségünk van. Összesen tehát $8 \cdot 476 = 3808$ ilyen rendezett számnégyes létezik.

57. Feladat Vegyünk egy $ABCD$ téglalapot és egy E pontot a téglalap CD oldalán úgy, hogy $2DE = EC$! Legyen F a BD és AE szakaszok metszéspontja! Ha tudjuk, hogy $DFA\sphericalangle = 45°$, határozzátok meg $\frac{AD}{AB}$ értékét!

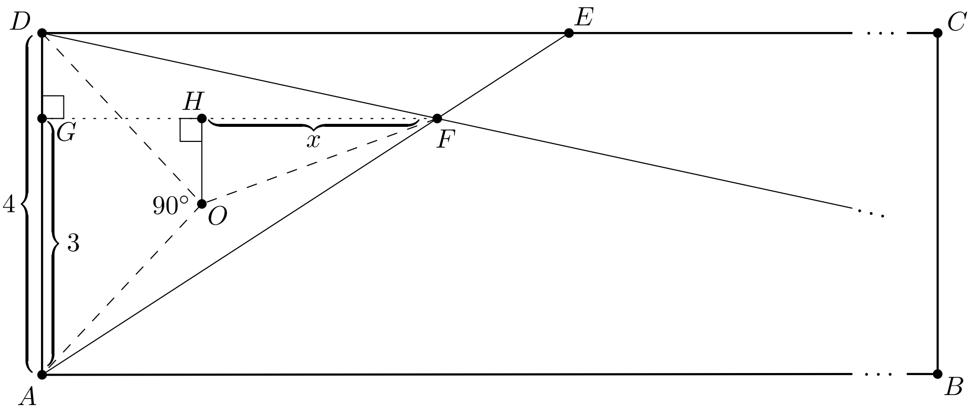
Eredmény. $\frac{\sqrt{7}-2}{3}$

Megoldás. Mivel az elrendezés skálafüggetlen, szabadon rögzíthetjük, hogy $AD = 4$. Jelöljük továbbá F-nek AD-re való merőleges vetületét G-vel, az $ADF\triangle$ köréírt körének középpontját O-val, és O GF-re való merőleges vetületét H-val! $ABF\triangle$ és $EDF\triangle$ hasonlóak $AB : ED = 3 : 1$ aránnyal, így $AG = 3$. Ezen felül $DOA\sphericalangle = 2 \cdot DFA\sphericalangle = 90°$, így $AOD\triangle$ egy egyenlő szárú derékszögű háromszög, O-nak tehát mind AB-től, mind AD-től a távolsága 2. Eljelölve az utolsó ismeretlen oldalhosszat a $HOF\triangle$-ben $x = HF$-fel, és Pitagorasz tételét alkalmazva

$$x^2 + (3-2)^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8 \Rightarrow x = \sqrt{7}.$$

Mivel $DGF\triangle$ és $DAB\triangle$ hasonlóak, a keresett arány megkapható:

$$\frac{DA}{AB} = \frac{DG}{DF} = \frac{1}{2+\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}-2}{3}.$$



58. Feladat Legyen $P(x)$ egy tizedfokú, egész együtthatós polinom, amelynek csak valós gyökei vannak és $P(x)$ osztója a $P(P(x)+2x-4)$ polinomnak. Határozzátok meg $\frac{P(2024)}{P(206)}$ értékét!

Megjegyzés: Akkor mondjuk azt, hogy egy $P(x)$ polinom osztója egy $Q(x)$ polinomnak, ha $P(x)$ és $Q(x)$ egész együtthatósak és létezik egy egész együtthatós $R(x)$ polinom, amire igaz, hogy $Q(x) = R(x) \cdot P(x)$.

Eredmény. $10^{10} = 10000000000$

Megoldás. Ha r $P(x)$ egy gyöke, akkor

$$2r-4, 2(2r-4)-4 = 4r-12, 2(4r-12)-4 = 8r-28, \dots, 2^n r - 2^{n+2} + 4, \quad n \in \mathbb{N},$$

mind gyökei $P(x)$-nek. Mivel $P(x)$-nek legfeljebb 10 valós gyöke lehet, kell lennie egy $j > i$-nek, melyre $2^i r - 2^{i+2} + 4 = 2^j r - 2^{j+2} + 4$. Ebből következik, hogy $2^i \cdot (r-4) = 2^j \cdot (r-4)$, tehát $r = 4$. Így 4 az egyetlen gyök, és $P(x) = a \cdot (x-4)^{10}$, ahol $a \neq 0$ egy valós konstans. Végül $\frac{P(2024)}{P(206)} = \left(\frac{2020}{202}\right)^{10} = 10^{10} = 10000000000$.

59. Feladat Józsi egy 2024 főből álló körben áll, ahol az egyes embereket az óramutató járása szerint megszámoztuk az $1, 2, \dots, 2024$ számokkal. Egy frizbivel játszanak. Az első helyen álló ember a harmadik helyen állónak dobja, aki ezután az ötödik helyen állónak dobja tovább, és így tovább. Mindenki a tőle balra álló ember melletti embernek dobja a frizbit (tehát mindig kihagynak egy helyet). A kihagyott illető dühös lesz, amiért nem játszhatott, és kiáll a körből. Ez a minta addig ismétlődik, amíg el nem jutnak az utolsó két játékosig. Ha Józsi benne szeretne lenni az utolsó kettőben, hova kell állnia a játék legelején? Keressétek meg a lehetséges sorszámok összegét!

Eredmény. 2978

Megoldás. Ha még az utolsó két ember is játszana, akkor a frizbit épp birtokló illető magának dobná, és ő maradna egyedüliként a körben. Hogy ennek az utolsó illetőnek a helyét megtaláljuk, gondolkodjunk következőképpen: ha 2^n ember van a körben, akkor mialatt a frizbi megtesz egy teljes kört, minden páros pozícióban levő ember kiáll, és egy hasonló felállást kapunk 2^{n-1} emberrel, ugyanúgy az első embernél levő frizbivel. Innen indukcióval beláthatjuk, hogy ez az ember lesz az utolsó. Általános esetben, ha $2^n + k$ ember van a körben, k dobás után újra egy olyan helyzetre juthatunk, ahol 2^n ember van, de ekkor a $(2k+1)$. pozícióban levő embernél lesz a frizbi. $2024 = 1024 + 1000$ ember között így a 2001. helyen álló illető a szerencsés utolsó.

Az utolsó előttinek maradó emberrel kapcsolatban azt állítjuk, hogy $2^n + 2^{n+1}$ ember esetén lesz az az első helyen álló. Kis n-ekre ez könnyen belátható: 3-, 6- vagy 12-fős körök esetén az állítás igaz. Ismét indukcióval bizonyítunk: ha $2^{n+1} + 2^{n+2}$ ember volt a körben, egy teljes kör után $2^n + 2^{n+1}$ ember marad, és ismét az elsőnél lesz a frizbi. Ha általános esetben $2^n + 2^{n+1} + k$ ember van, k dobás után ugyanúgy visszajutunk az előző esetre, miközben a frizbi a $(2k+1)$. embernél lesz. Mivel $2024 = 1024 + 512 + 488$, az utolsó előtti ember pozíciója 977, így a válasz $2001 + 977 = 2978$.

60. Feladat András frizbizik három barátjával. Az alábbi szabályt követik: Nem dobhatod vissza a frizbit ugyanannak, aki előzőleg dobta neked. András kezdte a játékot és tíz dobás után ismét Andrásnál volt a frizbi. Hányféleképpen végezhették el ezt a tíz dobást?

Eredmény. 414

Megoldás. Számoljuk össze az összes lehetséges passzsorrendet, figyelmen kívül hagyva, hogy Andrásnak kell az utolsónak lennie. Első lépésben András három embernek dobhat, majd utána minden barátja csak két lehetőség közül választhat a játék szabálya miatt. Így, ha n dobás van, $3 \cdot 2^{n-1}$ lehetséges sorozatot kapunk.

Jelöljük y_n-nel azoknak a sorozatoknak a számát, ahol az n-edik dobás után Andráshoz kerül a labda! Az n-edik dobásig $3 \cdot 2^{n-1}$ sorozatunk van összesen, ezek közül fognak kikerülni azok a sorozatok, ahol az $(n+1)$. dobás során Andráshoz kerül a frizbi. Abban az esetben nem kerülhet Andráshoz, ha nála volt az n-edik vagy az $n-1$-edik körben (mert ellenkező esetben az n-edik lépésben birtokló megsértené a visszadobásos szabályt). Ilyen sorozatból rendre y_n, illetve $2y_{n-1}$ van, tehát $y_{n+1} = 3 \cdot 2^{n-1} - y_n - 2y_{n-1}$.

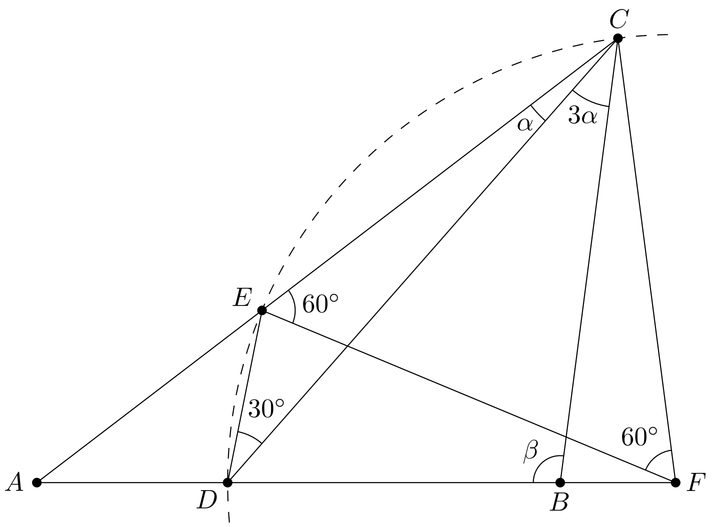
Az explicit formulát megkeresni kevésbé lenne kézenfekvő, mint y_{10}-ig kiszámítani az egyes tagokat. $y_1 = y_2 = 0$-ból az $y_{n+1} = 3 \cdot 2^{n-1} - y_n - 2y_{n-1}$ rekurzióval könnyen adódik, hogy $y_3 = 3 \cdot 2^1 - 0 - 0 = 6$, $y_4 = 3 \cdot 2^2 - 6 = 6$, $y_5 = 3 \cdot 2^3 - 6 - 12 = 6$, $y_6 = 3 \cdot 2^4 - 6 - 12 = 30$, $y_7 = 3 \cdot 2^5 - 30 - 12 = 54$, $y_8 = 3 \cdot 2^6 - 54 - 60 = 78$, $y_9 = 3 \cdot 2^7 - 78 - 108 = 198$, $y_{10} = 3 \cdot 2^8 - 198 - 156 = 414$.

Másik megoldás: Tekintsünk egy n hosszúságú sorozatot, ahol Andrásnál volt a frizbi a dobások előtt és után, de közben egyszer sem! Ha ez a sorozat a játék elején történik, akkor András 3 barátjának dobhat, amit csak kétféle folytatás követhet, ezek után viszont a passzok sorrendje egyértelmű. Ha ez a sorozat a játék közepén fordul elő, akkor Andrásnak eleve az egyik barátja dobta a játékszert, így ő csak két barátja közül választhat, majd ismét két lehetőség van a folytatásra. Az ilyen, n passzt tartalmazó sorozatok legalább 3 dobást tartalmaznak, így elegendő, ha az összesen 10 dobásunkat felosztjuk legalább háromdobásos partíciókra, és ezeket számoljuk össze. Csak a következő felosztások léteznek: 10, $3+7$, $7+3$, $6+4$, $4+6$, $5+5$, $3+3+4$, $3+4+3$ és $4+3+3$. A 10 dobást egyben tartalmazó felosztás 6 esetet ad, a két részt tartalmazó felosztások $6 \cdot 4$-et (így összesen $5 \cdot 6 \cdot 4$ ilyen eset lesz), míg a három részt tartalmazók $6 \cdot 4 \cdot 4$-et (tehát innen $3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4$ eset jön). Összesen így $6 \cdot (1 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 4) = 6 \cdot 69 = 414$ passzsorrend lehetséges.

61. Feladat Az ABC háromszög AB oldalán található D pont úgy helyezkedik el, hogy $ACD\sphericalangle = 11{,}3°$ és $DCB\sphericalangle = 33{,}9°$. Továbbá $CBA\sphericalangle = 97{,}4°$. Keressétek meg az $AED\sphericalangle$-et, ha az E pont az AC oldalon fekszik úgy, hogy $EC = BC$.

Eredmény. 41,3°

Megoldás. Vezessünk be új jelöléseket a jobb átláthatóság kedvéért: $\alpha = 11{,}3°$ és $\beta = 97{,}4°$, ekkor $DCB\sphericalangle = 3\alpha$. Továbbá legyen F egy B-től különböző pont AB-n, amire $CB = CF$.



Számítsuk ki $BCF\sphericalangle$-et: $FBC\sphericalangle = 180° - \beta$ és a $BCF\triangle$ egyenlő szárú, így $BCF\sphericalangle = 180° - 2 \cdot FBC\sphericalangle = 2\beta - 180°$. Most észrevehetjük, hogy

$$ECF\sphericalangle = \alpha + 3\alpha + 2\beta - 180° = 4 \cdot 11{,}3° + 2 \cdot 97{,}4° - 180° = 60°.$$

Mivel $CF = CB$, ami megegyezik CE-vel a feladat állítása szerint, a $CEF\triangle$ szabályos.

Ezen kívül mutassuk meg, hogy $FC = FD$: mivel $DCF\sphericalangle = 60° - \alpha$ és $CFD\sphericalangle = 180° - \beta$,

$$FDC\sphericalangle = 180° - (60° - \alpha) - (180° - \beta) = \alpha + \beta - 60° = 48{,}7° = 60° - \alpha = DCF\sphericalangle,$$

így $CDF\triangle$ egyenlő szárú, és $FC = FD$ a kívántak szerint. Ebből, azzal együtt, hogy $CEF\triangle$ szabályos, $FC = FE = FD$, másképpen megfogalmazva a C, E és D pontok egy F középpontú körön fekszenek. Tehát $CDE\sphericalangle = \frac{1}{2}CFE\sphericalangle = 30°$ és $DEC\sphericalangle = 180° - \alpha - 30°$. Végül

$$AED\sphericalangle = 180° - DEC\sphericalangle = 30° + \alpha = 41{,}3°.$$

62. Feladat Az $a > b > 1$ valós számok kielégítik a következő egyenlőtlenséget:

$$(ab+1)^2 + (a+b)^2 \leq 2(a+b)(a^2 - ab + b^2 + 1)$$

Határozzátok meg

$$\frac{\sqrt{a-b}}{b-1}$$

lehető legkisebb értékét!

Eredmény. $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Megoldás. Rendezzük át az egyenlőtlenséget a következők szerint:

$$\begin{aligned}(ab+1)^2 + (a+b)^2 &\leq 2(a+b)(a^2 - ab + b^2 + 1),\\ 0 &\leq 2a^3 + 2b^3 - a^2b^2 - a^2 - b^2 - 4ab + 2a + 2b - 1,\\ 0 &\leq (a^2 - 2b + 1)(2a - b^2 - 1).\end{aligned}$$

Mivel $a > b > 1$, $a^2 > b^2$ is teljesül, és $a^2 - 2b + 1 > b^2 - 2b + 1 = (b-1)^2 > 0$ is igaz. Így a második zárójelet alakítva

$$\begin{aligned}2a - b^2 - 1 &\geq 0,\\ 2a - 2b &\geq b^2 - 2b + 1,\\ 2(a-b) &\geq (b-1)^2,\\ \frac{\sqrt{a-b}}{b-1} &\geq \frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Az $1/\sqrt{2}$ értéket elérhetjük, például $a = 5/2$ és $b = 2$ esetén (ha egyenlőséget akarunk, $a = (b^2+1)/2$-nek teljesülnie kell), tehát ez tényleg a legkisebb értéke $\sqrt{a-b}/(b-1)$-nek.

63. Feladat Vegyük x, y és z különböző nemnulla egész számokat, melyekre igaz a következő egyenlet:

$$\frac{(x-1)^2}{z} + \frac{(y-1)^2}{x} + \frac{(z-1)^2}{y} = \frac{(x-1)^2}{y} + \frac{(y-1)^2}{z} + \frac{(z-1)^2}{x}$$

Keressétek meg

$$|64x + 19y + 4z|$$

lehető legkisebb értékét!

Eredmény. 7

Megoldás. Jelölje $\sum_{\text{cik}} Q(x,y,z)$ azt az összeget, ahol a másik két tagot $x \to y \to z \to x$ ciklikus felcserélésével kapjuk, azaz $\sum_{\text{cik}} Q(x,y,z) = Q(x,y,z) + Q(y,z,x) + Q(z,x,y)$.

Az egyenletet $xyz \neq 0$-val megszorozva és átrendezve

$$P(x,y,z) = x(x-1)^2(y-z) + y(y-1)^2(z-x) + z(z-1)^2(x-y) = \sum_{\text{cik}} x(x-1)^2(y-z) = 0.$$

Mivel P eltűnik $x = y$, $y = z$ vagy $z = x$-re, oszthatónak kell lennie $(x-y)(y-z)(z-x) = \sum_{\text{cik}} x^2(z-y)$-nal. Másrészt, mivel $P(x,y,z)$ egy negyedfokú polinom és $\sum_{\text{cik}} x^2(z-y)$ egy harmadfokú polinom, a hányadosnak elsőfokúnak kell lennie:

$$P(x,y,z) = \left(\sum_{\text{cik}} x^2(z-y)\right) \cdot (ax + by + cz + d).$$

Továbbá $xy - xz + yz - yx + zx - zy = \sum_{\text{cik}} x(y-z) = 0$, így

$$\begin{aligned}P(x,y,z) &= \sum_{\text{cik}} \big(x^3(y-z) - 2x^2(y-z) + x(y-z)\big)\\ &= \sum_{\text{cik}} \big(x^3(y-z) - 2x^2(y-z)\big) + 0\\ &= \left(\sum_{\text{cik}} x^2(z-y)\right) \cdot (ax + by + cz + d).\end{aligned}$$

Innen következik, hogy a-nak mindenképpen -1-nek kell lennie, hogy $x^2(z-y) \cdot ax = x^3(y-z)$ teljesüljön, és hasonlóan $b = c = -1$ is szükséges. $x^2(z-y) \cdot d = -2x^2(y-z)$-ből megkapjuk, hogy $d = 2$. Így

$$P(x, y, z) = (x - y)(y - z)(z - x)(2 - x - y - z) = 0.$$

Mivel csak páronként különböző (x, y, z) számhármasokat keresünk, mindenképpen $x+y+z = 2$. Könnyen belátható, hogy bármely ezt teljesítő számhármas megoldja az eredeti egyenletet is.

Hogy $|64x + 19y + 4z|$ legkisebb értékét megkapjuk, vonjunk ki $4(x + y + z) - 8 = 0$-t, így

$$|64x + 19y + 4z| = |15 \cdot (4x + y) + 8|.$$

Egy $4x + y$ egész számot keresünk, ami minimalizálja a kifejezést. Ezt a minimumot egyértelműen akkor kapjuk, ha $4x + y = -1$, pl. $(x, y, z) = (-2, 7, -3)$ esetén, így a megoldás 7.