**Zadanie 1.** Pięć osób gra w grę, w której w każdej rundzie punkt zdobywa jeden z graczy. Gra kończy się gdy pewien gracz uzyska 10 punktów. Co najwyżej ile rund może zostać rozegranych?

*Wynik.* 46

*Rozwiązanie.* Na koniec gry zwycięzca ma 10 punktów, a każdy inny gracz co najwyżej 9 punktów. Sumarycznie więc może być rozegranych $10 + 4 \cdot 9 = 46$ rund.

**Zadanie 2.** Dorota ma cztery karty z liczbami 1, 2, 3 i 6 napisanymi na nich. Chce tak ułożyć wszystkie karty, by tworzyły dwie liczby $A$ i $B$ oraz liczba $A$ była wielokrotnością liczby $B$, np. $A = 36$ i $B = 12$. Na ile sposobów może to zrobić?

*Wynik.* 21

*Rozwiązanie.* Rozważmy dwa przypadki:

I. $B$ składa się z jednej karty, a $A$ z trzech. Rozważmy możliwe wartości $B$:

- $B = 1$: $A$ składa się z cyfr 2, 3, 6 ustawionych w dowolnej kolejności $\to$ 6 sposobów.
- $B = 2$: cyfrą jedności $A$ musi być 6 $\to$ 2 sposoby.
- $B = 3$: $A$ składa się z cyfr 1, 2, 6 ustawionych w dowolnej kolejności, bo suma cyfr jest podzielna przez 3 $\to$ 6 sposobów.
- $B = 6$: cyfrą jedności $A$ musi być 2 $\to$ 2 sposoby.

II. $A$ i $B$ składają się z dwóch kart. Wtedy stosunek $A/B$ jest mniejszy niż 6; może być więc równy $1, 2, 3, 4$ lub 5. Rozważmy te możliwości:

1: Ten przypadek nie zachodzi, bo oznaczałoby to, że $A = B$.

2: cyfrą jedności $A$ musi być wtedy 2 lub 6. Jeśli cyfrą jedności jest 2, to cyfrą jedności $B$ musi być 1 lub 6. W pierwszym przypadku otrzymujemy parę 32 i 16; w drugim 62 i 31 $\to$ 2 sposoby. Jeśli cyfrą jedności jest 6, to cyfrą jedności $b$ musi być 3 i otrzymujemy parę 26 i 13 $\to$ 1 sposób.

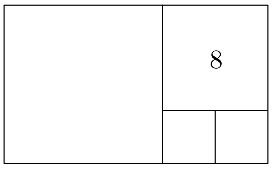
3: cyfrą dziesiątek $A$ musi być 6 lub 3. W pierwszym przypadku, cyfrą dziesiątek $B$ musi być 2; otrzymujemy parę 63 i 21. Jeśli cyfrą dziesiątek $A$ jest 3, to cyfrą dziesiątek $B$ jest 1; otrzymujemy parę 36 i 12 $\to$ 2 sposoby.

4: cyfrą dziesiątek $A$ musi być 6, a cyfrą jedności 2, aby liczba byłą parzysta. Wtedy $A = 62$ i nie jest podzielne przez 4.

5: cyfrą dziesiątek $A$ musi być 5 lub 0, a to nie jest możliwe.

Sumując, otrzymujemy 21 różnych sposobów.

**Zadanie 3.** Na obrazku znajdują się cztery kwadraty. Jeden z nich ma pole równe 8. Jakie jest pole największego z nich?




*Wynik.* 18

*Rozwiązanie.* Kwadraty te mają długości boków pozostające w stosunku 3 : 2 : 1. Zatem pole największego z nich jest równe $\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 8 = 18$.

**Zadanie 4.** Pewnego razu w parku spotkały się sroki, matematycy i centaury. Razem mieli 15 ogonów i 94 ręce. Ile było nóg?
Uwaga: Sroki mają dwie nogi, jeden ogon, ale nie mają rąk. Matematycy mają dwie ręce i dwie nogi, ale nie mają ogona. Centaury mają dwie ręce, cztery nogi i jeden ogon.

*Wynik.* 124

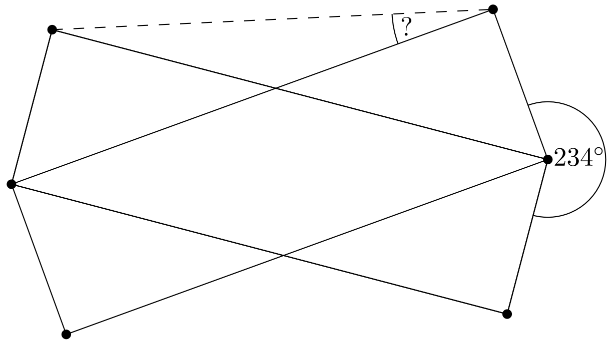
*Rozwiązanie.* Oznaczmy liczbę srok, matematyków i centaurów odpowiednio przez $s$, $m$ i $c$. Skoro łącznie jest 15 ogonów, to $s + c = 15$. Ponieważ łącznie są 94 ręce, to $2m + 2c = 94$. Łączna liczba nóg to $2s + 2m + 2c$, co jest równe $2(s + c) + (2m + 2c) = 30 + 94 = 124$.

**Zadanie 5.** W telewizorze masz trzy kanały: pierwszy, drugi i trzeci. Z każdego kanału możesz przełączyć jedynie na kanał, którego numer różni się od obecnego o jeden, przykładowo z pierwszego kanału możesz przełączyć jedynie na drugi kanał. Rozpoczynasz oglądanie drugiego kanału, a następnie zmieniasz kanał 11 razy. Ile różnych ciągów kanałów możesz w ten sposób otrzymać?

*Wynik.* 64

*Rozwiązanie.* Ciąg składa się z 12 kanałów. Wtedy kanały na nieparzystych pozycjach muszą być kanałem drugim, a dla każdy z pozostałych kanałów może być pierwszym lub trzecim. Jest sześć takich pozycji, zatem otrzymujemy $2^6 = 64$ różnych ciągów kanałów.

**Zadanie 6.** Na rysunku widoczne są dwa przystające prostokąty oraz zaznaczony kąt o mierze $234°$. Wyznacz miarę (w stopniach) kąta zaznaczonego znakiem zapytania.



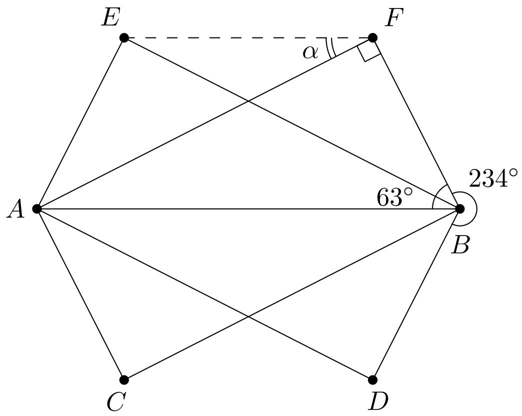

*Wynik.* 27

*Rozwiązanie.* Nazwijmy punkty jak na rysunku poniżej. Wspólna przekątna $AB$ dzieli kąt $\angle FBD$ na równe części, więc

$$\angle FBA = \frac{360° - 234°}{2} = 63°.$$

Ponadto, skoro przerywana prosta $EF$ jest równoległa do $AB$, to $\angle EFB + \angle FBA = 180°$. Odejmując kąt prosty $\angle AFB$ dostajemy

$$\alpha = 180° - 90° - 63° = 27°.$$




**Zadanie 7.** Jaka jest wartość $x^3 - 14x + 2024$, jeśli $x^2 - 4x + 2 = 0$?

*Wynik.* 2016

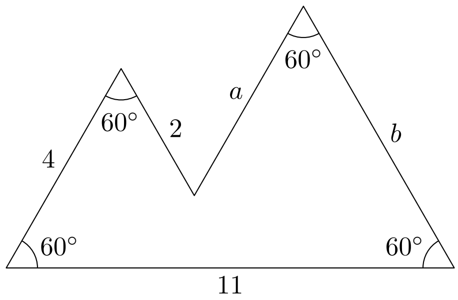
*Rozwiązanie.* Od szukanej liczby $x^3 - 14x + 2024$ odejmujemy $x(x^2 - 4x + 2) = 0$, aby pozbyć się $x^3$. Wtedy otrzymujemy $4x^2 - 16x + 2024$. Następnie chcemy pozbyć się $4x^2$, zatem odejmujemy $4(x^2 - 4x + 2) = 0$ i otrzymujemy 2016, co jest szukaną wartością wyrażenia.

**Zadanie 8.** Rafał wybrał pewną dodatnią liczbę całkowitą $n$ i zapisał liczbę jej parzystych cyfr, liczbę nieparzystych cyfr oraz liczbę wszystkich cyfr w tej właśnie kolejności. Czytając te trzy liczby jako jedną dodatnią liczbę całkowitą (ignorując ewentualne zera wiodące), otrzymał ponownie liczbę $n$. Jaką najmniejszą możliwą liczbę mógł wybrać Rafał? Przykładowo, gdyby Rafał wybrał na początku 2024, to liczba cyfr parzystych to 4, cyfr nieparzystych to 0, a liczba wszystkich liczb to znowu 4, zatem otrzymałby liczbę 404.

*Wynik.* 123

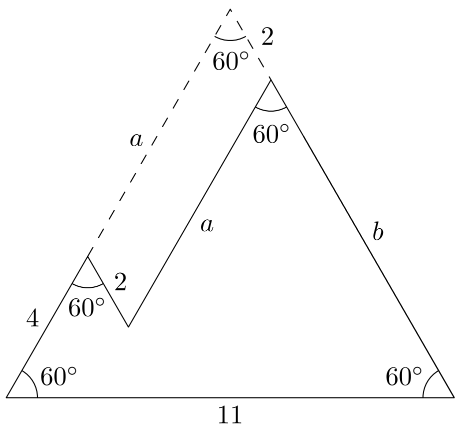
*Rozwiązanie.* Poszukiwana liczba nie może być jednocyfrowa – taka liczba była by albo parzysta albo nieparzysta i tym samym zostałaby policzona w jednej z tych kategorii. Podobnie, szukana liczba nie może być dwucyfrowa – wtedy jej cyfra jedności równałaby się 2, które jest liczbą parzystą. Rozważmy zatem liczby trzycyfrowe. Skoro są łącznie 3 cyfry parzyste i nieparzyste, to otrzymujemy następujące możliwe liczby 123, 213, 303. Po transformacji opisanej w zadaniu, każda z tych liczb przechodzi na liczbę 123, także 123. Zatem to właśnie 123 jest szukanym rozwiązaniem.

**Zadanie 9.** Na poniższym obrazku przedstawiono pięciokąt, w którym dane są niektóre miary kątów i długości boków. Wyznacz $a + b$.




*Wynik.* 16

*Rozwiązanie.* Dopełnijmy pięciokąt do trójkąta równobocznego o boku długości $11 = 4 + a = 2 + b$ jak na obrazku.




Dostajemy $a = 7$, $b = 9$ oraz $a + b = 16$.

**Zadanie 10.** W słowackiej piosence ludowej *Kopala studienku* dziewczyna sprawdza, czy jej studnia jest jednakowo głęboka i szeroka. Dziewczyna wie, że przez tydzień może wykopać studnię o pożądanej szerokości, ale tylko o $\frac{1}{3}$ pożądanej głębokości. Natomiast Janko Muzykant przez tydzień może wykopać studnię o pożądanej głębokości, ale tylko o połowie pożądanej szerokości. Ile dni potrzebują dziewczyna i Janko Muzykant aby wspólnie wykopać odpowiednią studnię? Zakładamy, że każda studnia ma kształt walca, którego średnica podstawy jest szerokością studni, a czas potrzebny na jej kopanie jest proporcjonalny do objętości usuniętej ziemi.

*Wynik.* 12

*Rozwiązanie.* Ponieważ studnia jest walcem, jej objętość wyraża się wzorem $V = \frac{\pi}{4} \cdot D \cdot W^2$, gdzie $D$ oznacza głębokość, a $W$ oznacza szerokość. Wiemy, że dziewczyna potrzebuje 7 dni na wykopanie $\frac{\pi}{4} \cdot \frac{D}{3} \cdot W^2 = \frac{1}{3}V$ ziemi, czyli potrzebuje 21 dni na wykopanie $V$ ziemi. Podobnie, Janko potrzebuje 7 dni na wykopanie $\frac{\pi}{4} \cdot D \cdot \left(\frac{W}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}V$ ziemi, czyli 28 dni na wykopanie $V$ ziemi. Zatem dziewczyna jest w stanie w ciągu dnia wykopać $\frac{1}{21}$ studni, a chłopak $\frac{1}{28}$ studni. Razem są w stanie wykopać $\frac{1}{21} + \frac{1}{28} = \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{7} \cdot \frac{7}{12} = \frac{1}{12}$ studni w ciągu dnia, czyli na wykopanie całej studni potrzebują 12 dni.

**Zadanie 11.** Wyznacz liczbę wszystkich odcinków długości $\sqrt{5}$ łączących dwa wierzchołki kwadratów na planszy $10 \times 10$ składającej się z kwadratów o boku długości 1.

*Wynik.* 360

*Rozwiązanie.* Na początku zauważmy, że każdy prostokąt o wymiarach $2 \times 1$ zawiera dokładnie 2 przekątne o długości $\sqrt{5}$. Wystarczy zatem obliczyć liczbę takich prostokątów. Załóżmy, że taki prostokąt położony jest pionowo. Mamy wtedy $n$ możliwości wyboru kolumny, w której się znajduje i $n - 1$ możliwości wyboru rzędu, w którym się znajduje w planszy $n \times n$. Prostokąt możemy umieścić również poziomo, co daje nam dwie możliwości na położenie każdego prostokąta. Podsumowując mamy dwie przekątne w prostokącie i $2n(n-1)$ prostokątów, zatem łącznie daje to $4n(n-1)$ przekątnych. Dla $n = 10$ daje to wynik 360.

**Zadanie 12.** $M$, $A$, $T$, $H$ to takie parami różne niezerowe cyfry, że spełniona jest równość

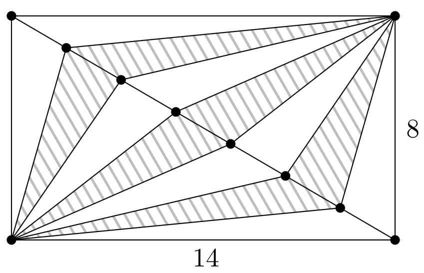
$$2024 + HAHA = MATH.$$

Jaka jest największa możliwa wartość czterocyfrowej liczby $MATH$?

*Wynik.* 5963

*Rozwiązanie.* Ponieważ $MATH$ oraz $HAHA$ mają takie samy cyfry setek i odpowiadająca im cyfra w 2024 to 0, widzimy, że nie ma przenoszenia przy okazji dodawania cyfr dziesiątek po lewej stronie równania. Zatem $TH = HA + 24$ oraz $M = H + 2$. Jednak dodawanie $A$ i 4 musi odbyć się z przeniesieniem, bo inaczej $T = H + 2 = M$, a cyfry kryjące się pod literami mają być parami różne. Zatem $H = A + 4 - 10 = A - 6$, zatem $M = A - 4$ i $T = A - 3$. Stąd łatwo zauważyć, że $MATH$ jest jedną z liczb 3741, 4852 lub 5963, przy czym ta ostatnia jest największa.

**Zadanie 13.** W zebro-prostokącie o bokach długości 14 i 8 przekątna została podzielona na siedem odcinków równej długości. Jakie jest pole zacieniowanego obszaru?




*Wynik.* 48

*Rozwiązanie.* Ponieważ spodki wysokości z wierzchołków prostokąta na przekątną mają równe długości dla wszystkich rozważanych trójkątów to zacieniony obszar ma pole równe dokładnie $\frac{3}{7}$ całkowitego pola prostokąta, czyli $\frac{3}{7} \cdot 8 \cdot 14 = 48$.

**Zadanie 14.** Jeśli do kółka matematycznego dołączy dziewczyna, a odejdzie 20% chłopców, to liczba chłopców i dziewcząt na zajęciach będzie taka sama. Natomiast jeśli jedna dziewczyna opuści kółko, a następnie liczba dziewcząt zwiększy się o 30%, to liczba chłopców i dziewcząt również będzie równa. Ile osób należy do kółka matematycznego?

*Wynik.* 116

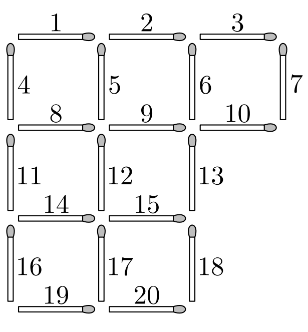
*Rozwiązanie.* Oznaczmy liczbę dziewczyn przez $d$ i liczbę chłopców przez $c$. Z treści zadania wynikają następujące równości:

$$d + 1 = \frac{4}{5}c,$$

$$\frac{13}{10}(d - 1) = c.$$

Podstawiając $c = \frac{5}{4}d + \frac{5}{4}$ z pierwszego równania do drugiego równania otrzymujemy $\left(\frac{13}{10} - \frac{5}{4}\right) d = \frac{13}{10} + \frac{5}{4}$, co daje $\left(\frac{13}{10} - \frac{5}{4}\right) d = \frac{13}{10} + \frac{5}{4}$. Zatem dostajemy $\frac{d}{20} = \frac{51}{20}$, czyli $d = 51$, a więc $c = \frac{13}{10} \cdot 50 = 65$. W wyniku tego odpowiedzią jest $d + c = 51 + 65 = 116$.

**Zadanie 15.** Zapałki na obrazku tworzą dziewięć kwadratów. Usuwamy takie trzy zapałki, żeby na obrazku pozostało pięć kwadratów i każda pozostawiona zapałka leżała na boku jakiegoś kwadratu. Jaka jest maksymalna suma wartości trzech usuniętych zapałek?



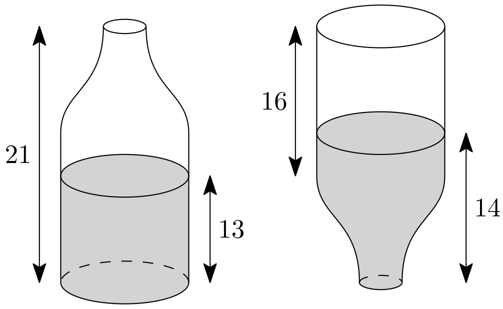

*Wynik.* 50

*Rozwiązanie.* Na obrazku jest siedem kwadratów o boku długości 1 i dwa kwadraty o boku 2. Aby zmniejszyć łączną liczbę kwadratów do pięciu, należy zniszczyć dokładnie cztery kwadraty. Aby usunąć kwadrat ograniczony zapałkami $3, 6, 7, 10$ należy usunąć co najmniej trzy zapałki, więc tego kwadratu nie możemy zniszczyć. W szczególności nie możemy usunąć zapałki numer 6.

Usunięcie zapałek o numerach 11 lub 13 niszczy równocześnie oba duże kwadraty oraz jeden mały. Tak więc zniszczenie ostatniego kwadratu wymagałoby usunięcia dwóch zapałek. Jeżeli zapałka z numerem 11 została zabrana, to parami zapałek, które możemy zabrać są 12 i 13 lub 18 i 20. Z drugiej strony, jeżeli zapałka z numerem 13 została zabrana, to parami zapałek, które możemy zabrać są 1 i 4, 11 i 12 lub 16 i 19. Z tych możliwości, usunięcie zapałek o numerach 11, 18 i 20 ma największą sumę równą 49. Jeśli oba duże kwadraty pozostały, to jedyne możliwe do usunięcia zapałki mają numery 5, 12 i 17, ale ich zabranie nie tworzy wymaganej konfiguracji.

Skoro zapałka z numerem 6 nie może zostać zabrana, a jeden z dużych kwadratów musi zostać zniszczony, to obie zapałki z następujących par muszą zostać usunięte: 18 i 20 lub 16 i 19 lub 1 i 4. Zabierając zapałki w taki sposób usuwamy jeden duży i jeden mały kwadrat. To oznacza, że kolejna zabrana zapałka musi zniszczyć dwa kwadraty. W przypadku pary 18 i 20 może to być zapałka numer 11 lub 12, co daje maksymalną sumę 50. Zapałka numer 13 nie może być usunięta, bo wtedy zapałka numer 15 nie leżałaby na boku kwadratu. Rozumując analogicznie dla pary 16 i 19 dostajemy największą sumę 48 usuwając zapałkę numer 13. Odpowiedzią, której szukaliśmy jest zatem 50.

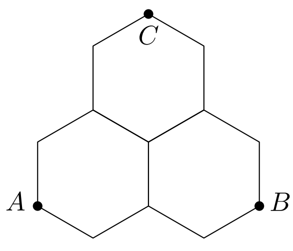
**Zadanie 16.** Łukasz ma butelkę o wysokości 21. Składa się ona z walca o wysokości 16 i nieregularnego kształtu przy szyjce. Łukasz częściowo wypełnił ją wodą i zaobserwował, że woda osiąga wysokość 13. Potem obrócił butelkę do góry dnem i zauważył, że teraz woda osiąga wysokość 14. Oblicz procent objętości butelki, który jest wypełniony wodą.




*Wynik.* 65

*Rozwiązanie.* Niech $r$ oznacza promień podstawy butelki. Z pierwszego ułożenia widzimy, że objętość wody w butelce to $13\pi r^2$. Podobnie, z drugiego ułożenia widzimy, że objętość powietrza w butelce to $(21-14)\pi r^2 = 7\pi r^2$. Zatem butelka ma objętość $(13+7)\pi r^2 = 20\pi r^2$ a szukany procent wynosi $\frac{13\pi r^2}{20\pi r^2} = \frac{13}{20} = 65\%$.

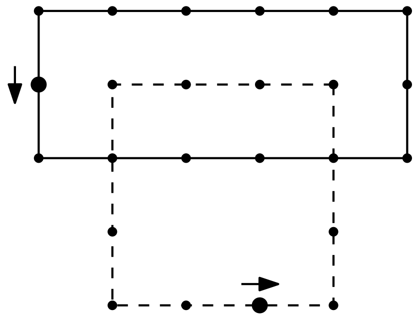
**Zadanie 17.** Krzyś mieszka w Sześciokątogrodzie, mieście, w którym wszystkie ulice mają długość 1 km i są bokami trzech sześciokątów foremnych. Krzyś chce zabrać swoją dziewczynę z jej domu i razem z nią pójść do kina. Zaczyna podróż w punkcie $A$, jego dziewczyna mieszka w punkcie $B$, a kino znajduje się w punkcie $C$, tak jak na obrazku. Krzyś nie chce przechodzić przez żadną ulicę dwukrotnie. Jaka jest suma długości wszystkich możliwych tras, które może przejść (w kilometrach)?




*Wynik.* 28

*Rozwiązanie.* Istnieją cztery ścieżki z $A$ do $B$, które nie przechodzą przez $C$. Jedna z nich pozwala na dwa sposoby dostać się do punktu $C$, druga pozwala tylko na jeden sposób dostać się do punktu $C$, a pozostałe dwie nie dają możliwości dotarcia do punktu $C$ (nie przechodząc dwukrotnie żadnej z ulic). Sumarycznie istnieją trzy możliwe trasy, którymi Krzyś może dostać się do kina ze swoją dziewczyną. Dwie z nich mają długość 10, a trzecia 8, co daje nam odpowiedź 28.

**Zadanie 18.** Dwóch strażników patroluje bank poruszając się po prostokątnych drogach w sposób przedstawiony na obrazku. Przemieszczają się ze stałą prędkością, przechodząc od jednego punktu kontrolnego do następnego w minutę. Po ilu minutach strażnicy po raz pierwszy się spotkają?



*Wynik.* 44

*Rozwiązanie.* Niech strażnik $A$ (prostokątna droga) będzie tym, który potrzebuje 14 minut, a $B$ (kwadratowa droga) tym, który potrzebuje 12 minut aby wykonać jedno okrążenie. Istnieją dwa możliwe punkty spotkań tychże strażników. Jeśli spotkają się w punkcie po lewej stronie po $a$ pełnych okrążeniach wykonanych przez strażnika $A$ i $b$ pełnych okrążeniach wykonanych przez strażnika $B$, to musi zachodzić równanie:

$$14a + 2 = 12b + 8.$$

Możemy je uprościć do $7a = 6b + 3$, co daje $7 \mid 6b + 3$. Sprawdzając $b \in \{0, 1, 2, \dots\}$ widzimy, że $b = 3$ i $a = 3$ jest najmniejszym rozwiązaniem. Podobnie, strażnicy spotkają się w punkcie położonym po prawej stronie jeśli

$$14a + 5 = 12b + 3.$$

Stąd $7a = 6b - 1$, czyli $7 \mid 6b - 1$, co daje $b \geqslant 6$. Zatem po raz pierwszy spotkają się po $14 \cdot 3 + 2 = 44$ minutach.

**Zadanie 19.** Dodatnie liczby całkowite $a$, $b$, $c$ spełniają równania

$$\sqrt{a^2 + b^2 - 172} = c,$$
$$\sqrt{c^2 + b^2 - 220} = a.$$

Jaka jest największa możliwa wartość sumy $a + b + c$?

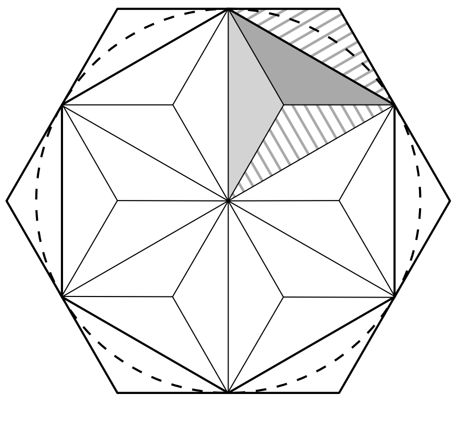
*Wynik.* 26

*Rozwiązanie.* Podniesienie obu równości do kwadratu i obliczenie ich sumy daje $2b^2 = 392$. Ponieważ $b$ musi być dodatnie, to $b = 14$ jest jedynym rozwiązaniem. Podstawiając tę wartość do kwadratu pierwszego równania otrzymujemy $a^2 + 24 = c^2$. Ponieważ liczba $c^2 - a^2 = (c - a)(c + a) = 24$ jest parzysta, więc $d = c - a$ również musi być parzyste. Dla $d = 6$ wartość $(c - a)(c + a) \geqslant d(d + 2)$ będzie wynosiła co najmniej 48, co jest większe od 24. Zatem jedyne możliwości to $d = 2$ i $d = 4$. W pierwszym przypadku otrzymujemy $a + c = 12$ i rozwiązania $a = 5$ i $b = 7$. W drugim otrzymujemy $a + c = 6$ z rozwiązaniami $a = 1$ i $c = 5$. Zatem największa możliwa wartość sumy $a + b + c$ to $5 + 14 + 7 = 26$.

**Zadanie 20.** Na okręgu opisano sześciokąt foremny oraz wpisano w niego sześciokąt foremny. Jaka część pola powierzchni sześciokąta opisanego na okręgu została przykryta przez sześciokąt wpisany w okrąg?

*Wynik.* $\frac{3}{4}$

*Rozwiązanie.* Podzielenie na przystające trójkąty i policzenie daje odpowiedź $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$, jak na rysunku.



*Alternatywne rozwiązanie.* Niech $r$ będzie promieniem okręgu. Każdy sześciokąt możemy podzielić na 6 trójkątów równobocznych. Mniejszy z nich ma wysokość równą $\frac{1}{2}r\sqrt{3}$, a większy $r$. Zatem stała podobieństwa jest równa $k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, skąd stała podobieństwa pól to $k^2 = \frac{3}{4}$.

**Zadanie 21.** Powiemy, że $n$-te urodziny są *kwadratowe* jeśli $n > 1$ oraz gdy dla każdej liczby pierwszej $p$ dzielącej $n$ również $p^2$ dzieli $n$. Przykładowo, urodziny numer $8 = 2^3$ są kwadratowe, z kolei urodziny numer $56 = 8 \cdot 7$ nie są. W tym roku Babcia Jadzia już obchodziła swoje 196. urodziny. Ile kwadratowych urodzin przeżyła?

*Wynik.* 20

*Rozwiązanie.* Numer kwadratowych urodzin musi zawierać w rozkładzie na czynniki pierwsze jeden lub więcej czynników postaci $p^k$, gdzie $k > 1$. Wszystkie takie czynniki mniejsze lub równe 196 to $S = \{4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 125, 128, 144, 169, 196\}$ (jest ich 18). Zauważmy, że gdy weźmiemy co najmniej dwie liczby ze zbioru $S$ większe niż 27, to ich iloczyn jest większy niż 196 albo już znajduje się w $S$. Z pozostałych liczb jedynie 8 oraz 27 nie są kwadratami. Ponieważ iloczyn dwóch kwadratów liczb całkowitych sam jest kwadratem, to wynik należy do $S$ lub jest większy od 196. Rozważmy iloczyny liczb 8 lub 27 oraz liczb ze zbioru $S$ mniejszych niż 196. Wszystkie te iloczyny znajdują się już w $S$ oprócz dwóch: $27 \cdot 4 = 108$ i $8 \cdot 9 = 72$. Mamy zatem $18 + 2 = 20$ numerów kwadratowych urodzin.

**Zadanie 22.** Niebawem odbędzie się jedenasta edycja konkursu matematycznego Pocisk. Dotychczas w $n$-tej edycji konkursu były $n + 2$ zadania ponumerowane od 1 do $n + 2$. Organizatorzy chcą tak wybrać po jednym zadaniu z każdej z poprzednich 10 edycji, aby otrzymać 10 zadań ponumerowanych od 1 do 10 przy zachowaniu ich oryginalnej numeracji. Ile różnych zestawów zadań mogą utworzyć, zakładając, że zadania w poprzednich edycjach się nie powtarzały?

*Wynik.* $13122 = 2 \cdot 3^8$

*Rozwiązanie.* Organizatorzy mają trzy zadania do wyboru z konkursu nr 1. W drugim konkursie, ponieważ jedno zadanie już zostało wybrane ponownie mają do wyboru $4 - 1 = 3$ możliwości niezależnie od pierwszego wyboru. Nietrudno zauważyć, że ta sytuacja będzie się powtarzać, to jest: w $k$-tym konkursie jest już $k - 1$ pytań, których nie możemy wybrać ze względu na poprzednie wybory aż do konkursu nr 9, w którym jest zadanie o numerze 11, który jest za duży, co pozostawia jedynie dwa zadania do wyboru. Ostatecznie w konkursie nr 10 znajdują się pytania 11 i 12, których nie możemy wybrać, co daje tylko jeden wybór. Łącznie zatem można utworzyć $3^8 \cdot 2 = 13122$ testów.

**Zadanie 23.** Znajdź najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą, której pierwszą cyfrą jest 1 i która spełnia następujący warunek: kiedy przeniesiemy cyfrę 1 na koniec tej liczby, to otrzymamy liczbę trzy razy większą od pierwotnej liczby. Przykład przeniesienia pierwszej cyfry: $174 \to 741$.

*Wynik.* 142857

*Rozwiązanie.* Wiemy, że ostatnią cyfrą jest 1, więc możemy odtworzyć liczbę od tyłu:

$$\begin{aligned}
\ldots x \cdot 3 = \ldots 1 &\Rightarrow x = 7 \\
\ldots y7 \cdot 3 = \ldots 71 &\Rightarrow y = 5 \\
\ldots z57 \cdot 3 = \ldots 571 &\Rightarrow z = 8 \\
\ldots t857 \cdot 3 = \ldots 8571 &\Rightarrow t = 2 \\
\ldots s2857 \cdot 3 = \ldots 28571 &\Rightarrow s = 4 \\
\ldots r42857 \cdot 3 = \ldots 428571 &\Rightarrow r = 1.
\end{aligned}$$

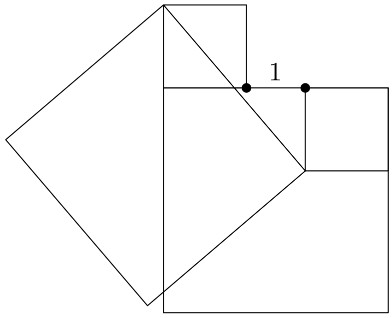
Sprawdzając, widzimy że $142857 \cdot 3 = 428571$.

*Alternatywne rozwiązanie.* Każda dodatnia liczba całkowita, zaczynająca się od 1 i mająca co najmniej dwie cyfry może być zapisana w postaci $10^k + a$ dla pewnego $k \geqslant 1$ oraz $k$-cyfrowej liczby $a$. Po przestawieniu 1 na koniec otrzymujemy liczbę postaci $10a + 1$. Teraz chcemy rozwiązać równanie postaci

$$3 \cdot (10^k + a) = 10a + 1$$

dla niewiadomych $a$ i $k$. Sprowadza się ono do postaci $3 \cdot 10^k - 1 = 7a$. Po lewej stronie równania mamy liczbę postaci 299...9 (liczba dziewiątek wynosi $k$). Rozważamy kolejne liczby tej postaci i dzielimy je przez 7, biorąc tyle dziewiątek, aby nie było reszty z dzielenia. Otrzymujemy, że najmniejszym rozwiązaniem jest $a = 42857$, a wynikiem zadania 142857.

**Zadanie 24.** Rysunek przedstawia układ dwóch par przystających kwadratów. Odległość między dwoma zaznaczonymi punktami wynosi 1. Ile wynosi suma pól tych czterech kwadratów?

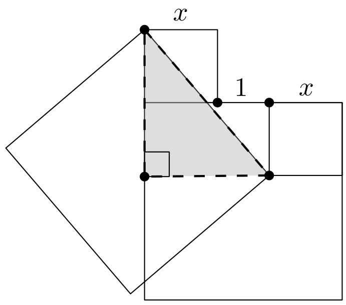



*Wynik.* 58

*Rozwiązanie.* Oznaczając przez $x$ długość boku mniejszego z kwadratów i korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla zacieniowanego trójkąta prostokątnego na obrazku otrzymujemy

$$(2x)^2 + (1+x)^2 = (1+2x)^2.$$

Równanie to upraszcza się do $x^2 = 2x$, zatem $x = 2$. Odpowiedzią jest $2(2^2 + 5^2) = 58$.




**Zadanie 25.** Wspinacz Kacper jest opuszczany na linie ze szczytu pionowej ściany. Oznacza to, że jest przymocowany do jednego końca liny, która biegnie przez punkt na szczycie, a następnie na dół, gdzie Magda trzyma linę i przesuwa ją w kontrolowany sposób. Lina jest elastyczna, a ciężar Kacpra rozciąga fragment pomiędzy nim a Magdą o 20 %. Lina jest oznaczona w połowie. Podczas opuszczania Kacper mija to oznaczenie, kiedy jest w jednej trzeciej wysokości ściany nad ziemią. Kiedy dociera na ziemię, a lina nie jest jeszcze rozluźniona zauważa, że pozostało 10 metrów liny. Pomijając wzrost ludzi i długość liny poświęconej na wiązania, jaka jest wysokość ściany w metrach?

*Wynik.* 18

*Rozwiązanie.* Oznaczmy długość liny przez $\ell$, a wysokość ściany przez $h$. Kiedy wspinacz dociera do oznaczenia, połowa liny (rozciągnięta) ma długość równą podwojonej odległości wspinacza od szczytu ściany, więc mamy

$$\frac{6}{5} \cdot \frac{\ell}{2} = 2 \cdot \frac{2h}{3}.$$

Kiedy wspinacz dociera na ziemię, podobnie otrzymujemy równanie

$$\frac{6}{5}(\ell - 10) = 2h,$$

z którego po podstawieniu $\ell = \frac{20h}{9}$ z pierwszego równania otrzymujemy $h = 18$.

**Zadanie 26.** W szufladzie znajduje się $n$ skarpetek. Kiedy wyciągamy dwie losowe skarpetki bez zwracania, to prawdopodobieństwo, że obie będą czarne wynosi $2/15$. Jaka jest najmniejsza możliwa wartość $n$?

*Wynik.* 10

*Rozwiązanie.* Niech $b$ oznacza liczbę czarnych skarpetek. Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch czarnych skarpetek wynosi więc $\frac{b}{n} \cdot \frac{b-1}{n-1}$. Skoro to wyrażenie jest równe $\frac{2}{15}$, otrzymujemy równanie

$$15 \cdot b(b-1) = 2 \cdot n(n-1).$$

Liczby 3 i 5 dzielą lewą stronę równania i są względnie pierwsze z 2, muszą więc dzielić $n(n-1)$. Rozważmy najmniejsze wielokrotności 3 lub 5 jako $n$. Jeżeli $n = 6$, to $15 \cdot b(b-1) = 2 \cdot 6 \cdot 5 = 60$, ale równania $b(b-1) = 4$ nie spełnia żadna liczba całkowita. Dla $n = 10$ mamy $b(b-1) = 12$, co jest spełnione dla $b = 4$. Zatem odpowiedź to $n = 10$.

**Zadanie 27.** Znajdź największą liczbę całkowitą spełniającą następujące warunki:

- składa się z dokładnie siedmiu cyfr,
- żadne dwie cyfry nie są takie same,
- jest wielokrotnością 11.

*Wynik.* 9876504

*Rozwiązanie.* Będziemy korzystać z cechy podzielności przez 11: liczba jest podzielna przez 11 wtedy i tylko wtedy, gdy różnica między sumą cyfr na nieparzystych pozycjach i parzystych pozycjach (w zapisie dziesiętnym) jest podzielna przez 11.

Wśród wszystkich liczb o danej liczbie cyfr, w tym przypadku siedem, największe z nich to te zaczynające się największymi cyframi. Zatem będziemy szukać liczb począwszy od tych, które zaczynają się na 9. Po rozpisaniu 98765 widzimy, że „nieparzyste” cyfry sumują się do $9 + 7 + 5 = 21$, a „parzyste” do $8 + 6 = 14$. Różnica to 7 i chcemy, aby była podzielna przez 11 używając dwóch cyfr ze zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Jedyny sposób, aby to osiągnąć to przez dodanie 0 do cyfr „parzystych” i 4 do cyfr „nieparzystych”, co daje rozwiązanie 9876504. Ponieważ wszystkie inne liczby zaczynałyby się ciągiem cyfr mniejszym od 98765 jest to istotnie największa taka liczba.

*Alternatywne rozwiązanie.* Zacznijmy od największej liczby złożonej z parami różnych cyfr 9876543. Zauważmy na mocy kryterium podzielności przez 11 lub algorytmu dzielenia pisemnego, że liczba ta nie jest podzielna przez 11 lecz liczba 9876537 jest oraz jest to największa wielokrotność 11 mniejsza od wyjściowej liczby. Ponieważ jej cyfry nie są parami różne to odejmując sukcesywnie 11 i sprawdzając warunek parami różnych cyfr otrzymamy

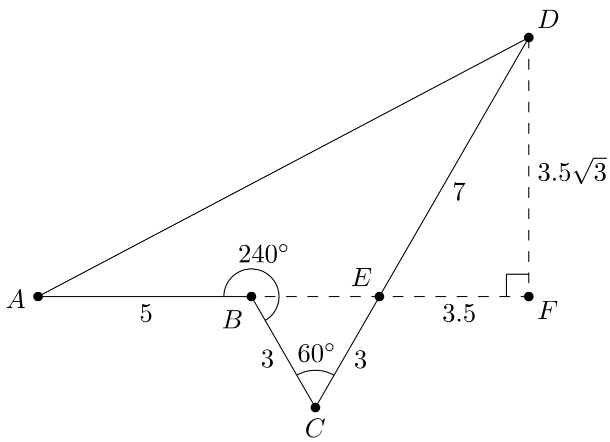
$$9876537 \longrightarrow 9876526 \longrightarrow 9876515 \longrightarrow 9876504,$$

co jest naszym rozwiązaniem.

**Zadanie 28.** Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $AB = 5$, $BC = 3$ oraz $CD = 10$. Kąt wewnętrzny przy wierzchołku $B$ ma miarę $240°$, a kąt wewnętrzny przy wierzchołku $C$ ma miarę $60°$. Wyznacz długość boku $AD$.

*Wynik.* 13

*Rozwiązanie.* Niech $E$ będzie takim punktem odcinka $CD$, że trójkąt $BCE$ jest równoboczny. Wówczas w trójkącie $AED$ zachodzą równości $AE = 8$, $ED = 7$ oraz $\angle AED = 120°$, skąd na mocy twierdzenia cosinusów otrzymujemy $AD^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \cos 120° = 169$, czyli $AD = 13$.




*Alternatywne rozwiązanie.* Jeśli do trójkąta $AED$ doczepimy pół trójkąta równobocznego o boku długości 7 jak na obrazku, to z twierdzenia Pitagorasa dostaniemy

$$AD^2 = (5 + 3 + 3.5)^2 + (3.5\sqrt{3})^2 = 169.$$

Zatem $AD = 13$.

**Zadanie 29.** Ile uporządkowanych czwórek $(a, b, c, d)$ liczb całkowitych dodatnich spełnia równanie

$$2024 = (2 + a) \cdot (0 + b) \cdot (2 + c) \cdot (4 + d)?$$

*Wynik.* 18

*Rozwiązanie.* Najpierw musimy rozłożyć 2024 na czynniki pierwsze:

$$2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23.$$

Skoro $a$, $b$, $c$ oraz $d$ są dodatnimi liczbami całkowitymi, to $2 + a \geqslant 3$, $2 + c \geqslant 3$ i $4 + d \geqslant 5$. Czynniki 1 oraz 2 mogą wystąpić tylko raz po prawej stronie (w czynniku $0 + b$), a czynnik 4 może wystąpić tylko w czynnikach $(2 + a)$ lub $(2 + c)$.

Iloczyn po prawej stronie musi składać się z czterech czynników, co daje nam cztery możliwe rozkłady na czynniki:

$$2024 = 1 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 23 \quad \text{lub} \quad 2024 = 1 \cdot 4 \cdot 22 \cdot 23 \quad \text{lub} \quad 2024 = 1 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 46 \quad \text{lub} \quad 2024 = 2 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 23.$$

Dla pierwszego rozkładu $b = 1$, a pozostałe czynniki mogą być przypisane do $a + 2$, $c + 2$ oraz $d + 4$ na 6 różnych sposobów. W drugim rozkładzie $b = 1$ i wtedy $a + 2 = 4$ lub $c + 2 = 4$. W każdym z tych przypadków pozostałe dwa czynniki możemy przypisać na dwa różne sposoby, co daje nam 4 rozwiązania Analogicznie mamy 4 różne rozwiązania przy trzecim i czwartym rozkładzie. Ostatecznie otrzymujemy 18 różnych rozwiązań:

| rozkład liczby 2024 | rozwiązanie | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $2024 = 8 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 23$ | 6 | 1 | 9 | 19 |
| $2024 = 8 \cdot 1 \cdot 23 \cdot 11$ | 6 | 1 | 21 | 7 |
| $2024 = 11 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 23$ | 9 | 1 | 6 | 19 |
| $2024 = 11 \cdot 1 \cdot 23 \cdot 8$ | 9 | 1 | 21 | 4 |
| $2024 = 23 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 11$ | 21 | 1 | 6 | 7 |
| $2024 = 23 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 8$ | 21 | 1 | 9 | 4 |
| $2024 = 4 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$ | 2 | 2 | 9 | 19 |
| $2024 = 4 \cdot 2 \cdot 23 \cdot 11$ | 2 | 2 | 21 | 7 |
| $2024 = 11 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 23$ | 9 | 2 | 2 | 19 |
| $2024 = 23 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 11$ | 21 | 2 | 2 | 7 |
| $2024 = 4 \cdot 1 \cdot 22 \cdot 23$ | 2 | 1 | 20 | 19 |
| $2024 = 4 \cdot 1 \cdot 23 \cdot 22$ | 2 | 1 | 21 | 18 |
| $2024 = 4 \cdot 1 \cdot 46 \cdot 11$ | 2 | 1 | 44 | 7 |
| $2024 = 4 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 46$ | 2 | 1 | 9 | 42 |
| $2024 = 22 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 23$ | 20 | 1 | 2 | 19 |
| $2024 = 23 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 22$ | 21 | 1 | 2 | 18 |
| $2024 = 46 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 11$ | 44 | 1 | 2 | 7 |
| $2024 = 11 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 46$ | 9 | 1 | 2 | 42 |

**Zadanie 30.** Niech $x$ oraz $y$ będą takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, że

$$2^x \cdot 3^y = \left(24^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{60}}\right) \cdot \left(24^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{60}}\right)^2 \cdot \left(24^{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{60}}\right)^3 \cdot \ldots \cdot \left(24^{\frac{1}{60}}\right)^{59}.$$

Wyznacz $x + y$.

*Wynik.* 3540

*Rozwiązanie.* Niech $k$ będzie taką liczbą, że $2^x \cdot 3^y = 24^k$. Uzyskujemy wówczas

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{60} + \frac{2}{60} + \ldots + \frac{59}{60}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \ldots + \frac{59}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+59) \cdot 59}{2} \\ &= 15 \cdot 59. \end{aligned}$$

Zatem $2^x \cdot 3^y = (2^3 \cdot 3^1)^{15 \cdot 59}$, czyli $x = 3 \cdot 15 \cdot 59 = 45 \cdot 59$ oraz $y = 15 \cdot 59$ i w konsekwencji $x + y = 60 \cdot 59 = 3540$.

**Zadanie 31.** Ewa lubi kulki, zwłaszcza ułożone w ciągi składające się łącznie z 18 czarnych i białych kulek w taki sposób, że w każdym tuzinie kolejnych kulek jest co najmniej 7 białych. Ile takich ciągów zawiera co najwyżej 8 białych kulek?

*Wynik.* 21

*Rozwiązanie.* Podzielmy ciąg na trzy segmenty po pół tuzina kulek — lewy (kulki $1-6$), środkowy (kulki $7-12$) i prawy (kulki $13-18$). Przypuśćmy, że w środkowym segmencie jest $b$ białych kulek. To oznacza, że w lewym i w prawym jest ich co najmniej po $7-b$, więc łącznie białych kulek jest co najmniej $14-b$. Jeżeli $b<6$, to $14-b>8$, a zatem $b=6$, czyli wszystkie kulki w środkowym segmencie są białe. Ponadto w lewym i prawym segmencie musi być dokładnie po jednej białej kulce.

Białe kulki w lewym i prawym segmencie nie mogą być jednak rozmieszczone dowolnie — aby warunki zadania były spełnione, dla każdego tuzina kolejnych kulek, odległość pomiędzy tymi dwiema dodatkowymi białymi kulkami nie może przekroczyć 12, np. jeśli biała kulka w lewym segmencie jest na pozycji 2, to biała kulka w prawym segmencie może być wyłącznie na pozycji 13 lub 14. Ogólnie jeżeli w lewym segmencie biała kulka jest na pozycji $i$ (od 1 do 6), to jest $i$ możliwych pozycji białej kulki w prawym segmencie. Sumując, uzyskujemy $1+2+3+4+5+6=21$ możliwych ciągów kulek.

**Zadanie 32.** Ula posiada 33 monety o nominale 1 zł, 106 monet o nominale 2 zł oraz 31 monet o nominale 5 zł. Chce je tak podzielić na dwa stosy, aby każdy z nich zawierał tyle samo monet oraz aby wartość każdego ze stosów była taka sama, a następnie przekazać jeden stos siostrze. Na ile sposobów może to zrobić? Monety o tych samych nominałach są nierozróżnialne.

*Wynik.* 12

*Rozwiązanie.* Niech $a$ oznacza liczbę monet o nominale 1 zł, $b$ liczbę monet o nominale 2 zł, a $c$ liczbę monet o nominale 5 zł w pierwszym stosie. Mamy więc równania

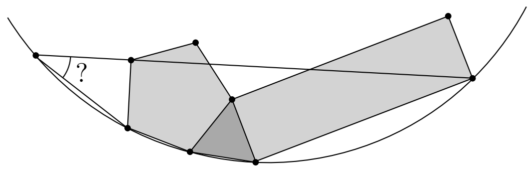
$$a+b+c=\frac{1}{2}(33+106+31)=85$$

oraz

$$a+2b+5c=\frac{1}{2}(33+2\cdot 106+5\cdot 31)=200.$$

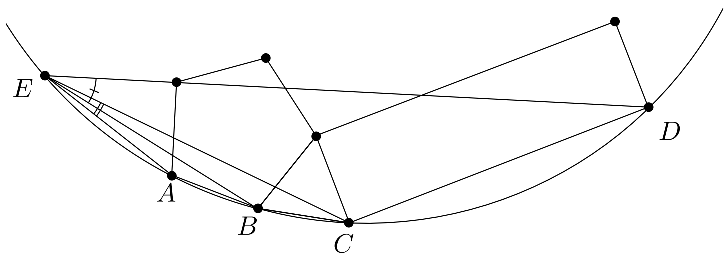
Odejmując pierwsze równanie od drugiego otrzymujemy $b+4c=115$. To równanie ma rozwiązanie postaci $b=115-4c$ dla ustalonego $c$. Jednak mamy ograniczenie $0<115-4c<106$, więc $c\in\{3,4,\ldots,28\}$. Nie każde rozwiązanie prowadzi do odpowiedniej liczby $a$ monet 1 zł. Musimy dodać warunek $0\leqslant 85-(115-4c+c)=-30+3c\leqslant 33$. Widzimy, że tylko wartości ze zbioru $\{10,11,\ldots,21\}$ prowadzą do właściwego rozwiązania. Mamy więc 12 możliwości podziału monet na dwa stosy.

**Zadanie 33.** Trójkąt równoboczny, pięciokąt foremny oraz prostokąt są tak narysowane na rysunku poniżej, że pewne ich wierzchołki leżą na okręgu (którego narysowano tylko fragment). Wyznacz miarę zaznaczonego kąta wyrażoną w stopniach.




*Wynik.* 36

*Rozwiązanie.* Oznaczmy punkty jak na rysunku poniżej.




Korzystając z tego, że suma przeciwległych kątów w czworokącie wpisanym w okrąg wynosi 180° oraz ze znanych miar kątów wewnętrznych w pięciokącie foremnym i trójkącie równobocznym dostajemy

$$\angle AEC=180^\circ-\angle ABC=180^\circ-60^\circ-108^\circ=12^\circ.$$

W podobny sposób otrzymujemy

$$\angle BED=180^\circ-\angle BCD=180^\circ-60^\circ-90^\circ=30^\circ.$$

Następnie, skoro $ABC$ jest trójkątem równoramiennym, to

$$\angle BEC = \angle BAC = \frac{180^\circ - 108^\circ - 60^\circ}{2} = 6^\circ.$$

Sumując kąty przy wierzchołku $E$ otrzymujemy

$$\angle AED = 12^\circ + 30^\circ - 6^\circ = 36^\circ.$$

**Zadanie 34.** Na ile sposobów można rozmieścić 9 identycznych wież na szachownicy $4 \times 4$ w taki sposób, aby każda wieża była atakowana przez pewną inną wieżę? Dwie wieże atakują się nawzajem jeśli znajdują się w tym samym wierszu lub kolumnie i pomiędzy nimi nie znajduje się inna wieża.

*Wynik.* 11296

*Rozwiązanie.* Wyznaczymy liczbę rozmieszczeń, w których co najmniej jedna wieża nie jest atakowana przez żadną inną. Taka wieża musi być jednocześnie jedyną w swoim wierszu i w swojej kolumnie, co oznacza, że może być co najwyżej jedna wieża o tej własności (w przeciwnym razie na szachownicy zmieściłoby się co najwyżej 6 wież). Tę „samotną” wieżę można umieścić na $4 \cdot 4 = 16$ sposobów. Pozostałe 8 wież należy rozstawić na 9 polach nienależących do wiersza i kolumny samotnej wieży — można to zrobić na 9 sposobów. Łączna liczba rozmieszczeń z samotną wieżą jest więc równa 144, a zatem szukana liczba rozmieszczeń bez samotnej wieży to $\binom{16}{9} - 144 = 11296$.

**Zadanie 35.** Wyznacz największą dodatnią liczbę całkowitą $N$, która nie jest liczbą pierwszą i której wszystkie dzielniki z wyjątkiem $N$ są mniejsze od 100.

*Wynik.* 9409

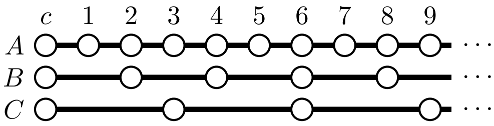
*Rozwiązanie.* Skoro $N$ nie jest liczbą pierwszą, to $N = 1$ lub istnieje liczba pierwsza $p < N$ będąca dzielnikiem $N$. Założenie $p < 100$ prowadzi do $p \leqslant 97$. Zauważmy, że liczba $N = 97^2 = 9409$ spełnia warunki zadania.

Przypuśćmy, że istnieje liczba $N' > 9409$ spełniająca warunki zadania. Jeżeli $p \leqslant 97$ jest liczbą pierwszą dzielącą $N'$, to wynikiem dzielenia $N'/p$ jest liczba większa od 97, będąca jednocześnie dzielnikiem $N'$. To oznacza, że $\frac{N'}{p} \in \{98, 99\}$. Ale wówczas $N'$ jest liczbą podzielną przez $k \in \{2, 3\}$, wobec czego

$$N' = k \cdot \frac{N'}{k} \leqslant 3 \cdot 99 < 97^2.$$

Uzyskana sprzeczność oznacza, że $N = 9409$ jest największą liczbą o szukanej własności.

**Zadanie 36.** W Liniowym Mieście są trzy linie autobusowe, stacja centralna oraz przystanki ponumerowane kolejnymi liczbami całkowitymi $1, 2, 3, \ldots$. Autobusy wszystkich trzech linii wyruszają ze stacji centralnej oznaczonej przez $c$ na rysunku poniżej, po czym przejeżdżają wzdłuż kolejnych przystanków w kolejności rosnącej. Autobusy linii A zatrzymują się na każdym przystanku (o numerach $1, 2, 3, \ldots$), autobusy linii B zatrzymują się na co drugim przystanku (o numerach $2, 4, 6, \ldots$), a autobusy linii C zatrzymują się na co trzecim przystanku (o numerach $3, 6, 9, \ldots$). Andrzej rozpoczyna swoją wyprawę na stacji centralnej wsiadając do autobusu dowolnej linii i podróżuje do swojego celu, którym jest przystanek numer 17. Na każdym przystanku, na którym się zatrzymuje, Andrzej może się przesiąść na autobus innej linii jadący dalej lub kontynuować jazdę tym samym autobusem. Na ile sposobów może dojechać do swojego celu jeśli podróże różniące się tylko czasem oczekiwania uznamy za identyczne?




*Wynik.* 845

*Rozwiązanie.* Oznaczmy przystanek autobusowy przez $s_0$, jeżeli autobusy wszystkich trzech linii się na nim zatrzymują, a przez $s_k$ oznaczmy $k$-ty przystanek (zaczynając liczyć od przystanku $s_0$) linii $A$. Teraz policzmy na ile sposobów Andrzej może się dostać na przystanek $s_6$ z przystanku $s_0$.

1. Andrzej może dotrzeć na przystanek $s_1$ na jeden sposób (tylko autobusem linii $A$).
2. Są dwie możliwości dotarcia na przystanek $s_2$: albo autobusem linii $A$ z przystanku $s_1$, albo autobusem linii $B$ z przystanku $s_0$.
3. Aby dostać się na przystanek $s_3$, Andrzej może pojechać autobusem linii $C$ z przystanku $s_0$, lub autobusem linii $A$ z przystanku $s_2$ (na który mógł się dostać na 2 sposoby).
4. Na przystanek $s_4$ możemy dotrzeć linią $A$ z przystanku $s_3$ lub linią $B$ z przystanku $s_2$, a więc mamy 5 możliwości.

5. Na przystanek $s_5$ możemy się dostać tylko z przystanku $s_4$ linią $A$, a więc jest 5 możliwości.
6. Ostatecznie na przystanek $s_6$ możemy się dostać linią $A$ z przystanku $s_5$, linią $B$ z przystanku $s_4$ lub linią $C$ z przystanku $s_3$, co daje nam $3 + 5 + 5 = 13$ możliwości.

Przystanki na których zatrzymują się autobusy wszystkich trzech linii to: stacja centralna $c$ oraz przystanki o numerach 6 i 12. Jako przystanek $s_0$ możemy traktować każdy z przystanków, na którym zatrzymują się autobusy wszystkich trzech linii. Andrzej ma 13 możliwości dotarcia na przystanek $s_6$ ze stacji centralnej, oraz na przystanek $s_{12}$ z przystanku $s_6$. Możemy wywnioskować, że dotarcie na przystanek numer 17 z przystanku numer 12 jest tym samym, co dotarcie na przystanek autobusowy $s_5$ z przystanku $s_0$, a zatem istnieje 5 możliwości. Ostatecznie Andrzej ma $5 \cdot 13 \cdot 13 = 845$ możliwości dotarcia na przystanek numer 17.

*Alternatywne rozwiązanie.* Oznaczmy przystanki kolejnymi liczbami, zaczynając od $c = 0$. Każdy przystanek $s$ jest obsługiwany przez linię $A$, a więc każda podróż z przystanku $s - 1$ może być przedłużona do przystanku $s$ (korzystając z linii $A$). Jeżeli na przystanku $s$ zatrzymuje się autobus linii $B$, to podróż można przedłużyć od przystanku $s - 2$, korzystając z linii $B$. Podobny fakt możemy zauważyć dla linii $C$. Dlatego oznaczając przez $J(s)$ liczbę możliwości dotarcia przez Andrzeja na przystanek $s$, dla $s \geqslant 1$ otrzymujemy, że:

$$\begin{aligned} J(s) = J(s-1) & \\ &+ J(s-2) \text{ jeśli } s \text{ jest podzielne przez } 2 \\ &+ J(s-3) \text{ jeśli } s \text{ jest podzielne przez } 3. \end{aligned}$$

Ze stacji centralnej autobusy jadą tylko w jednym kierunku, a więc $J(0) = 1$ i możemy zdefiniować $J(17)$ rekurencyjnie; strzałki pod tabelką pokazują, które wartości są dodawane, aby uzyskać liczbę w każdej komórce.

| $s$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $J(s)$ | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 5 | 13 | 13 | 26 | 39 | 65 | 65 | 169 | 169 | 338 | 507 | 845 | 845 |

**Zadanie 37.** Przez $\lfloor x \rfloor$ oznaczamy największą liczbę całkowitą nie większą niż $x$. Niech $a_1, a_2, a_3, \ldots$ będzie takim ciągiem liczb rzeczywistych, że $a_1 = \sqrt{3}$ oraz dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ zachodzi $a_{n+1} = \lfloor a_n \rfloor + \frac{1}{a_n - \lfloor a_n \rfloor}$. Jaka jest wartość $a_{2024}$?

*Wynik.* $3034 + \frac{\sqrt{3}+1}{2} = \frac{\sqrt{3}+6069}{2}$

*Rozwiązanie.* Zauważmy, że $a_1$ ma część ułamkową równą $a_1 - \lfloor a_1 \rfloor = \sqrt{3} - 1$. Zatem możemy zapisać $a_1$ w postaci $a_1 = 1 + \sqrt{3} - 1$. Liczymy kilka pierwszych wyrazów ciągu:

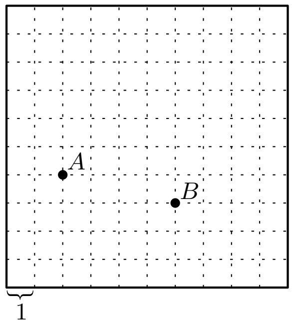
$$\begin{aligned} a_2 &= 1 + \frac{1}{\sqrt{3}-1} = 1 + \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 2 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \\ a_3 &= 2 + \frac{2}{\sqrt{3}-1} = 2 + \frac{2\sqrt{3}+2}{2} = 2 + \sqrt{3} + 1 = 3 + 1 + \sqrt{3} - 1, \\ a_4 &= 4 + \frac{1}{\sqrt{3}-1} = 4 + \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 3 + 2 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że $a_1$ oraz $a_3$ mają taką samą część ułamkową równą $\sqrt{3} - 1$, a ich różnica wynosi $a_3 - a_1 = 3$. Podobne rozumowanie dotyczy $a_2$ oraz $a_4$, które także mają taką samą część ułamkową $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ a ich różnica wynosi $a_4 - a_2 = 3$. To nas prowadzi do hipotezy, że $a_{2k+1} = 3k + 1 + \sqrt{3} - 1$ oraz $a_{2k+2} = 3k + 2 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}$, gdzie $k = 0, 1, \ldots$. Prawdziwość dla każdego $k$ możemy udowodnić indukcyjnie; jest to oczywiste dla $k = 1$ oraz $k = 2$. Dla pozostałych wystarczy podstawić wzory do definicji $a_{n+1} = \lfloor a_n \rfloor + \frac{1}{a_n - \lfloor a_n \rfloor}$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} a_{2k+2} &= \lfloor a_{2k+1} \rfloor + \frac{1}{a_{2k+1} - \lfloor a_{2k+1} \rfloor} = 3k + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}-1} = 3k + 1 + \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 3k + 2 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \\ a_{2\cdot(k+1)+1} &= \lfloor a_{2k+2} \rfloor + \frac{1}{a_{2k+2} - \lfloor a_{2k+2} \rfloor} = 3k + 2 + \frac{2}{\sqrt{3}-1} = 3k + 2 + \frac{2 \cdot (\sqrt{3}+1)}{2} = 3 \cdot (k+1) + 1 + \sqrt{3} - 1. \end{aligned}$$

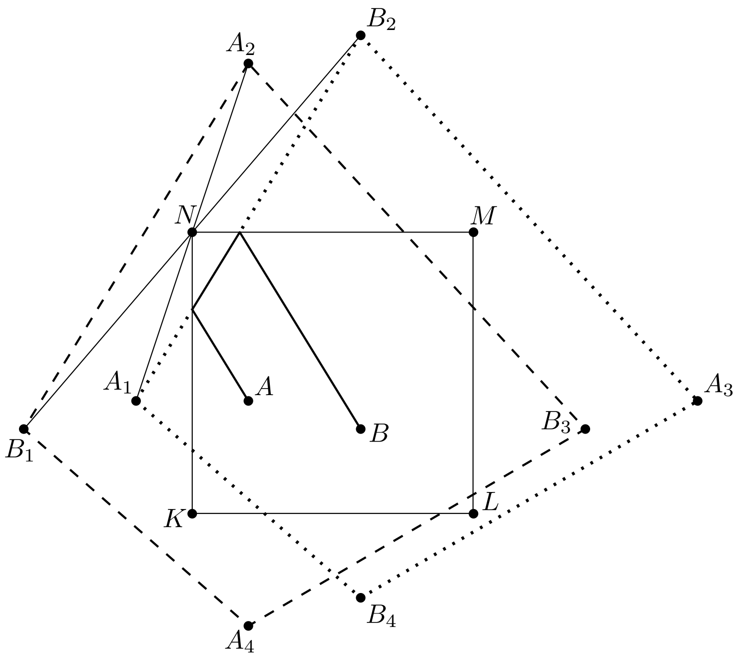
Stąd $a_{2024} = 3034 + \frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

**Zadanie 38.** W Mszanie Dolnej stoi stół bilardowy o wymiarach $10 \times 10$ z dwoma bilami umieszczonymi tak, jak przedstawiono na obrazku. Każda bila jest punktem, zawsze porusza się po liniach prostych i gdy odbija się od krawędzi stołu, to kąt odbicia jest równy kątowi padania. Rozważ wszystkie trasy, wzdłuż których bila $A$ odbija się dokładnie dwa razy od ścian stołu po czym uderza bilę $B$. Jaka jest suma kwadratów ich długości?




*Wynik.* 2520

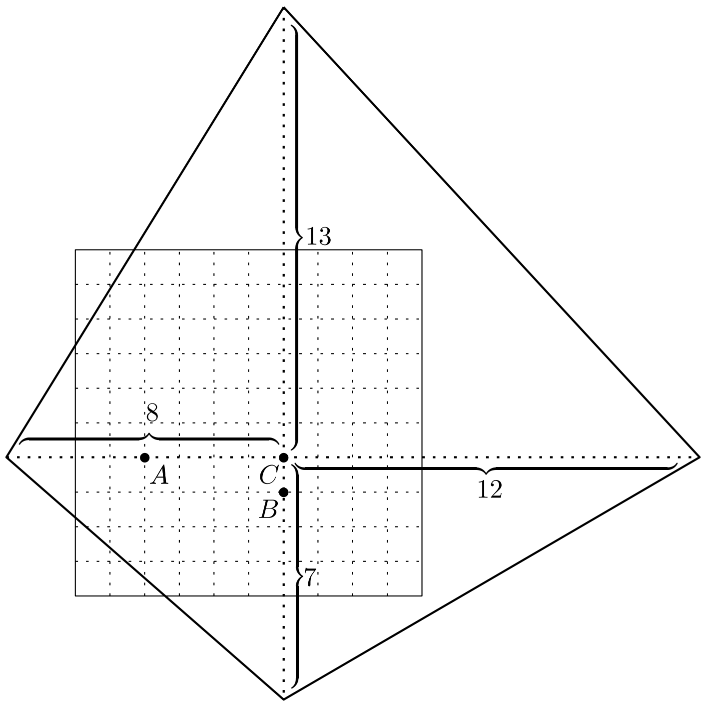
*Rozwiązanie.* Zauważmy najpierw, że przyjmując lewy dolny róg za początek układu współrzędnych $A = [2, 4]$ i $B = [6, 3]$. Odbijamy $A$ i $B$ względem boków trójkąta i oznaczamy wszystko zgodnie z rysunkiem poniżej.




Rozważmy trajektorię z $A$ do $B$, która odbija się od $KN$, a następnie od $MN$ i odbijmy jej fragmenty zawierające punkt $A$ (odpowiednio $B$) względem $KN$ (odpowiednio $MN$). Ze względu na równość kątów padania i odbicia otrzymujemy dokładnie odcinek $A_1B_2$ (ten proces będziemy nazywać *rozprostowaniem* do $A_1B_2$). Zauważmy, że jest to jedyna dopuszczalna trajektoria, która odbija się od tych boków kwadratu dokładnie dwa razy. Istotnie, rozprostowując teoretyczną trajektorię $A \to MN \to KN \to B$ dostajemy w wyniku odcinek $A_2B_1$, który nie przecina kwadratu $KLMN$. Wynika to z własności odbić, które implikują, że $N$ jest środkiem zarówno $A_1A_2$ jak i $B_1B_2$. Zatem taka trajektoria nie jest możliwa.

Podobnie wszystkie poszukiwane trajektorie, w których odbicia następują na dwóch sąsiednich bokach kwadratu $KLMN$ rozprostowują się do jednego z boków czworokąta $A_1B_2A_3B_4$ lub jego przesuniętej kopii $B_1A_2B_3A_4$. Spośród odpowiadających sobie przystających boków dokładnie jeden jest wykorzystany, ponieważ ten drugi z nich nie daje odpowiedniej konfiguracji. Wynika stąd, że te trajektorie wnoszą wkład do sumy kwadratów długości równy sumie kwadratów długości boków $A_1B_2A_3B_4$. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa oraz faktu, że jego przekątne są prostopadłe i przecinają się w punkcie $C = [6, 4]$ (jak na obrazku poniżej) możemy obliczyć:

$$2(8^2 + 13^2 + 12^2 + 7^2) = 852.$$

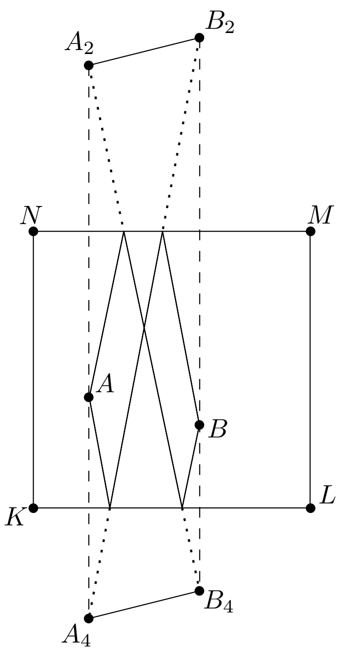



Wystarczy teraz rozważyć trajektorie, które odbijają się od dwóch przeciwnych stron kwadratu $KLMN$, takie jak na następnym rysunku. W tym przypadku obie kolejności są możliwe, zatem wkład do sumy kwadratów trajektorii jest równy sumie kwadratów przekątnych równoległoboku $A_2B_2B_4A_4$ oraz $A_1A_3B_3B_1$. Korzystając z faktu, że suma kwadratów przekątnych w równoległoboku jest równa sumie kwadratów jego boków otrzymujemy

$$2(20^2 + 1^2 + 4^2) = 834,$$

dla obu równoległoboków. Zatem łączna suma to

$$852 + 2 \cdot 834 = 2520.$$




**Zadanie 39.** Niech $x||y$ oznacza konkatenację dwóch dodatnich liczb całkowitych, tzn. liczbę uzyskaną przez napisanie obok siebie wszystkich cyfr występujących w $x$, a następnie tych w $y$, na przykład $3||4 = 34$, $24||5 = 245$, $20||24 = 2024$. Dodatnia liczba całkowita $n$ jest nazywana *trójwidzialną* jeśli istnieją takie trzy parami różne dodatnie liczby całkowite $a$, $b$, $c$ (bez zer wiodących), że $n = a||b||c$ oraz $a$ dzieli $b$ i $b$ dzieli $c$. Jaka jest największa pięciocyfrowa liczba trójwidzialna?

*Wynik.* 94590

*Rozwiązanie.* Zauważmy, że jeśli liczby $a$, $b$, i $c$ są różne, to żeby był spełniony warunek podzielności musi zachodzić $2 \cdot a \leqslant b$ i $2 \cdot b \leqslant c$. Niech $s(k)$ oznacza liczbę cyfr $k$. Z warunku podzielności wynika, że ciąg $s(a)$, $s(b)$, $s(c)$ musi być niemalejący. Możliwe są zatem dwa przypadki:

1. Liczby $a$, $b$, $c$ spełniają $s(a) = 1$, $s(b) = 1$ i $s(c) = 3$. Wtedy $a$ wynosi co najwyżej $4 < \frac{9}{2}$. To daje wynik $a = 4$, $b = 8$ i $c = 992$.

2. Liczby $a$, $b$, $c$ spełniają $s(a) = 1$, $s(b) = 2$ i $s(c) = 2$. Wtedy $b$ wynosi co najwyżej $49 < \frac{99}{2}$. Aby zmaksymalizować liczbę $a \parallel b \parallel c$, załóżmy, że pierwsza cyfra wynosi 9. Maksymalna możliwa wartość $b$, to $b = 45$ i w konsekwencji $c = 90$. Rozważanie mniejszej wartości $a$ prowadzi do uzyskania mniejszego wyniku.

Największa możliwa do uzyskania liczba trójwidzialna to 94590.

**Zadanie 40.** Niech $S_x$ oznacza liczbę zapisaną przez ciąg cyfr $S$ w systemie pozycyjnym o podstawie $x$. Na przykład $242_7 = 2 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7 + 2 = 128_{10} = 10000000_2$. Znajdź sumę wszystkich liczb całkowitych $x > 5$, dla których zdanie

$$2024_x \text{ jest podzielne przez } 15_x$$

jest prawdziwe.

*Wynik.* 471

*Rozwiązanie.* Szukamy takich liczb całkowitych $x$, dla których ułamek $\frac{2x^3+2x+4}{x+5}$ przyjmuje wartości całkowite. Skoro zachodzi równość

$$\frac{2x^3 + 2x + 4}{x + 5} = 2x^2 - 10x + 52 - \frac{256}{x + 5},$$

to wystarczy, żeby $x + 5$ dzieliło $256 = 2^8$. Skoro $x > 5$, to szukamy dzielników większych od 10. Wszystkie takie dzielniki to 16, 32, 64, 128 oraz 256. Zatem szukana suma wynosi

$$\sum_{i=4}^{8} (2^i - 5) = 2^9 - 2^4 - 25 = 512 - 16 - 25 = 471.$$

**Zadanie 41.** Mamy dwie skrzynki: pierwsza zawiera pięć działających żarówek i dziewięć uszkodzonych, natomiast druga zawiera dziewięć działających żarówek i pięć uszkodzonych. Działające żarówki zawsze świecą, podczas gdy uszkodzone świecą z prawdopodobieństwem $p$ (gdzie $0 < p < 1$), które jest takie samo dla wszystkich uszkodzonych żarówek. Znajdź wartość $p$, dla której następujące zdarzenia zajdą z takim samym prawdopodobieństwem:

1. Losowo wybrana żarówka z pierwszej skrzynki działa.

2. Dwie różne losowo wybrane żarówki z drugiej skrzynki działają.

*Wynik.* $\frac{7}{20}$

*Rozwiązanie.* Prawdopodobieństwo pierwszego zdarzenia wynosi

$$P_1 = \frac{1}{14}(5 + 9p),$$

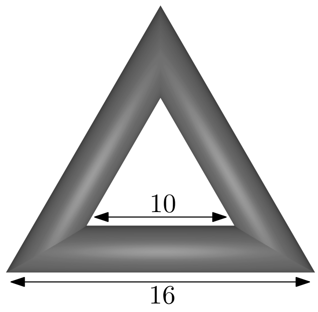
a prawdopodobieństwo drugiego zdarzenia wynosi

$$P_2 = \frac{1}{\binom{14}{2}} \left( \binom{9}{2} + 9 \cdot 5p + \binom{5}{2} p^2 \right).$$

Chcemy teraz znaleźć dla jakich $p$ zachodzi $P_1 = P_2$, co jest równaniem kwadratowym, które można standardowo rozwiązać. Niemniej, zauważmy, że $p = 1$ spełnia równanie, więc ze wzorów Vièta otrzymujemy drugie rozwiązanie tego równania kwadratowego

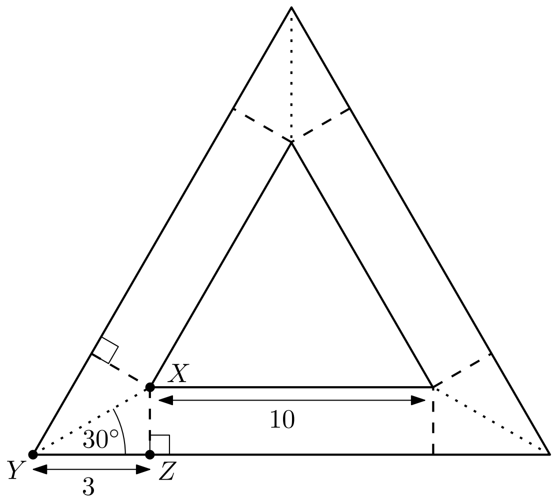
$$\frac{\frac{\binom{9}{2}}{\binom{14}{2}} - \frac{5}{14}}{\frac{\binom{5}{2}}{\binom{14}{2}}} = \frac{7}{20}.$$

**Zadanie 42.** Wyznacz objętość bryły przedstawionej na rysunku poniżej, która składa się z trzech rur w kształcie walca, które zostały identycznie przycięte. Osie walców tworzą trójkąt równoboczny. Długości boków wewnętrznego i zewnętrznego konturu (które również są trójkątami równobocznymi) wynoszą odpowiednio 10 i 16.




*Wynik.* $\frac{117\pi}{4}$

*Rozwiązanie.* Popatrzmy na płaszczyznę zawierającą najbardziej zewnętrzny i wewnętrzny obrys bryły i narysujmy odcinek $XZ$ prostopadły do $YZ$, jak na obrazku.




Symetria rozważanych trójkątów równobocznych daje $YZ = 3$ oraz $\angle ZYX = 30°$, zatem $XZ = \sqrt{3}$. Przecinając całość kształtu płaszczyznami zaznaczonymi na rysunku otrzymujemy trzy walce o promieniach $\frac{XZ}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i wysokości 10 oraz sześć kawałków, które możemy przestawić aby otrzymać trzy walce o tym samym promieniu i wysokości 3. Szukana objętość to zatem

$$V = \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 (3 \cdot 10 + 3 \cdot 3) = \frac{117\pi}{4}.$$

**Zadanie 43.** Na tablicy napisano taki ciąg dziesięciu parami różnych dodatnich liczb całkowitych, że

- suma dowolnych dwóch kolejnych liczb jest podzielna przez 3,
- suma dowolnych trzech kolejnych liczb jest podzielna przez 2.

Jaka jest najmniejsza możliwa suma liczb na tablicy?

*Wynik.* 78

*Rozwiązanie.* Optymalną konstrukcją jest $2, 1, 5, 4, 11, 7, 8, 13, 17, 10$ o sumie 78. Jeśli w napisanym ciągu mamy liczbę podzielną przez 3 to liczby z nią sąsiadujące są podzielne przez 3, a więc wszystkie liczby są podzielne przez 3. Wtedy najmniejsza możliwa suma to $3 \cdot (1 + 2 + \ldots + 10) = 3 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 165 > 78$ i nie jest to optymalne rozwiązanie. Skoro suma trzech kolejnych liczb zawsze ma być podzielna przez 2, to mamy dwie opcje dla każdej trójki: albo są to trzy liczby parzyste albo dwie liczby nieparzyste i jedna parzysta. Załóżmy, że istnieje trójka $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}$ z trzema liczbami parzystymi. Wtedy trójka $x_{i-1}, x_i, x_{i+1}$ nie może zawierać dwóch liczb nieparzystych, więc $x_{i-1}$ również jest parzyste. Zatem wszystkie liczby są parzyste. Najmniejsza możliwa suma to $2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 110 > 78$ i nie jest to optymalne rozwiązanie. Zatem, w każdej trójce są dwie liczby parzyste (P), a trzecia jest nieparzysta (N). Istnieją trzy możliwe konfiguracje:

- NPNNPNNPNN — Sumując siedem najmniejszych liczb nieparzystych i trzy najmniejsze parzyste liczby niepodzielne przez 3 dostajemy najmniejszą możliwą sumę równą $1+5+7+11+13+17+19+2+4+8=87>78$ i nie jest to optymalne rozwiązanie.

- NNPNNPNNPN – Ten układ jest symetryczny do poprzedniego.

- PNNPNNPNNP – Sumując sześć najmniejszych liczb nieparzystych i cztery najmniejsze parzyste liczby niepodzielne przez 3 dostajemy najmniejszą możliwą sumę równą $1+5+7+11+13+17+2+4+8+10=78$ co jest poszukiwanym rozwiązaniem.

**Zadanie 44.** Martynka bawi się ułamkami. Chce znaleźć takie dodatnie liczby całkowite $a$ i $b$, że spełnione są nierówności
$$\frac{2020}{2024}<\frac{a^2}{b}<\frac{999}{1000}$$
oraz suma $a+b$ jest najmniejsza możliwa. Pobaw się razem z Martynką i podaj tę minimalną sumę $a+b$ jako wynik.

*Wynik.* 553

*Rozwiązanie.* Dana nierówność jest równoważna z
$$\frac{1000}{999}<\frac{b}{a^2}<\frac{2024}{2020}.$$
Dla ustalonego $a$ Martynka musi znaleźć liczbę naturalną $b$ spełniającą
$$\frac{1000}{999}\cdot a^2<b<\frac{2021}{2017}\cdot a^2 \quad\iff\quad a^2+\frac{1}{999}\cdot a^2<b<a^2+\frac{4}{2020}\cdot a^2.$$
Dla $a\leqslant 22$ zachodzą nierówności $a^2<a^2+\frac{a^2}{999}$ oraz $a^2+\frac{4a^2}{2020}<a^2+1$, więc nie istnieje taka liczba całkowita $b$. Dla $a\geqslant 23$ najmniejsze możliwe $b$ jakie może wziąć Martynka to $b=a^2+1$. Takie $b$ można wziąć gdy $\frac{a^2}{999}<1$ oraz $\frac{4a^2}{2020}>1$, co jest spełnione dla $a=23$. Tak więc minimalna suma $a+b$ będzie osiągalna dla $a=23$ oraz $b=a^2+1=530$.

**Zadanie 45.** Podłoga namiotu ma kształt trójkąta o bokach długości 1,3 m, 2 m oraz 2,1 m. Producent chce umieścić w reklamie informację, że osoba o wzroście $h$ może wykorzystywać namiot w pełni. Rozumie przez to fakt, że każdy punkt podłogi należy do odcinka długości co najmniej $h$ zawartego w trójkącie. Ile co najwyżej (w metrach) może wynosić $h$?

*Wynik.* $\frac{126}{65}$

*Rozwiązanie.* Najdłuższym odcinkiem który można poprowadzić przez dowolny punkt w trójkącie ostrokątnym (nasz taki jest) to najdłuższa wysokość. Rysując wszystkie odcinki z jednego wierzchołka do przeciwległego boku, pokryjemy cały trójkąt, a najkrótszym odcinkiem, który narysujemy będzie odpowiednia wysokość (trójkąt ostrokątny zawiera wszystkie swoje wysokości). Pozostaje pokazać, że nie istnieje dłuższy odcinek o takiej własności. Weźmy spodek najdłuższej wysokości. Jeśli bok na którym leży jest krótszy niż wysokość, to nie istnieje dłuższy odcinek przechodzący przez ten punkt (wszystkie odcinki zawierające spodek wysokości są najwyżej takiej długości jak wysokość lub bok, na którym leży). Z wzoru na pole trójkąta wynika, że najdłuższa wysokość opada na najkrótszy bok. W naszym wypadku wynosi on $1,3$, więc jeśli najdłuższa wysokość wyjdzie dłuższa to będziemy mieć rozwiązanie.

Jest wiele sposobów na obliczenie długości wysokości opadającej na dany bok. W jednym z nich wykorzystuje się wzór Herona do wyliczenia pola i następnie dzieli otrzymaną wartość przez połowę boku. My policzymy to bardziej elementarnie. Mnożymy wszystkie wartości przez 10 (co odpowiada zmianie jednostek z metrów na decymetry). Oznaczmy przez $x$ oraz $13-x$ odcinki powstałe na boku długości 13 przez podzielenie go spodkiem wysokości. Z twierdzenia Pitagorasa dostajemy
$$20^2-x^2=21^2-(13-x)^2,$$
czyli $26x=128$, a stąd $x=\frac{64}{13}$. Zatem wysokość wynosi
$$h=\sqrt{20^2-\left(\frac{64}{13}\right)^2}=\frac{4}{13}\sqrt{25\cdot 169-256}=\frac{4}{13}\sqrt{9\cdot 9\cdot 49}=\frac{252}{13}.$$
Skoro $\frac{252}{13}>13$, to wysokość jest dłuższa niż bok, tak jak oczekiwaliśmy. Wynik w metrach wynosi więc $\frac{252}{130}=\frac{126}{65}$.

**Zadanie 46.** Znajdź największą taką dodatnią liczbę całkowitą $q$, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej $n \geqslant 55$ liczba $q$ dzieli iloczyn
$$n(n+4)(n-23)(n-54)(n+63).$$

*Wynik.* 40

*Rozwiązanie.* Oznaczmy ten iloczyn jako $A$. Rozważając $A$ modulo 5 widzimy, że jego czynnikami są $n$, $n+4$, $n+2$, $n+1$ i $n+3$. Ponieważ są parami różne, to przynajmniej jeden z nich to $0 \pmod 5$, czyli $5 \mid A$. Jeśli $n$ jest parzyste, to istnieją trzy parzyste czynniki w $A$, zatem $8 \mid A$. Jeśli $n$ jest nieparzyste, to są tam dwa parzyste czynniki $n-23$ i $n+63$, których różnica to 86. Ponadto $86 \equiv 2 \pmod 4$, zatem dokładnie jeden z nich jest wielokrotnością liczby 4, co daje $8 \mid A$. Razem oznacza to, że $40 \mid A$.

Biorąc $n = 59$ widzimy, że największe potęgi 2 i 5 dzielące $A$ to odpowiednio 8 i 5. Biorąc $n = 55$ widzimy, że $3 \nmid A$. Sumarycznie, dla każdej liczby pierwszej $p > 5$ czynniki $A$ reprezentują co najwyżej $5 < p$ reszt z dzielenia przez $p$, więc zawsze możemy wybrać takie $n$, że $p \nmid A$. Zatem $q = 40$.

**Zadanie 47.** Ania, Beata, Cezary, Daniel i Eryk uczęszczają na dwa kursy, przy czym Ania i Beata chodzą tylko na pierwszy kurs, Daniel i Eryk tylko na drugi, a Cezary uczęszcza na oba. Radek wie, że na każdy z kursów chodzą trzy osoby, ale nie wie, które trzy. Dlatego prosi, aby każdy z uczniów wskazał losowo palcem jednego z uczniów, z którym jest na pewnym kursie (przykładowo Cezary wybierze każdą z pozostałych osób z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$). Jakie jest prawdopodobieństwo, że Radek odkryje, że to właśnie Cezary bierze udział w obu kursach?

*Wynik.* $\frac{3}{4}$

*Rozwiązanie.* Jeśli jeden student pokazuje na innego, to powiemy że jest między nimi *połączenie*. Radek jest w stanie zidentyfikować Cezarego wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jedna osoba z każdego kursu ma połączenie z Cezarym. Jeśli Cezary ma więcej niż dwa połączenia, sytuacja jest oczywista, ponieważ chodząc tylko na jeden kurs nie byłby w stanie uzyskać ich aż tyle. W innym przypadku ma ich dokładnie po jednym z każdego kursu. Bez straty ogólności załóżmy, że mamy następujące połączenia: Ania – Cezary i Daniel – Cezary. Ponieważ Beata nie ma połączenia z Cezarym musiała wskazać na Anię. Analogicznie, Eryk wskazał na Daniela. Mamy więc następującą ścieżkę połączeń: Beata – Ania – Cezary – Daniel – Eryk. Jedyna możliwa ścieżka długości 4 łącząca wszystkie 5 osób ma na środku Cezarego, co chcieliśmy pokazać. Z drugiej strony, jeśli nie ma połączenia między Cezarym a żadną osobą z jednego kursu, możemy założyć, że uczęszcza on tylko na ten drugi (ponieważ nie mamy informacji o połączeniu z pierwszym) i w rezultacie jest on nierozróżnialny z osobami, które również tam chodzą. Teraz możemy obliczyć szukane prawdopodobieństwo.

1. Załóżmy, że Ania i Beata wskazują na siebie nawzajem, a Daniel i Eryk nie. Prawdopodobieństwo pierwszego zdarzenia wynosi $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. W drugim zdarzeniu przynajmniej jedna osoba musi wskazać na Cezarego, więc prawdopodobieństwo wynosi $1 - \frac{1}{4}$. W końcu Cezary musi wskazać Anię lub Beatę, co stanie się z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. Analogiczna sytuacja zachodzi, gdy Daniel i Eryk wskazują na siebie nawzajem, a Ania i Beata nie.

2. W drugim przypadku Ania i/lub Beata wskazują na Cezarego, co jest z prawdopodobieństwem $1 - \frac{1}{4}$; podobnie Daniel i Eryk również $1 - \frac{1}{4}$. Nie jest istotne na kogo wskaże Cezary.

Dodając wszystko do siebie otrzymujemy
$$\frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{2}{4} + \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{32} + \frac{3}{32} + \frac{9}{16} = \frac{3}{4}.$$

**Zadanie 48.** Funkcja $f$ określona na zbiorze liczb rzeczywistych nieujemnych spełnia następujące warunki:

- $f(x) = x^2$ dla każdej liczby $0 \leqslant x < 1$ oraz
- $f(x+1) = f(x) + x + 1$ dla każdej nieujemnej liczby rzeczywistej $x$.

Znajdź wszystkie liczby $x$ spełniające równość $f(x) = 482$.

*Wynik.* $15 + 11\sqrt{2} = 15 + \sqrt{242}$

*Rozwiązanie.* Niech $\{x\}$ oznacza część ułamkową z $x$. Dla $\lfloor x \rfloor \geqslant 1$ z zadanych warunków otrzymujemy
$$\begin{aligned} f(x) &= f(\lfloor x \rfloor + \{x\}) \\ &= \lfloor x \rfloor + \{x\} + f(\lfloor x \rfloor - 1 + \{x\}) = \dots \\ &= \sum_{i=1}^{\lfloor x \rfloor} i + \lfloor x \rfloor \cdot \{x\} + f(\{x\}) \\ &= \frac{\lfloor x \rfloor \cdot (\lfloor x \rfloor + 1)}{2} + \lfloor x \rfloor \cdot \{x\} + \{x\}^2. \end{aligned}$$

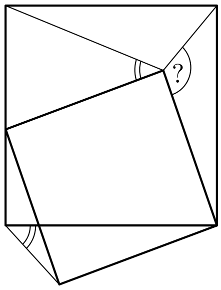
Zauważmy, że powyższy wzór jest prawdziwy także gdy $\lfloor x \rfloor = 0$.

Teraz pokażemy, że funkcja $f$ jest ściśle rosnąca. Dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 0$ oraz takich $x, y \in [n, n+1)$, że $x < y$ z wykazanej równości dostajemy $f(x) < f(y)$. Z drugiej strony dla wszystkich $x \in [n, n+1)$ warunek $f(x) < f(n+1)$ zachodzi, ponieważ

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\lfloor x \rfloor \cdot (\lfloor x \rfloor + 1)}{2} + \lfloor x \rfloor \cdot \{x\} + \{x\}^2 \\ &< \frac{\lfloor x \rfloor \cdot (\lfloor x \rfloor + 1)}{2} + \lfloor x \rfloor + 1 \\ &= \frac{(\lfloor x \rfloor + 2) \cdot (\lfloor x \rfloor + 1)}{2} \\ &= \frac{(n+2) \cdot (n+1)}{2} \\ &= f(n+1). \end{aligned}$$

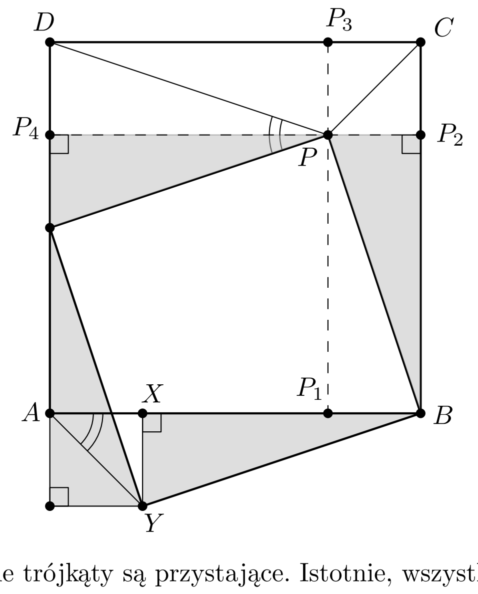
Zatem istnieje co najwyżej jedno rozwiązanie zadanego równania $f(x) = 482$. Największa liczba całkowita $n$ spełniająca $\frac{n^2+n}{2} \leqslant 482$ to 30, więc $\lfloor x \rfloor = 30$. Czyli $482 = f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor \cdot (\lfloor x \rfloor + 1)}{2} + \lfloor x \rfloor \cdot \{x\} + \{x\}^2 = 15 \cdot 31 + 30 \cdot \{x\} + \{x\}^2$. Jest to równanie kwadratowe $\{x\}$, które daje unikalne rozwiązanie $\{x\} = -15 + \sqrt{242}$ należące do przedziału $[0, 1)$. Zatem jedynym rozwiązaniem jest $x = 30 - 15 + \sqrt{242} = 15 + 11\sqrt{2}$.

**Zadanie 49.** Na rysunku znajdują się dwa kwadraty i para kątów równej miary. Wyznacz miarę kąta oznaczonego znakiem zapytania wyrażoną w stopniach.




*Wynik.* 112,5

*Rozwiązanie.* Narysujmy rzuty prostokątne wierzchołka szukanego kąta na boki większego z kwadratów i oznaczmy wszystkie punkty jak na rysunku.




Łatwo zauważyć, że cztery zacieniowane trójkąty są przystające. Istotnie, wszystkie z nich są trójkątami prostokątnymi o przeciwprostokątnej równej jednemu z boków mniejszego z kwadratów i jednym kącie o mierze $\alpha$ danym przez to, o ile jeden z kwadratów jest obrócony względem drugiego. Wynika stąd, że $P_4PP_3D$ jest prostokątem złożonym z dwóch kopii zacieniowanych trójkątów, zatem kąt oznaczony podwójną linią z treści zadania jest równy $2\alpha$. Trójkąty $AXY$ oraz $PP_2C$ są prostokątne oraz równoramienne (ponownie ze względu na przystawianie zacieniowanych trójkątów), więc $2\alpha = 45°$ i szukana miara kąta to

$$90° - \alpha + 45° = 112{,}5°.$$

**Zadanie 50.** Karolinie znudziły się tradycyjne działania takie jak dodawanie czy odejmowanie. Stworzyła zatem własne działanie i nazwała je *gwiazdkowaniem.* To działanie, oznaczane jako $a \star b$, jest zdefiniowane na liczbach rzeczywistych i ma następujące własności:

1. $(a + b) \star c = (a \star c) + (b \star c)$
2. $a \star (b + c) = (a \star b) \star c$

Wiedząc, że $3 \star 2 = 54$, wyznacz wartość $5 \star 4$.

*Wynik.* 1620

*Rozwiązanie.* Z drugiej własności wynika, że $5 \star 4 = (5 \star 2) \star 2$. Oznaczając $f(x) = x \star 2$, problem sprowadza się więc do znalezienia $f(f(5))$ wiedząc, że $f(3) = 54$.

Pierwsza własność daje nam $f(a + b) = f(a) + f(b)$. Stąd $54 = f(3) = f(1) + f(2) = f(1) + f(1) + f(1)$, a więc $f(1) = 18$. Używając prostej indukcji dostajemy, że $f(n) = 18n$ dla każdej liczby całkowitej dodatniej $n$. Zatem $f(5) = 18 \cdot 5$ i $f(f(5)) = 18^2 \cdot 5 = 1620$.

Rzeczywiście istnieje działanie o takich własnościach, gdyż definiując $x \star y = x(3\sqrt{2})^y$ dla dowolnych liczb rzeczywistych $x$ i $y$ obie własności mamy spełnione.

**Zadanie 51.** Justyna chce pokolorować pola planszy $10 \times 11$ na czarno i biało, w taki sposób, by każde pole miało co najwyżej jednego sąsiada (dwa pola sąsiadują jeśli mają wspólną krawędź) w tym samym kolorze co ono. Na ile sposobów może to zrobić? Kolorowania, które wyglądają tak samo dopiero po obrocie uznajemy za różne.

*Wynik.* 464

*Rozwiązanie.* Jeśli na naszej planszy znajdziemy jakieś domino $2 \times 1$ składające się z dwóch kwadratów tego samego koloru, to dwa rzędy bądź dwie kolumny, które to domino zawierają, muszą być całkowicie wypełnione dominami w naprzemiennych kolorach. W takim razie każde dwa takie domina na planszy muszą być ułożone w tej samej orientacji. Nietrudno udowodnić, że prostokąt $n \times 1$ możemy wypełnić dominami i kwadratami na $f(n + 1)$ sposobów, gdzie $f(n)$ jest $n$-tą liczbą Fibonacciego daną przez $f(n) = f(n - 1) + f(n - 2)$, $f(0) = 0$ i $f(1) = 1$.

W takim razie, gdy domina na planszy są ułożone poziomo (równolegle do boku długości 11), możliwych kolorowań pierwszego rzędu będzie $2f(12)$, gdzie $f(12)$ odpowiada za dobór deseniu kwadratów i domin, który dodatkowo możemy pokolorować na jeden z dwóch sposobów. Podobnie, jeśli domina są ułożone w drugi sposób, dostaniemy $2f(11)$. Musimy jeszcze pamiętać o przypadku szachownicy (a dokładniej dwóch możliwych kolorowań w szachownicę), które nie zawierają żadnych domin, ale włączyliśmy je w obydwa przypadki. Łącznie dostajemy więc $2f(12) + 2f(11) - 2 = 2 \cdot (144 + 89 - 1)$ możliwości.

**Zadanie 52.** Natalia dowiedziała się, czym jest średnia ruchoma. Wzięła swój ulubiony ciąg – ciąg Fibonacciego $(F_k)_{k=0}^{\infty}$ zdefiniowany przez $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ i $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla każdego $n \geqslant 2$, a następnie utworzyła ciąg $(m_k)_{k=6}^{2024}$ średnich ruchomych, który spełnia równość $m_k = \frac{F_k + F_{k-1} + \ldots + F_{k-6}}{7}$ dla każdego $k \geqslant 6$. Ile wyrazów ciągu $(m_k)_{k=6}^{2024}$ jest liczbami całkowitymi?

*Wynik.* 252

*Rozwiązanie.* Udowodnijmy indukcyjnie wzór $\sum_{i=0}^{k} F_i = F_{k+2} - 1$. Dla $k = 0$ mamy $\sum_{i=0}^{0} F_i = F_0 = 0 = 1 - 1 = F_2 - 1$, a w kroku indukcyjnym $\sum_{i=0}^{k+1} F_i = F_{k+1} + \sum_{i=0}^{k} F_i = F_{k+1} + F_{k+2} - 1 = F_{k+3} - 1$. W takim razie

$$F_k + F_{k-1} + \cdots + F_{k-6} = \sum_{i=0}^{k} F_i - \sum_{i=0}^{k-7} F_i = F_{k+2} - F_{k-5} = 7 \cdot m_k.$$

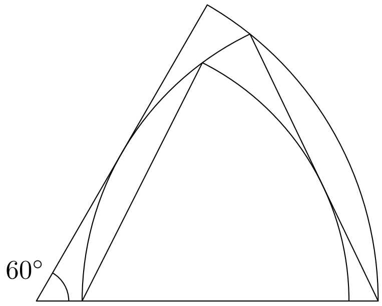
Niech $d_l$ będzie resztą z dzielenia $F_l$ przez 7. Wyrazy ciągu $\{d_l\}_{l=0}^{2024}$ wynoszą

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 1, 6, 0, 6, 6, 5, 4, 2, 6, 1, 0, 1, 1, \ldots, 0$$

i skoro $d_l \equiv d_{l-1} + d_{l-2} \pmod 7$, to ciąg $d_l$ jest okresowy z okresem długości 16.

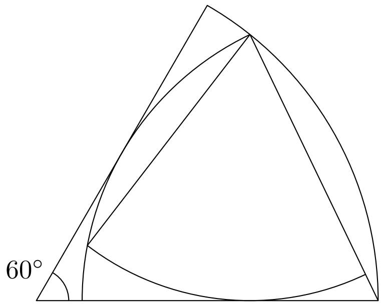
Musimy znaleźć takie indeksy, że $7 | d_{l+2} - d_{l-5}$, ale to dzieje się tylko, gdy $l \equiv 4, 12 \pmod{16}$. Skoro $6 \leqslant l \leqslant 2024$ oraz $2024 = 126 \cdot 16 + 8$, rozwiązania mają formę $l = 16 \cdot k + 4$ dla $1 \leqslant k \leqslant 126$ oraz $l = 16 \cdot k + 12$ dla $0 \leqslant k \leqslant 125$. Łącznie otrzymujemy $2 \cdot 126 = 252$ rozwiązania.

**Zadanie 53.** W wycinku koła o kącie $60^\circ$ umieszczamy kolejny wycinek koła, tak duży jak to możliwe, a następnie wewnątrz tego mniejszego wycinka umieszczamy jeszcze jeden maksymalny możliwy wycinek, tak jak na rysunku. Wyznacz iloraz długości promienia najmniejszego wycinka do długości promienia największego wycinka.



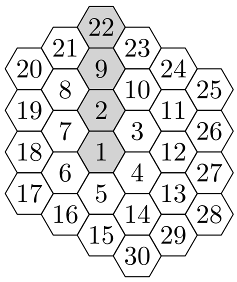

*Wynik.* $\frac{\sqrt{39}}{8}$

*Rozwiązanie.* Obróćmy najmniejszy wycinek, jak na poniższym obrazku.




Z tego obrazka jasno wynika, że chcemy obliczyć współrzędną $y$ przecięcia pierwszego i drugiego łuku. Niech środek pierwszego wycinka ma współrzędne $(0,0)$, a prawy wierzchołek $(1,0)$. Wtedy największy okrąg opisany jest przez $x^2+y^2=1$, a średni przez $(x-1)^2+y^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$. Odejmując pierwsze równanie od drugiego otrzymujemy $1-2x=\frac{3}{4}-1$, a zatem $x=\frac{5}{8}$. Stąd można łatwo otrzymać rozwiązania $y=\pm\frac{\sqrt{39}}{8}$, a skoro $y\geqslant 0$, to jedynym rozwiązaniem jest $\frac{\sqrt{39}}{8}$.

**Zadanie 54.** Ul składa się z 2024 sześciokątnych komórek. Środkowa komórka zawiera 1 ml miodu. Poruszając się od środka po spirali, kolejne komórki zawierają coraz więcej miodu aż do 2024 ml miodu w ostatniej komórce, jak pokazano na rysunku poniżej, przedstawiającym fragment tego ula. Pszczela Królowa ogłosiła budowę autostrady rozpościerającej się w linii prostej od środkowej komórki ula. Komórki przez które przechodzi początek autostrady zaznaczono na szaro na rysunku. Aby wykonać projekt, miód z wszystkich komórek na trasie autostrady musi zostać przemieszczony do innych komórek. Ile miodu (w mililitrach) trzeba będzie przemieścić by wykonać tę inwestycję?




*Wynik.* 17928

*Rozwiązanie.* Niech $H(n)$ będzie ilością miodu w $n$-tej komórce od środka na autostradzie – tj. $H(1)=2$, $H(2)=9$, itd. Zwróćmy uwagę na sześciokąt uformowany z komórek w odległości dokładnie $n$ od środka. Podążając wzdłuż któregokolwiek boku tego sześciokąta musimy zrobić $n$ kroków. Na spirali od komórki $H(n)$ do komórki $H(n+1)$ przejdziemy przez pięć ścian sześciokąta w odległości $n$ od środka i jedną ścianę sześciokąta w odległości $n+1$. Zatem $H(n+1)=H(n)+5n+n+1=H(n)+6n+1$. Wiedząc, że $H(1)=2$, możemy znaleźć zwartą formułę na ten ciąg

$$\begin{aligned}H(n)&=6(n-1)+1+H(n-1)=\dots\\&=6\cdot((n-1)+(n-2)+\ldots+1)+(n-1)+H(1)\\&=6\cdot\frac{(n-1)n}{2}+n+1\\&=3n^2-2n+1.\end{aligned}$$

By znaleźć objętość miodu na autostradzie, najpierw ustalmy liczbę komórek $N$ na niej. Są 2024 sześciokąty, więc $N$ jest największą liczbą spełniającą

$$\begin{aligned} H(N) &\leqslant 2024, \\ 3N^2 - 2N &\leqslant 2023, \\ N^2 - \frac{2}{3}N &\leqslant 674 + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Skoro $27^2 - \frac{2}{3} \cdot 27 > 729 - 27 > 675$, to wartość $N$ może wynosić co najwyżej 26 i rzeczywiście $26^2 - \frac{2}{3} \cdot 26 < 676 - 18 < 674$, więc $N = 26$ jest szukaną liczbą sześciokątów na autostradzie.

Pozostaje policzyć

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{k=1}^{N} H(k) &= 1 + 3\sum_{k=1}^{N} k^2 - 2\sum_{k=1}^{N} k + \sum_{k=1}^{N} 1 \\ &= 1 + \frac{1}{2}N(N+1)(2N+1) - N(N+1) + N \\ &= 1 + 13 \cdot 27 \cdot 53 - 26 \cdot 27 + 26 \\ &= 17928. \end{aligned}$$

Innym sposobem wyznaczenia końcowej sumy jest zauważenie, że

$$H(k) = 6 \cdot \frac{(k-1)k}{2} + k + 1 = 6\binom{k}{2} + \binom{k+1}{1}$$

i skorzystanie z własności trójkąta Pascala

$$\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \ldots + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{k=1}^{N} H(k) &= 1 + 6\sum_{k=1}^{N} \binom{k}{2} + \sum_{k=1}^{N} \binom{k+1}{1} \\ &= 1 + 6\binom{N+1}{3} + \left(\binom{N+2}{2} - 1\right) \\ &= 27 \cdot 26 \cdot 25 + 14 \cdot 27 \\ &= 17928. \end{aligned}$$

.

**Zadanie 55.** Jak wiele różnych liczb pojawia się w ciągu

$$\left\lfloor \frac{1^2}{2024} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2^2}{2024} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{3^2}{2024} \right\rfloor, \ldots, \left\lfloor \frac{2024^2}{2024} \right\rfloor,$$

gdzie przez $\lfloor x \rfloor$ oznaczamy największą liczbę całkowitą mniejszą lub równą $x$?

*Wynik.* 1519

*Rozwiązanie.* Dla $n \leqslant 1011$ zachodzi $\frac{(n+1)^2}{2024} - \frac{n^2}{2024} = \frac{2n+1}{2024} \leqslant \frac{2023}{2024} < 1$, co oznacza, że $\left\lfloor \frac{(n+1)^2}{2024} \right\rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{n^2}{2024} \right\rfloor + 1$. Zatem na liście $\left\lfloor \frac{1^2}{2024} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2^2}{2024} \right\rfloor, \ldots, \left\lfloor \frac{1012^2}{2024} \right\rfloor$ znajdą się wszystkie liczby całkowite od $\left\lfloor \frac{1^2}{2024} \right\rfloor = 0$ do $\left\lfloor \frac{1012^2}{2024} \right\rfloor = 506$, więc w pierwszych 1012 wyrazach naszego ciągu znajdziemy 507 różnych liczb.

Z drugiej strony, dla $n \geqslant 1012$ zachodzi $\frac{(n+1)^2}{2024} - \frac{n^2}{2024} = \frac{2n+1}{2024} \geqslant \frac{2025}{2024} > 1$, a więc $\left\lfloor \frac{(n+1)^2}{2024} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{n^2}{2024} \right\rfloor$. Zatem wszystkie elementy $\left\lfloor \frac{1013^2}{2024} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{1014^2}{2024} \right\rfloor, \ldots, \left\lfloor \frac{2024^2}{2024} \right\rfloor$ są nowe na liście (gdyż są ściśle większe niż wszystkie wyrazy je poprzedzające). Stąd w ostatnich 1012 wyrazach ciągu znajdziemy 1012 parami różnych liczby, które są także różne od liczb z pierwszej połowy ciągu.

Łącznie, nasz ciąg zawiera $507 + 1012 = 1519$ różnych liczb.

**Zadanie 56.** Ile jest takich uporządkowanych czwórek $(a, b, c, d)$ parami różnych liczb, że $a, b, c, d \in \{1, 2, 3, \ldots, 17\}$ i liczba $a - b + c - d$ jest podzielna przez 17?

*Wynik.* 3808

*Rozwiązanie.* Skonstruujmy 17-kąt foremny $P_1 \ldots P_{17}$. Z $a - b \equiv d - c \pmod{17}$ wynika, że $P_a, P_b, P_c, P_d$ tworzą trapez równoramienny o podstawach $P_aP_c$ i $P_bP_d$. Po usunięciu jednego wierzchołka pozostałe 16 wierzchołków może zostać podzielonych na 8 prostych równoległych i dowolne dwie z nich mogą być podstawami trapezu (a odpowiadające im punkty zbiorem $\{a, b, c, d\}$). Jest $17 \cdot \binom{8}{2} = 476$ takich zbiorów, a każdy z nich definiuje kilka uporządkowanych czwórek: musimy wybrać, którą podstawą jest $P_aP_c$, a którą jest $P_bP_d$, a następnie można zamienić $a$ z $c$ i $b$ z $d$, co daje $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 8$ opcji. Ostatecznie wynikiem jest $8 \cdot 476 = 3808$.

**Zadanie 57.** Dany jest prostokąt $ABCD$ oraz taki punkt $E$ leżący na boku $CD$, że $2|DE| = |EC|$. Niech $F$ będzie punktem przecięcia odcinków $BD$ i $AE$. Wyznacz $\frac{|AD|}{|AB|}$, jeśli $\angle AFD = 45°$.

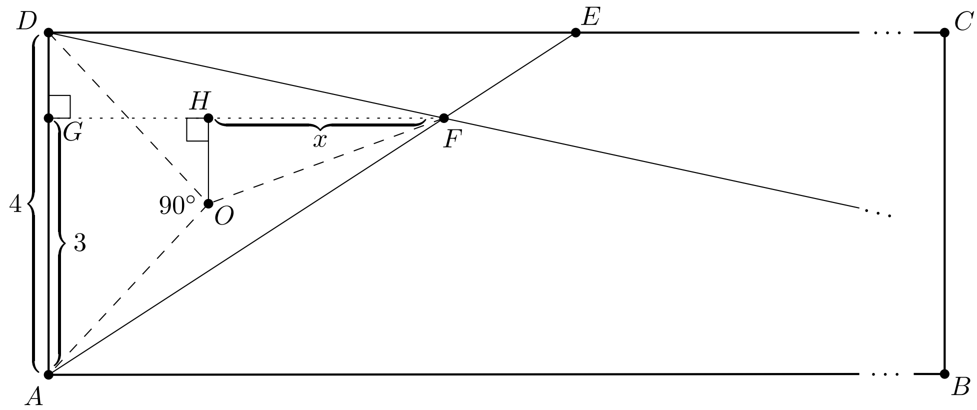
*Wynik.* $\frac{\sqrt{7}-2}{3}$

*Rozwiązanie.* Zadana konfiguracja jest niewrażliwa na skalowanie, więc możemy założyć, że $|AD| = 4$. Oznaczmy dalej rzut prostokątny $F$ na $AD$ przez $G$, środek okręgu opisanego na trójkącie $ADF$ przez $O$ i rzut prostokątny $O$ na $GF$ przez $H$. Trójkąty $ABF$ i $EDF$ są podobne w stosunku $|AB| : |ED| = 3 : 1$, zatem $|AG| = 3$. Mamy $\angle DOA = 2\angle DFA = 90°$, czyli $AOD$ jest trójkątem prostokątnym równoramiennym. Odległość $O$ od zarówno $AB$ jak i $AD$ wynosi zatem 2. Oznaczając ostatnią nieznaną długość boku w trójkącie prostokątnym $HOF$ przez $x = |HF|$ i korzystając z twierdzenia Pitagorasa dostajemy

$$x^2 + (3 - 2)^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8 \Rightarrow x = \sqrt{7}.$$

Skoro trójkąty $DGF$ i $DAB$ są podobne, to szukany stosunek wynosi

$$\frac{|DA|}{|AB|} = \frac{|DG|}{|DF|} = \frac{1}{2 + \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7} - 2}{3}.$$




**Zadanie 58.** Wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych ma stopień 10, wszystkie jego pierwiastki są rzeczywiste i $P(x)$ dzieli wielomian $P(P(x) + 2x - 4)$. Wyznacz wartość $\frac{P(2024)}{P(206)}$.

*Uwaga:* Mówimy, że wielomian $P(x)$ dzieli wielomian $Q(x)$ jeśli $P(x)$ i $Q(x)$ mają współczynniki całkowite i istnieje wielomian $R(x)$ o współczynnikach całkowitych spełniający równość $Q(x) = R(x) \cdot P(x)$.

*Wynik.* $10^{10} = 10\,000\,000\,000$

*Rozwiązanie.* Jeśli $r$ jest pierwiastkiem wielomianu $P(x)$, to liczby

$$2r - 4,\ 2(2r - 4) - 4 = 4r - 12,\ 2(4r - 12) - 4 = 8r - 28, \ldots, 2^n r - 2^{n+2} + 4 \text{ dla } n \in \mathbb{N}$$

również są pierwiastkami $P(x)$. Ale $P(x)$ ma co najwyżej 10 pierwiastków rzeczywistych, więc dla pewnych $j > i$ mamy

$$2^i r - 2^{i+2} + 4 = 2^j r - 2^{j+2} + 4.$$

Stąd dostajemy $2^i \cdot (r - 4) = 2^j \cdot (r - 4)$, więc $r = 4$. Zatem 4 jest jedynym pierwiastek i $P(x) = a \cdot (x - 4)^{10}$, gdzie $a \neq 0$ jest pewną liczbą rzeczywistą. Ostatecznie obliczamy $\frac{P(2024)}{P(206)} = \left(\frac{2020}{202}\right)^{10} = 10^{10} = 10\,000\,000\,000$.

**Zadanie 59.** Gabrysia stoi w kółku składającym się z 2024 osób ponumerowanych zgodnie ze wskazówkami zegara kolejnymi liczbami $1, 2, \ldots, 2024$. Wszyscy rzucają do siebie frisbee w następujący sposób. Osoba z numerem 1 rzuca do osoby numer 3, ta rzuca je do osoby z numerem 5 i tak dalej. Każda z osób rzuca frisbee do osoby, która znajduje się obok osoby po ich lewej stronie (tj. pomija jedną osobę). Każda z pominiętych osób jest zdenerwowana i nie chce grać dalej, więc opuszcza kółko. Cały schemat powtarza się, aż do czasu gdy w grze pozostają tylko dwie osoby. Jeśli Gabrysia chciałaby być jedną z tych dwóch osób, to na którym miejscu w kółku powinna stanąć na początku? Wyznacz sumę tych liczb.

*Wynik.* 2978

*Rozwiązanie.* Gdyby w grze pozostały tylko dwie osoby, to ta posiadająca frisbee podałaby je do samej siebie i pozostałaby w okręgu. Aby znaleźć pozycję tej ostatniej osoby rozważmy poniższą sytuację. Aby znaleźć pozycję ostatniej osoby, rozważmy wykonanie poniższego polecenia. Jeżeli w kółku jest $2^n$ osób to wszyscy na parzystej pozycji wyjdą po tym, jak frisbee wykona jedną pełną rundę wśród uczestników. Otrzymamy podobną sytuację z $2^{n-1}$ osobami, a dodatkowo osoba na pozycji 1 znów otrzyma frisbee. Z indukcji matematycznej wiemy, że ta osoba będzie ostatnią, która pozostała w grze. Jeżeli w grze znajduje się $2^n + k$ osób, to po $k$-tym rzucie osoba trzymająca frisbee, czyli na pozycji $2k + 1$, jest w podobnej sytuacji jak osoba na pozycji 1 w grze dla $2^n$ osób. Wśród $2024 = 1024 + 1000$ osób byłaby to pozycja 2001.

Dla znalezienia przedostatniej osoby przyjmijmy, że liczba osób stojących w kółku wynosi $2^n + 2^{n+1}$. Twierdzimy, że przedostatnia osoba stoi na pozycji 1. Można to łatwo sprawdzić dla małych $n$: przedostatnia osoba w kółku złożonym z 3, 6 lub 12 osób to osoba 1. Ponownie korzystając z indukcji: jeśli było $2^{n+1} + 2^{n+2}$ osób, to po jednej rundzie rzutów pozostanie $2^n + 2^{n+1}$ osób, a osoba z numerem 1 znowu ma frisbee. Teraz, dla $2^n + 2^{n+1} + k$ osób wnioskujemy, że po $k$ rzutach jesteśmy w podobnej sytuacji, a pozycja przedostatniej osoby wynosi $2k+1$. Ponieważ $2024 = 1024+512+488$, to otrzymujemy, że przedostatnia pozycja to 977, a wynik końcowy wynosi $2001 + 977 = 2978$.

**Zadanie 60.** Ela rzuca frisbee z trojgiem swoich przyjaciół zgodnie z zasadą, że nie można rzucić dysku osobie, od której się go otrzymało. Ela zaczęła i po dziesięciu rzutach frisbee znów było u niej. Na ile sposobów mogło odbyć się tych 10 rzutów?

*Wynik.* 414

*Rozwiązanie.* Obliczmy ilość wszystkich ciągów przerzuceń, niezależnie od tego czy kończą się one Elą czy też nie. Na początku Ela może przerzucić frisbee do każdej z trzech osób. Dalej każdy może przerzucić frisbee do dwóch osób zgodnie z podaną zasadą. Jeśli mamy $n$ rzutów to otrzymujemy $3 \cdot 2^{n-1}$ możliwych ciągów.

Oznaczmy liczbę ciągów, które kończą się Elą po $n$-tym podaniu przez $y_n$. Po $n$ podaniach jest łącznie $3 \cdot 2^{n-1}$ ciągów. W kolejnym ruchu część z nich może zostać przedłużona podaniem do Eli. Te, które nie mogą zostać przedłużone takim rzutem to dokładnie te, w których Ela miała frisbee w $n$-tym lub $(n-1)$-szym ruchu, ponieważ musi podać je komuś innemu. Jest odpowiednio $y_n$ i $2y_{n-1}$ takich ciągów, więc $y_{n+1} = 3 \cdot 2^{n-1} - y_n - 2y_{n-1}$.

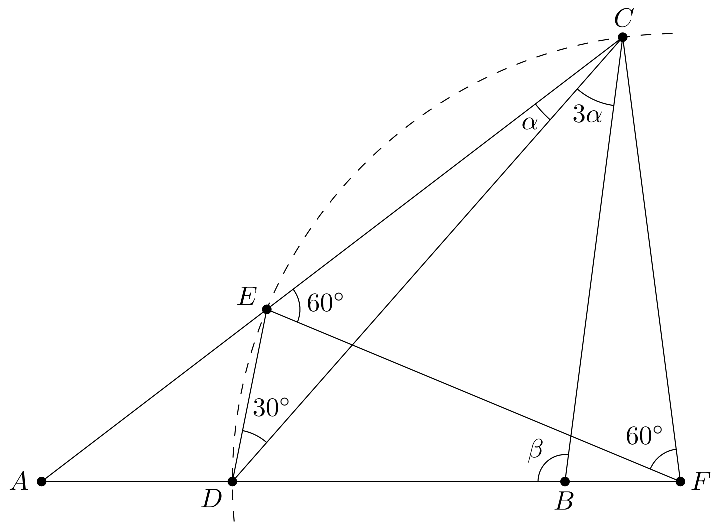
Prościej jest obliczyć każdy z wyrazów aż do $y_{10}$ niże szukać wzoru jawnego. Z $y_1 = 0$ i $y_2 = 0$ oraz wzoru rekurencyjnego $y_{n+1} = 3 \cdot 2^{n-1} - y_n - 2y_{n-1}$ możemy obliczyć, że $y_3 = 3 \cdot 2^1 - 0 - 0 = 6$, $y_4 = 3 \cdot 2^2 - 6 = 6$, $y_5 = 3 \cdot 2^3 - 6 - 12 = 6$, $y_6 = 3 \cdot 2^4 - 6 - 12 = 30$, $y_7 = 3 \cdot 2^5 - 30 - 12 = 54$, $y_8 = 3 \cdot 2^6 - 54 - 60 = 78$, $y_9 = 3 \cdot 2^7 - 78 - 108 = 198$, $y_{10} = 3 \cdot 2^8 - 198 - 156 = 414$.

*Alternatywne rozwiązanie.* Rozważmy ciąg $n$ podań, który zaczyna się i kończy na Eli i nie ma jej nigdzie indziej w tym ciągu. Jeśli taki ciąg zdarzy się na początku zabawy, to Ela może podać do 3 przyjaciół, a następnie możemy kontynuować na 2 sposoby, po których całość jest już jednoznacznie ustalona. Jeśli taki ciąg zdarzy się w środku gry to jeden ze znajomych podaje frisbee Eli, zatem może ona wybrać tylko jednego z pozostałej dwójki przyjaciół, po czym zostają jedynie dwie możliwości. Taki ciąg $n$ podań nie może być krótszy niż 3, więc wystarczy znaleźć wszystkie partycje liczby 10 bez części mniejszych niż 3. Istnieją tylko takie partycje 10 spełniające ten warunek: $10$, $3 + 7$, $7 + 3$, $6 + 4$, $4 + 6$, $5 + 5$, $3 + 3 + 4$, $3 + 4 + 3$ oraz $4 + 3 + 3$. Partycja złożona z liczby 10 może zostać rozegrana na 6 różnych sposobów. Każda z partycji, która ma dwie części, może zostać zostać rozegrana na $6 \cdot 4$ sposoby; daje to $5 \cdot 6 \cdot 4$ sposoby. Ostatecznie mamy $6 \cdot 4 \cdot 4$ sposoby, na które może zostać rozegrana partycja mająca trzy części, czyli $3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4$ sposoby. Łącznie daje to $6 \cdot (1 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 4) = 6 \cdot 69 = 414$ sposobów.

**Zadanie 61.** Punkt $D$ znajduje się na boku $AB$ trójkąta $ABC$ w taki sposób, że $\angle ACD = 11{,}3^\circ$ i $\angle DCB = 33{,}9^\circ$. Ponadto $\angle ABC = 97{,}4^\circ$. Wyznacz miarę kąta $\angle DEA$ w stopniach, gdzie $E$ jest takim punktem na boku $AC$, że $EC = BC$.

*Wynik.* 41,3

*Rozwiązanie.* Dla uproszczenia zapisu oznaczmy kąty $\alpha = 11{,}3^\circ$ oraz $\beta = 97{,}4^\circ$. Wtedy $\angle DCB = \alpha$. Niech $F$ będzie takim punktem na prostej $AB$ różnym od $B$, że $CB = CF$.




Obliczmy $\angle BCF$. Skoro $\angle FBC = 180° - \beta$ oraz $\triangle BCF$ jest równoramienny, to $\angle BCF = 180° - 2\angle FBC = 2\beta - 180°$. Teraz zauważmy, że

$$\angle ECF = \alpha + 3\alpha + 2\beta - 180° = 4 \cdot 11{,}3° + 2 \cdot 97{,}4° - 180° = 60°.$$

Skoro $CF = CB$, co jest równe $CE$ na mocy założeń, to $\triangle CEF$ jest równoboczny. Pokażemy, że $FC = FD$. Skoro $\angle DCF = 60° - \alpha$ i $\angle CFD = 180° - \beta$, to dostajemy

$$\angle FDC = 180° - (60° - \alpha) - (180° - \beta) = \alpha + \beta - 60° = 48{,}7° = 60° - \alpha = \angle DCF,$$

zatem $\triangle CDF$ jest równoramienny, a jego ramiona stykają się w $F$, więc $FC = FD$ jak chcieliśmy. W połączeniu z faktem, że $\triangle CEF$ jest równoboczny dostajemy $FC = FE = FD$. Innymi słowy punkty $C, E, D$ leżą na okręgu o środku $F$. Stąd $\angle CDE = \frac{1}{2}\angle CFE = 30°$ oraz $\angle DEC = 180° - \alpha - 30°$. Ostatecznie,

$$\angle AED = 180° - \angle DEC = 30° + \alpha = 41{,}3°.$$

**Zadanie 62.** Liczby rzeczywiste $a > b > 1$ spełniają nierówność

$$(ab+1)^2 + (a+b)^2 \leqslant 2(a+b)(a^2 - ab + b^2 + 1).$$

Wyznacz najmniejszą możliwą wartość liczby

$$\frac{\sqrt{a-b}}{b-1}.$$

*Wynik.* $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

*Rozwiązanie.* Przekształćmy nierówność w następujący sposób:

$$\begin{aligned}(ab+1)^2 + (a+b)^2 &\leqslant 2(a+b)(a^2 - ab + b^2 + 1),\\ 0 &\leqslant 2a^3 + 2b^3 - a^2b^2 - a^2 - b^2 - 4ab + 2a + 2b - 1,\\ 0 &\leqslant (a^2 - 2b + 1)(2a - b^2 - 1).\end{aligned}$$

Skoro $a > b > 1$, to $a^2 > b^2$ i mamy $a^2 - 2b + 1 > b^2 - 2b + 1 = (b-1)^2 > 0$. Zatem dla drugiego nawiasu otrzymujemy

$$\begin{aligned}2a - b^2 - 1 &\geqslant 0,\\ 2a - 2b &\geqslant b^2 - 2b + 1,\\ 2(a-b) &\geqslant (b-1)^2,\\ \frac{\sqrt{a-b}}{b-1} &\geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Wartość $1/\sqrt{2}$ jest osiągana przykładowo, gdy $a = 5/2$ i $b = 2$ (żeby otrzymać równość, musi zachodzić $a = (b^2+1)/2$), zatem istotnie jest to szukana minimalna wartość.

**Zadanie 63.** Niech $x, y, z$ będą różnymi niezerowymi liczbami całkowitymi spełniającymi równość

$$\frac{(x-1)^2}{z} + \frac{(y-1)^2}{x} + \frac{(z-1)^2}{y} = \frac{(x-1)^2}{y} + \frac{(y-1)^2}{z} + \frac{(z-1)^2}{x}.$$

Wyznacz najmniejszą możliwą wartość wyrażenia

$$|64x + 19y + 4z|.$$

*Wynik.* 7

*Rozwiązanie.* Niech symbol $\sum_{cyc} Q(x, y, z)$ oznacza sumę, której pozostałe dwa wyrazy otrzymujemy dwukrotnie dokonując cyklicznej zamiany zmiennych $x \to y \to z \to x$; innymi słowy,

$$\sum_{cyc} Q(x, y, z) = Q(x, y, z) + Q(y, z, x) + Q(z, x, y).$$

Mnożąc równanie przez $xyz \neq 0$ i przekształcając dostajemy

$$P(x, y, z) = x(x-1)^2(y-z) + y(y-1)^2(z-x) + z(z-1)^2(x-y) = \sum_{cyc} x(x-1)^2(y-z) = 0.$$

Skoro $P(x, y, z)$ zeruje się gdy $x = y$, $y = z$ lub $z = x$, to musi być podzielny przez $(x-y)(y-z)(z-x) = \sum_{cyc} x^2(z-y)$. Ponieważ $P(x, y, z)$ jest wielomianem stopnia 4 i $\sum_{cyc} x^2(z-y)$ jest wielomianem stopnia 3, więc wynik z dzielenia musi być wielomianem pierwszego stopnia

$$P(x, y, z) = \left(\sum_{cyc} x^2(z-y)\right) \cdot (ax + by + cz + d)\,.$$

Ponadto $xy - xz + yz - yx + zx - zy = \sum_{cyc} x(y-z) = 0$, więc

$$\begin{aligned} P(x, y, z) &= \sum_{cyc} \left(x^3(y-z) - 2x^2(y-z) + x(y-z)\right) \\ &= \sum_{cyc} \left(x^3(y-z) - 2x^2(y-z)\right) + 0 \\ &= \left(\sum_{cyc} x^2(z-y)\right) \cdot (ax + by + cz + d)\,. \end{aligned}$$

Skąd widzimy, że $a$ musi wynosić $-1$, aby $x^2(z-y) \cdot ax = x^3(y-z)$ i podobnie $b = c = -1$. Następnie, z równości $x^2(z-y) \cdot d = -2x^2(y-z)$ dostajemy, że $d = 2$. Zatem

$$P(x, y, z) = (x-y)(y-z)(z-x)(2 - x - y - z) = 0.$$

Szukamy tylko parami różnych trójek $(x, y, z)$, więc musi zachodzić $x + y + z = 2$. Łatwo zauważyć, że jakakolwiek trójka spełniająca te warunki jest również rozwiązaniem wyjściowego równania.

Aby znaleźć najmniejszą wartość wyrażenia $|64x + 19y + 4z|$ odejmijmy $4(x + y + z) - 8 = 0$. Otrzymujemy

$$|64x + 19y + 4z| = |15 \cdot (4x + y) + 8|.$$

Szukamy liczby całkowitej $4x + y$, która minimalizuje wartość tego wyrażenia. Minimum jest w oczywisty sposób osiągalne dla $4x + y = -1$, na przykład $(x, y, z) = (-2, 7, -3)$. Zatem wynikiem jest 7.