Úloha 1. Hra funguje tak, že v každom kole získa jeden z hráčov „víťazný bod“. Hra končí v momente, keď niektorý z hráčov získa 10 víťazných bodov. Koľko najviac kôl môže mať Hra, keď ju hrá 5 hráčov?

Výsledok. 46

Riešenie. Na konci Hry má jeden hráč 10 bodov, kým ostatní majú každý najviac 9 bodov. Dokopy teda mohlo byť najviac $10 + 4 \cdot 9 = 46$ kôl.

Úloha 2. Mišo má štyri karty s ciframi 1, 2, 3 a 6. Chce z nich poskladať dve čísla A a B tak, že použije každú kartu práve raz a aby číslo A bolo násobkom čísla B, napr. $A = 36$ a $B = 12$. Koľkými spôsobmi to vie urobiť?

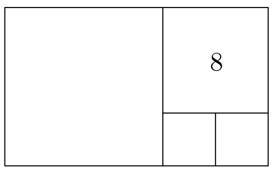
Výsledok. 21

Riešenie. Rozlíšime dva prípady:

1. Číslo B je jednociferné a A trojciferné. Možné hodnoty B sú:
   - 1: číslo A môže byť ľubovoľná permutácia 2, 3, 6 $\to$ 6 možností.
   - 2: A musí končiť na 6 $\to$ 2 možnosti.
   - 3: A má ciferný súčet deliteľný 3 bez ohľadu na usporiadanie cifier $\to$ 6 možností.
   - 6: A má ciferný súčet deliteľný 3 bez ohľadu na usporiadanie cifier, musí však navyše končiť na 2 $\to$ 2 možnosti.
2. Čísla A aj B sú dvojciferné. Potom vieme povedať, že $A : B$ je menej ako 6. Vyskúšame jednotlivé možnosti:
   - 1: Nedá sa, lebo $A \neq B$.
   - 2: A končí na 2 alebo 6. V prvom prípade B končí na 1 alebo 6, v druhom nutne na 3. Zajvne $A > B$, takže cifra na mieste desiatok musí byť väčšia v čísle A. Ľahko overíme, že aj $A = 62$, $B = 31$, aj $A = 32$, $B = 16$, aj $A = 26$, $B = 13$ vyhovujú $\to$ 3 možnosti.
   - 3: Aby bolo A dosť veľké, začína cifrou 3 alebo 6. Zároveň musí byť A násobok 3, takže obsahuje aj 3, aj 6. Vyhovuje aj $A = 36$, $B = 12$, aj $A = 63$, $B = 21$ $\to$ 2 možnosti.
   - 4: Aby bolo A dosť veľké, musí začínať cifrou 6. Aby bolo A párne, musí končiť 2. Nedá sa, keďže 62 nie je násobok 4.
   - 5: Aby bolo A násobok 5, musí končiť na 0 alebo 5, čo sa nedá.

Dokopy dostávame 21 možností.

Úloha 3. Na obrázku sa nachádzajú štyri štvorce, pričom na jednom z nich je vyznačený jeho obsah 8. Aký je obsah najväčšieho štvorca?



Výsledok. 18

Riešenie. Pomer dĺžok strán štvorcov na obrázku je $3 : 2 : 1$, preto obsah najväčšieho z nich je $\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 8 = 18$.

Úloha 4. V parku sa jedného dňa stretli kentauri, matematici a straky. Spočítali sme, že v tomto parku sa nachádza dokopy 15 chvostov a 94 rúk. Koľko bolo v tomto parku nôh?

Poznámka: Straka nemá žiadne ruky, má však dve nohy a jeden chvost, matematik má dve ruky a dve nohy, ale žiaden chvost a kentaur má dve ruky, štyri nohy a jeden chvost.

Výsledok. 124

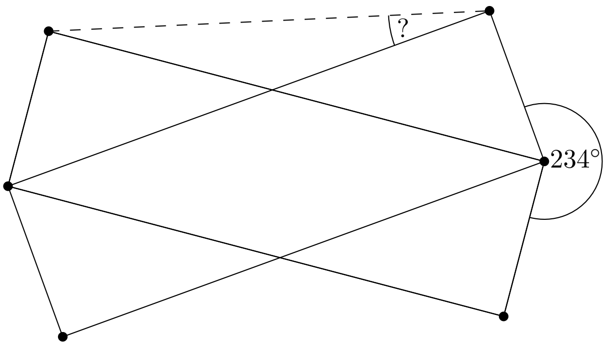
Riešenie. Označme počet kentaurov, matematikov a strák ako k, m a s v tomto poradí. Na základe informácie o počte chvostov možno usúdiť, že $s + k = 15$, a podľa počtu rúk zas $2m + 2k = 94$. Počet nôh môžeme vyjadriť ako $4k + 2m + 2s$, čo je $2(s + k) + (2m + 2k) = 30 + 94 = 124$.

Úloha 5. V televízii sú tri kanály označené ako 1, 2 a 3. Z každého kanála sa dá prepnúť len na kanál s číselným rozdielom práve 1, teda napríklad z kanála 1 sa dá prepnúť len na kanál 2. Ak Viki začína na druhom kanáli a prepne kanál jedenásťkrát, koľko rôznych postupností kanálov vie dostať?

Výsledok. 64

Riešenie. V postupnosti sa bude nachádzať 12 kanálov, pričom na nepárnych pozíciách to vždy bude druhý kanál. Zvýši tak 6 pozícií, na každej z ktorých sa môže vyskytnúť prvý alebo tretí kanál, takže dostaneme $2^6 = 64$ postupností.

Úloha 6. Miško si nakreslil dva zhodné obdĺžniky a potom si v obrázku označil dva uhly. Jeden z nich aj odmeral a jeho veľkosť zapísal do obrázka. Akú hodnotu by nameral, keby odmeral druhý uhol?



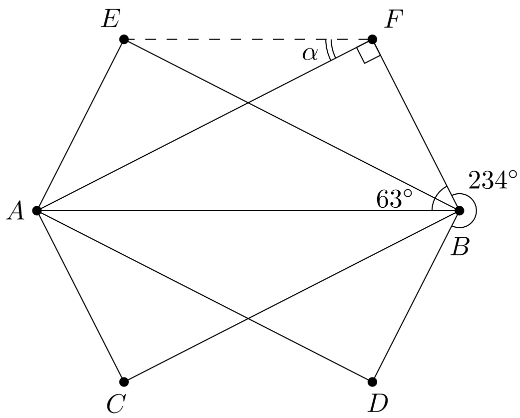
Výsledok. 27°

Riešenie. Označme si body ako na obrázku nižšie. Spoločná uhlopriečka AB rozpoľuje uhol $\sphericalangle FBD$, a preto máme

$$|\sphericalangle FBA| = \frac{360^\circ - 234^\circ}{2} = 63^\circ.$$

Naviac, keďže čiarkovaná úsečka EF je rovnobežná s AB, platí $|\sphericalangle EFB| + |\sphericalangle FBA| = 180^\circ$. Avšak vďaka tomu, že $\sphericalangle AFB$ je pravý, pre hľadaný uhol platí

$$\alpha = 180^\circ - 90^\circ - 63^\circ = 27^\circ.$$



Úloha 7. Aká je hodnota výrazu $x^3 - 14x + 2024$, ak $x^2 - 4x + 2 = 0$?

Výsledok. 2016

Riešenie. Keď od $x^3 - 14x + 2024$ odčítame $x \cdot (x^2 - 4x + 2) = 0$, dostaneme $4x^2 - 16x + 2024$. Keď od tohto výsledku odčítame ešte $4 \cdot (x^2 - 4x + 2) = 0$, dostaneme 2016, čo je hľadané riešenie.

Úloha 8. Lukáš si zvolil celé číslo n a napísal počet jeho párnych cifier, nepárnych cifier, a celkový počet cifier. Keď tieto čísla prečítal ako jedno, ignorujúc prípadné nuly na začiatku, získal opäť číslo n. Aké najmenšie číslo si Lukáš mohol zvoliť?

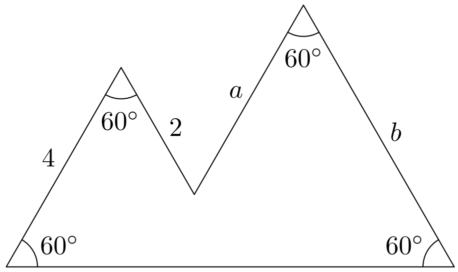
Príklad: Ak Lukáš zoberie číslo 2024, tak počet párnych cifier je 4, počet nepárnych je 0 a počet všetkých je 4. Takže prečíta 404.

Výsledok. 123

Riešenie. Lukášovo číslo n nemôže byť jednociferné, lebo jeho cifra by bola párna alebo nepárna, takže by zapísal aspoň dvojciferné číslo. Podobne nemohlo byť jeho číslo dvojciferné, lebo by končilo na cifru 2, ktorá je párna. Číslo n teda malo aspoň tri cifry.

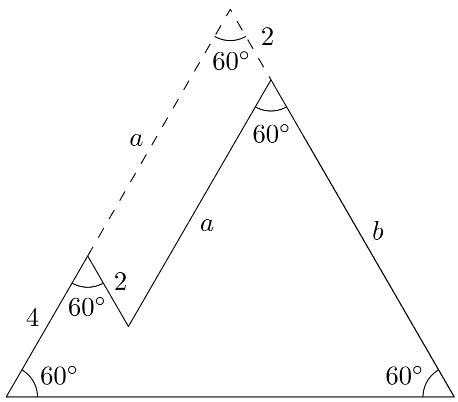
Aké trojciferné číslo si Lukáš mohol zvoliť? Keďže malo tri cifry, muselo končiť na 3 a súčet prvej a druhej cifry musel byť tiež 3. Dostávame tri možnosti: 123, 213, 303. Všetky tri sa prepíšu na 123, vrátane čísla 123. To je teda najmenšie možné Lukášovo číslo.

Úloha 9. Pohorie Dva kopce vyzerá zboku ako päťuholník, ktorý vidíte na obrázku. Poznáte vyznačené dĺžky strán a veľkosti uhlov. Určte $a + b$.



Výsledok. 16

Riešenie. K päťuholníku pridáme rovnobežník ako na obrázku, čím z neho spravíme rovnostranný trojuholník.



Potom zjavne $11 = 4 + a = 2 + b$, takže $a = 7$ a $b = 9$. Odtiaľ $a + b = 16$.

Úloha 10. V pesničke *Kopala studienku* dievčina kopala studienku a pýtala sa, či je taká hlboká, aká je široká.

Studienka je valec, ktorého výšku nazývame hĺbka, a ktorého priemer podstavy nazývame šírka. Dievčina vie, že za týždeň dokáže vykopať studienku, ktorá má správnu šírku, ale len tretinovú hĺbku. Našťastie je poruke Janko Matúška, ktorý za týždeň dokáže vykopať studienku správnej hĺbky, ale len polovičnej šírky. Vieme, že čas kopania je priamo úmerný objemu vykopanej hliny. Koľko dní budú musieť kopať spolu, aby mala ich studňa správnu hĺbku aj šírku?

Výsledok. 12

Riešenie. Čas je úmerný objemu vykopanej hliny. Pre studňu s hĺbkou h a šírkou s je jej objem $V = \frac{\pi}{4} \cdot s^2 \cdot h$. Dievčina teda vykope za týždeň $\frac{\pi}{4} \cdot s^2 \cdot \frac{h}{3} = \frac{1}{3}V$, čo dáva $\frac{1}{21}V$ za deň. Janko Matúška za týždeň vykope $\frac{\pi}{4} \cdot (\frac{s}{2})^2 \cdot h = \frac{1}{4}V$, čo je $\frac{1}{28}V$ za deň. Dokopy za deň vykopú

$$\left(\frac{1}{21} + \frac{1}{28}\right) V = \frac{4+3}{3 \cdot 4 \cdot 7} V = \frac{1}{12} V.$$

Výkop celej studne im teda bude trvať 12 dní.

Úloha 11. Marek má tabuľku 10×10 štvorčekov so stranou 1. Rozhodol sa, že do nej vyznačí všetky úsečky dĺžky $\sqrt{5}$, ktoré spájajú vrcholy štvorčekov. Koľko úsečiek musí vyznačiť?

Výsledok. 360

Riešenie. Začnime pozorovaním, že každá úsečka spájajúca dva vrcholy štvorčekov je vlastne uhlopriečka obdĺžnika s celočíselnými dĺžkami strán. (Ešte sú aj vodorovné a zvislé úsečky, tie však majú celočíselnú dĺžku strán, a teda nás nezaujímajú.) Aby mala uhlopriečka dĺžku $\sqrt{5}$, musí byť aspoň jedna strana obdĺžnika rovná 1, inak bude mať dĺžku aspoň $\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} > \sqrt{5}$. Ľahko dopočítame, že druhá strana obdĺžnika musí byť 2.

Takže každý obdĺžnik 2×1, resp. 1×2 obsahuje práve dve úsečky, ktoré chce Marek vyznačiť. Pre zvislý obdĺžnik máme 10 stĺpcov, do ktorých ho môžeme umiestniť. V každom stĺpci máme 9 možných pozícií, dokopy teda 90 zvislých obdĺžnikov. Rovnako vieme dopočítať, že vodorovných obdĺžnikov bude tiež 90. Celkovo máme $90 + 90 = 180$ obdĺžnikov po 2 úsečky, čiže 360 úsečiek dĺžky $\sqrt{5}$.

Úloha 12. Navzájom rôzne nenulové cifry $\check{S}$, A, C, H spĺňajú

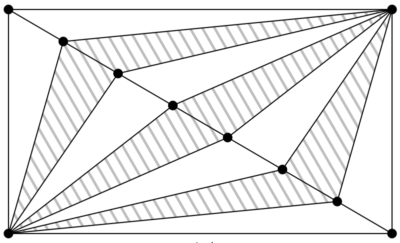
$$2024 + HAHA = \check{S}ACH.$$

Aká je najväčšia možná hodnota štvorciferného čísla $\check{S}ACH$?

Výsledok. 5963

Riešenie. Keďže $\check{S}ACH$ a $HAHA$ majú rovnakú cifru na mieste stoviek a 2024 má na mieste stoviek 0, pri sčítaní na mieste desiatok nedochádza k prechodu cez desiatku. Takže $24 + HA = CH$ a $H + 2 = \check{S}$. Zároveň však pri sčítaní $A + 4$ musí dôjsť k prechodu cez desiatku, inak $C = H + 2 = \check{S}$, čo nemôže nastať, lebo cifry sú rôzne. Takže $H = A + 4 - 10 = A - 6$ a potom $\check{S} = A - 4$ a $C = A - 3$. Odtiaľ dostávame, že $\check{S}ACH$ je 3741, 4852 alebo 5963. Najväčšie je číslo 5963.

Úloha 13. Zebrouholník je obdĺžnik na obrázku so stranami 14 a 8. Jeho uhlopriečka je rozdelená na 7 úsečiek rovnakej dĺžky. Určte obsah vyfarbenej časti.



Výsledok. 48

Riešenie. Zebrouholník je rozdelený na 14 trojuholníkov – 8 bielych a 6 vyfarbených. Všetky tieto trojuholníky majú rovnakú základňu aj rovnakú výšku. Preto majú aj rovnaký obsah. Obsah sivej časti tak je $\frac{6}{14} = \frac{3}{7}$ z obsahu obdĺžnika. Dostávame $\frac{3}{7} \cdot 8 \cdot 14 = 48$.

Úloha 14. Do matematického krúžku chodí niekoľko chlapcov a dievčat. Ak by sa k nim jedno dievča pridalo a 20% chlapcov odišlo, bude do krúžku chodiť rovnako veľa chlapcov ako dievčat. Avšak, ak by naopak jedno dievča z krúžku odišlo a neskôr sa počet dievčat v krúžku zvýšil o 30%, opäť bude chlapcov a dievčat rovnako. Koľko detí chodí do matematického krúžku dokopy?

Výsledok. 116

Riešenie. Označme počet dievčat d a počet chlapcov c. Zadanie nám dáva dve rovnice:

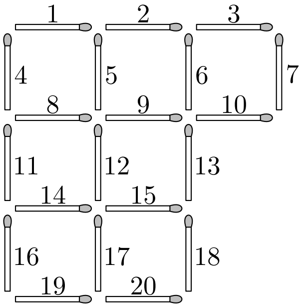
$$d + 1 = \frac{8}{10}c,$$
$$\frac{13}{10}(d - 1) = c.$$

Dosadením $c = \frac{13}{10}(d - 1)$ do prvej rovnice dostaneme

$$d + 1 = \frac{8}{10} \cdot \frac{13}{10}(d - 1) = \frac{26}{25}(d - 1).$$

Odtiaľ ľahko vyjadríme, že $1 + \frac{26}{25} = \left(\frac{26}{25} - 1\right) d$. Takže $d = 51$. Počet chlapcov potom dopočítame ako $\frac{13}{10} \cdot 50 = 65$. Dokopy máme $51 + 65 = 116$ detí.

Úloha 15. Ivka si zápalky usporiadala a označila rovnako ako na obrázku, aby tvorili 9 štvorcov. Odstránením troch zápaliek sa počet štvorcov zníži na 5 a každá zápalka ostane súčasťou strany aspoň jedného štvorca. Nájdite maximálny súčet čísel priradených zápalkám, ktoré takto môžeme odstrániť.



Výsledok. 50

Riešenie.

Na obrázku vidíme 7 štvorcov so stranou 1 a dva štvorce so stranou dĺžky 2. Aby sme znížili počet štvorcov na 5, treba odstrániť 4 štvorce. Aby sme odstránili štvorec ohraničený zápalkami s číslami 3, 6, 7 a 10, je potrebné odstrániť aspoň 3 zápalky. Tým by sme však ubrali len jeden štvorec. Teda tento štvorec musí ostať zachovaný. Aby ostal zachovaný, nesmieme tiež v žiadnom prípade odstrániť zápalku s číslom 6.

Odstránenie zápalky 11 alebo 13 vedie k odstráneniu oboch veľkých štvorcov a jedného malého. Dostaneme tak dva možné prípady:

- Ak zoberiem zápalku s číslom 11, potom môžeme zobrať súbežne dvojicu s číslami 12 a 13 alebo dvojicu s číslami 18 a 20.
- Ak zoberiem zápalku s číslom 13, potom môžeme zobrať súbežne dvojicu s číslami 1 a 4, dvojicu 11 a 12 alebo dvojicu s číslami 16 a 19.

Z týchto možností dostaneme najvyšší súčet výberom 11, 18 a 20 so súčtom 49.

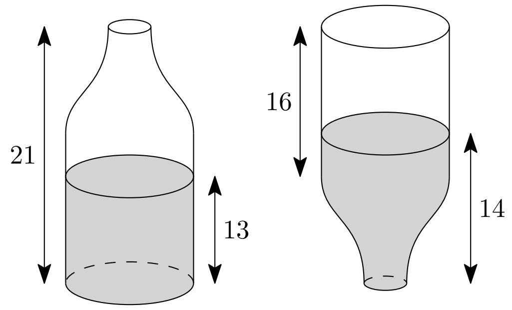
Zápalky 5, 12, 17, 3, 7 a 10 sú jediné, ktoré nie sú súčasťou veľkých štvorcov. Keďže 3, 7 a 10 nemôžeme zobrať, na výber nám ostávajú len 5, 12 a 17. Výber tejto trojice však nespĺňa požadované vlastnosti, teda bude nutné odstrániť aspoň jeden veľký štvorec.

Zápalku s číslom 6 nemôžeme zobrať a potrebujeme odstrániť aspoň jeden veľký štvorec, nuž musíme zobrať aspoň jednu z nasledujúcich dvojíc: 18 a 20, 16 a 19 alebo 1 a 4. Realizácia takéhoto výberu odstráni okrem veľkého štvorca práve jeden malý, a teda výberom poslednej zápalky musíme odstrániť ďalšie dva štvorce. Prejdime si teraz opäť naše možnosti:

- V prípade, že zoberieme 1 a 4, najviac vieme dostať súčet 49 $(1 + 4 + 20)$, čo je menej ako nájdených 49.
- V prípade, že zoberieme 16 a 19, najviac vieme dostať súčet 48 $(13 + 16 + 19)$, čo je menej ako nájdených 49.
- V prípade, že zoberieme 18 a 20, najviac vieme dostať súčet 50 $(12 + 18 + 20)$.

Najväčší súčet, ktorý vieme dostať, je 50.

Úloha 16. Lukáš má fľašu vysokú 21. Pozostáva z valca vysokého 16 a nepravidelného útvaru, ktorý tvorí hrdlo fľaše. Lukáš fľašu čiastočne naplnil vodou tak, že siahala do výšky 13. Keď fľašu zatvoril a obrátil naopak, voda siahala do výšky 14. Koľko percent objemu fľaše zaberá voda?

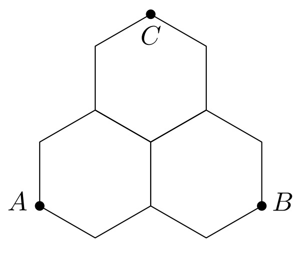


Výsledok. 65

Riešenie. Označme r polomer základne valca. Z prvého pozorovania vieme, že objem vody vo fľaši je $13\pi r^2$. Z druhého pozorovania vieme, že objem vzduchu vo fľaši je $(21 - 14)\pi r^2 = 7\pi r^2$. Celkový objem fľaše je teda $(13 + 7)\pi r^2 = 20\pi r^2$. Výsledné percentá dostaneme ako

$$\frac{13\pi r^2}{20\pi r^2} = \frac{13}{20} = 65\%.$$

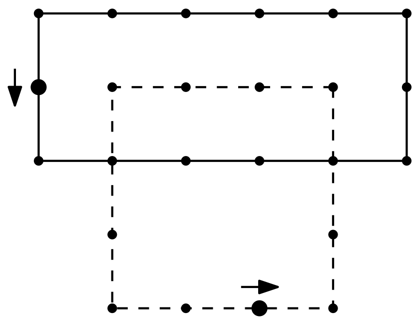
Úloha 17. Lukáš žije v Šesťuholníkove, v meste, ktorého ulice sú všetky dlhé 1 km a tvoria strany troch pravidelných šesťuholníkov. Lukáš chce najprv vyzdvihnúť svoju priateľku Teri a potom s ňou ísť do kina. Na obrázku Lukáš začína v bode A, Teri býva v bode B a kino sa nachádza v bode C. Lukáš nechce ísť tou istou ulicou dvakrát. Zistite súčet dĺžok všetkých rôznych ciest, ktorými mohol Lukáš ísť.



Výsledok. 28

Riešenie. Existujú štyri cesty z A do B, ktoré neprechádzajú cez C. Pre dve z nich neexistuje žiadna cesta do C, po ktorej by Lukáš neprešiel druhýkrát tou istou ulicou. Pre jednu cestu existuje práve jedna do bodu C. A pre poslednú existujú dve cesty do bodu C. Dohromady teda existujú tri rôzne cesty. Dve majú dĺžku 10 a jedna má dĺžku 8, súčet je 28.

Úloha 18. Danko a Viktor sa prechádzajú po dvoch okružných trasách, ako je vyznačené na obrázku. Medzi každými dvomi zastávkami na jednotlivých trasách im trvá prejsť práve 1 minútu, začínajú v miestach označených šípkami a postupujú v ich smere. Po koľkých minútach sa prvýkrát stretnú?



Výsledok. 44

Riešenie. Nech Dankovou trasou je tá, ktorú trvá prejsť 14 minút, a Viktorovou tá, ktorú trvá prejsť 12 minút. Existujú práve dva body, kde sa môžu stretnúť. Stretnúť sa môžu v ľavom bode, ak Danko prejde svoj okruh d-krát a Viktor v-krát. V tomto bode sa stretnú, ak

$$14d + 2 = 12v + 8.$$

Úpravou dostaneme, že $7d = 6v + 3$, na základe čoho $7 \mid 6v + 3$. Skúšaním $v \in \{0, 1, 2, \dots\}$ zistíme, že dvojica $(d, v) = (3, 3)$ je najmenším riešením. Podobne vieme takéto niečo zostaviť aj pre pravý bod stretnutia, kde

$$14d + 5 = 12v + 3,$$

a úpravami dostaneme, že $7d = 6v - 1$. Z toho potom $7 \mid 6v - 1$ a zjavne $v \geq 6$. Stretnú sa teda prvý raz po $14 \cdot 3 + 2 = 44$ minútach.

Úloha 19. Kladné celé čísla a, b a c spĺňajú rovnice

$$\sqrt{a^2 + b^2 - 172} = c,$$
$$\sqrt{c^2 + b^2 - 220} = a.$$

Aká je najväčšia možná hodnota výrazu $a + b + c$?

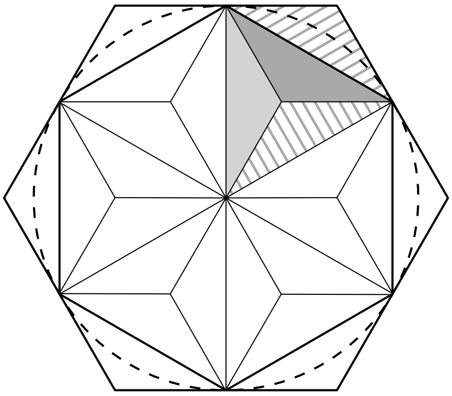
Výsledok. 26

Riešenie. Umocnením oboch rovníc a ich následným sčítaním dostaneme $2b^2 = 392$. Keďže b musí byť kladné, $b = 14$. Doplnením tejto informácie do prvej rovnice dostaneme $a^2 + 24 = c^2$. Teraz $c^2 - a^2 = (c - a)(c + a) = 24$ je párne, a teda aj $d = c - a$ musí byť párne. Ak $d = 6$, tak $(c - a)(c + a) \geqslant d(d + 2)$, čo bude prinajmenšom 48, čo je viac ako 24. Ako prípustné možnosti ostávajú $d = 2$ a $d = 4$. V prvom prípade $a + c = 12$, z čoho $a = 5$ a $c = 7$. V druhom prípade $a + c = 6$ a následne $a = 1$ a $c = 5$. Najväčší možný súčet $a + b + c$ je $5 + 14 + 7 = 26$.

Úloha 20. Timka si nakreslila kruh, ktorému vpísala a opísala pravidelné šesťuholníky. Aká časť obsahu opísaného šesťuholníka je tvorená vpísaným šesťuholníkom?

Výsledok. $\frac{3}{4}$

Riešenie. Rozdelením plochy na zhodné trojuholníky ako na obrázku ľahko zistíme, že riešenie bude $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$.



Iné riešenie. Nech r je polomerom kruhu. Šesťuholník sa dá rozdeliť na 6 rovnostranných trojuholníkov, pričom tie patriace vpísanému šesťuholníku majú výšku $\frac{1}{2}r\sqrt{3}$ a patriace opísanému r. Preto koeficient podobnosti bude $k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ a obsahy budú v pomere $k^2 = \frac{3}{4}$.

Úloha 21. Narodeniny n nazveme *štvorcové*, ak sú aspoň druhé a pre všetky prvočísla p, ktoré delia n, platí, že aj p^2 delí n. Napríklad $n = 8 = 2^3$ je štvorcové, ale $n = 56 = 8 \cdot 7$ nie je štvorcové. Korytnačka Kika oslávila 196. narodeniny. Koľko štvorcových narodenín si Korytnačka Kika zažila za svoj život?

Výsledok. 20

Riešenie. Všetky štvorcové narodeniny musia obsahovať len druhé a vyššie mocniny prvočísel. Množina všetkých druhých a vyšších mocnín prvočísel menších alebo rovných 196 je $S = \{4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 125, 128, 144, 169,$ Všimnime si, že súčin dvoch a viacerých čísel z množiny S väčších ako 27 buď patrí do S, alebo je väčší ako 196. Z čísel menších alebo rovných 27 len 8 a 27 nie sú štvorce. Zvyšné sú štvorce a ich súčinom sa zachováva, že sú štvorce, teda tieto súčiny buď už patria do S, alebo sú väčšie ako 196. Zo súčinov obsahujúcich 8 a 27 vieme vyprodukovať mimo S len $27 \cdot 4 = 108$ a $8 \cdot 9 = 72$. Celkovo nájdeme $18 + 2 = 20$ vyhovujúcich čísel.

Úloha 22. Súťaž *Elektrický náboj* má za sebou už 10 úspešných ročníkov. Platí, že v n. ročníku bolo na súťaži $n + 2$ úloh očíslovaných číslami 1 až $n + 2$. Do jedenásteho ročníka súťaže sa rozhodli organizátori vybrať po jednej úlohe z každého z predošlých ročníkov tak, aby úlohám zostali pôvodné čísla a zároveň v jedenástom ročníku mali úlohy čísla 1 až 10. Koľkými rôznymi spôsobmi to vedia spraviť, ak sa doteraz úlohy neopakovali?

Výsledok. 13122

Riešenie. Z prvého ročníka vedia organizátori vybrať ľubovoľnú z 3 úloh. Z druhého ročníka majú na výber $4 - 1 = 3$ úlohy, pretože jedno číslo už zabrala úloha z prvého ročníka. Môžeme si všimnúť, že z n. ročníka je vždy $n - 1$ čísel už zabraných úlohami z predošlých ročníkov, takže máme $(n + 2) - (n - 1) = 3$ možnosti. To platí až po ročník 9, nie vrátane. Vtedy je 8 čísel zabraných a navyše organizátori nevedia použiť úlohu 11. Majú teda len 2 možnosti. Podobne z desiateho ročníka majú na výber len jedinú úlohu, keďže 9 čísel už vybrali a 11 ani 12 použiť nemôžu. Spolu majú $3^8 \cdot 2 \cdot 1 = 13122$ možností.

Úloha 23. Kladné celé číslo vyhovuje podmienke, keď začína cifrou 1 a zároveň z neho presunutím tejto cifry na koniec čísla dostaneme trikrát väčšie číslo. Aké najmenšie číslo vyhovuje podmienke?

Napríklad číslo 174 nevyhovuje, lebo $741 \neq 3 \cdot 174$.

Výsledok. 142857

Riešenie. Keď poznáme poslednú cifru trojnásobku, vieme pôvodné číslo zrekonštruovať od konca. Konkrétne:

$$\begin{aligned}
\ldots x \cdot 3 = \ldots 1 &\to x = 7,\\
\ldots y7 \cdot 3 = \ldots 71 &\to y = 5,\\
\ldots z57 \cdot 3 = \ldots 571 &\to z = 8,\\
\ldots t857 \cdot 3 = \ldots 8571 &\to t = 2,\\
\ldots s2857 \cdot 3 = \ldots 28571 &\to s = 4,\\
\ldots r42857 \cdot 3 = \ldots 428571 &\to r = 1.
\end{aligned}$$

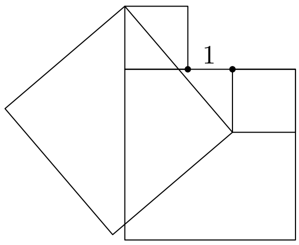
Skôr skončiť nemôžeme, lebo by číslo nezačínalo cifrou 1. Ľahko si overíme, že $428571 = 3 \cdot 142857$.

Iné riešenie. Každé n-ciferné číslo začínajúce jednotkou vieme napísať ako $10^{n-1} + a$, kde a je nejaké $(n-1)$-ciferné číslo. Presunutím cifry 1 na koniec dostaneme číslo $10a + 1$. Potrebujeme teda vyriešiť rovnicu

$$10a + 1 = 3 \cdot (10^{n-1} + a).$$

Vieme ju ekvivalentne upraviť na $3 \cdot 10^{n-1} - 1 = 7a$. Na ľavej strane máme číslo začínajúce cifrou 2, za ktorou sú samé cifry 9. Začneme deliť číslo 299… číslom 7 a pridávame deviatky, kým nám nevyjde zvyšok 0. Dostaneme tak číslo $a = 42857$. Pôvodné číslo potom bolo 142857.

Úloha 24. Džavo uložil dve dvojice zhodných štvorcov (s kladnými dĺžkami strán) tak, ako je znázornené na obrázku. Dva vyznačené body sú vo vzdialenosti 1. Aký je súčet obsahov všetkých štyroch štvorcov?

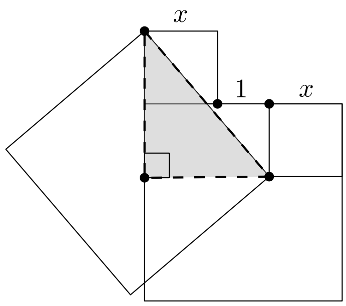


Výsledok. 58

Riešenie. Označme ako x stranu menšieho štvorca. Z Pytagorovej vety pre sivý pravouhlý trojuholník vieme, že

$$(2x)^2 + (1 + x)^2 = (1 + 2x)^2.$$

To vieme zjednodušiť na $x^2 = 2x$, čoho jediným kladným riešením je $x = 2$. Hľadanou odpoveďou je preto $2 \cdot (2^2 + 5^2) = 58$.



Úloha 25. Lezec David je spúšťaný z vrchu zvislej steny. To znamená, že je priviazaný na jednom konci lana, ktoré prechádza pevným bodom na vrchu steny a odtiaľ späť zvislo dole k Baške, ktorá lano drží a opatrne púšťa tak, aby David nespadol. Lano je pružné, takže jeho zaťažená časť (od Davida po Bašku) je napnutá tak, že sa natiahla o 20%. Navyše je uprostred lana značka, ktorá sa dostala na Davidovu úroveň, keď bol v tretine výšky steny nad zemou. Našťastie bolo lano dosť dlhé, a keď sa David ocitol na zemi (ale lano bolo stále ešte napnuté), tak mali rezervu 10 metrov nenatiahnutého lana. Určte výšku steny v metroch, ak zanedbáte výšku ľudí a dĺžku lana potrebného na uzly.

Výsledok. 18 metrov

Riešenie. Označme dĺžku (nenatiahnutého) lana ako l a výšku steny ako s. Keď sa David a značka nachádzali na jednej úrovni, tak polovica lana bola natiahnutá od Davida po vrch steny a späť – takže dvakrát dve tretiny steny. Odtiaľ

$$\frac{6}{5} \cdot \frac{l}{2} = 2 \cdot \frac{2}{3} s.$$

Keď David dosadol na zem, bolo od neho po vrch steny a naspäť natiahnuté celé lano bez 10 metrov, teda

$$\frac{6}{5} \cdot (l - 10) = 2 \cdot s.$$

Dosadením $l = \frac{40}{18} s$ z prvej rovnice do druhej dostaneme

$$\frac{8}{3} s - 12 = 2s,$$

z čoho ľahko dopočítame $s = 18$.

Úloha 26. V zásuvke je n ponožiek. Ak vytiahneme náhodne dve (bez opakovania), pravdepodobnosť, že obe sú čierne, je $2/15$. Aká je najmenšia možná hodnota n?

Výsledok. 10

Riešenie. Nech b je počet čiernych ponožiek. Potom pravdepodobnosť, že obe ponožky sú čierne, je $\frac{b}{n} \cdot \frac{b-1}{n-1}$. Keďže tento výraz má byť $\frac{2}{15}$, musí:

$$15 \cdot b \cdot (b-1) = 2 \cdot n \cdot (n-1).$$

Keďže 3 aj 5 delia ľavú stranu a obe sú nesúdeliteľné s 2, musia deliť $n \cdot (n-1)$ na pravej strane. Keď začneme s malými násobkami 3 a 5 pre n, zistíme, že $n = 6$ vedie k $15 \cdot b \cdot (b-1) = 2 \cdot 6 \cdot 5 = 60$. Avšak $b \cdot (b-1) = 4$ sa nedá splniť žiadny celým číslom, takže $n = 6$ nie je riešenie. Ak $n = 10$, tak $b \cdot (b-1) = 12$ sa dá dosiahnuť položením $b = 4$. Takže riešenie pre n je 10.

Úloha 27. Nájdite najväčšie prirodzené číslo, ktoré

- má presne sedem cifier,
- má všetky cifry rôzne,
- je násobkom 11.

Výsledok. 9876504

Riešenie. Použijeme podmienku deliteľnosti 11: číslo je deliteľné 11 práve vtedy, keď rozdiel medzi súčtom cifier na nepárnych pozíciách a súčtom cifier na párnych pozíciách je deliteľný 11.

Medzi všetkými číslami s daným počtom cifier, v tomto prípade so siedmimi, najväčšie sú tie, ktoré začínajú najväčšími ciframi. Začnime preto hľadať riešenie volením cifier od 9 smerom k nižším. Po napísaní 98765 vidíme, že súčet „nepárnej“ skupiny je $9 + 7 + 5 = 21$ a súčet „párnej“ skupiny je $8 + 6 = 14$. Rozdiel je 7 a musíme ho spraviť deliteľný 11 použitím dvoch cifier z množiny $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. To sa dá spraviť jediným spôsobom – pridaním 0 do „párnej“ skupiny a 4 do „nepárnej“ skupiny, čo vytvorí riešenie 9876504. Keďže každé iné riešenie by muselo začínať postupnosťou piatich cifier menšou než 98765, je toto naozaj najväčšie možné číslo.

Iné riešenie. Začnime najväčším číslom, ktoré pozostáva zo siedmich rôznych cifier, 9876543. Všimnime si použitím pravidla deliteľnosti 11 alebo písomným delením, že toto číslo nie je deliteľné 11, ale 9876537 je a je to najväčší násobok 11 menší než počiatočné číslo. Keďže jeho cifry nie sú rôzne, odčítame 11 a skontrolujeme, či sú cifry novozískaného čísla rôzne. Po niekoľkých krokoch

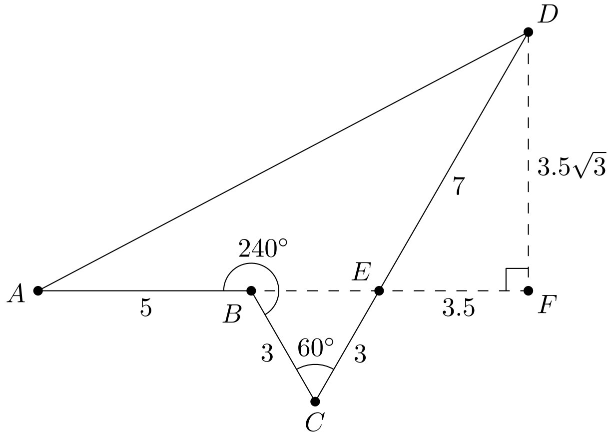
$$9876537 \longrightarrow 9876526 \longrightarrow 9876515 \longrightarrow 9876504$$

dostaneme hľadané číslo 9876504.

Úloha 28. Majme štvoruholník $ABCD$ s dĺžkami strán AB, BC a CD postupne 5, 3 a 10. Veľkosť vnútorného uhla pri B je $240°$ a vnútorného uhla pri C je $60°$. Vypočítajte dĺžku AD.

Výsledok. 13

Riešenie. Zostrojme rovnostranný trojuholník BCE s bodom E na úsečke CD. Potom v trojuholníku AED platí $|AE| = 8$, $|ED| = 7$ a $|\sphericalangle DEA| = 120°$. Preto z kosínusovej vety $|AD|^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \cos 120° = 169$, takže $|AD| = 13$.



Iné riešenie bez použitia kosínusovej vety. Ak trojuholník AED rozšírime o polovicu rovnostranného trojuholníka so stranou dĺžky 7, môžeme použitím Pytagorovej vety dostať $|AD|^2 = (5 + 3 + 3{,}5)^2 + \left(3{,}5 \cdot \sqrt{3}\right)^2 = 169$.

Úloha 29. Koľko usporiadaných štvoríc kladných celých čísel (a, b, c, d) spĺňa rovnicu

$$2024 = (2 + a) \cdot (0 + b) \cdot (2 + c) \cdot (4 + d)?$$

Výsledok. 18

Riešenie. Najprv určíme prvočíselný rozklad $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$. Keďže a, b, c, d sú kladné celé čísla, platí $2 + a \geq 3$, $2 + c \geq 3$ a $4 + d \geq 5$. Na pravej strane sa teda môže objaviť činiteľ 1 alebo 2 len v zátvorke $(0 + b)$ a činiteľ 4 ešte v zátvorkách $(2 + a)$ a $(2 + c)$. Keďže pravá strana rovnice je súčinom štyroch zátvoriek, potrebujeme 2024 napísať ako súčin štyroch čísel, z ktorých najviac jedno je menšie ako 4. To sa dá len štyrmi spôsobmi:

$$\begin{aligned}
2024 &= 1 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 23,\\
2024 &= 1 \cdot 4 \cdot 22 \cdot 23,\\
2024 &= 1 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 46,\\
2024 &= 2 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 23.
\end{aligned}$$

V prvej možnosti máme $b = 1$ a zvyšné čísla vieme rozdeliť medzi zátvorky ľubovoľne, čo dáva 6 možností. V druhej možnosti máme $b = 1$ a buď $a + 2 = 4$, alebo $c + 2 = 4$. V oboch prípadoch môžeme zvyšné činitele rozdeliť medzi zátvorky ľubovoľne, čo dáva dokopy ďalšie 4 možnosti. Rovnako vieme zrátať, že aj v treťom a štvrtom rozklade dostaneme po 4 možnosti. Dokopy máme teda $6 + 4 + 4 + 4 = 18$ možných štvoríc:

rozklad 2024 na súčin	riešenie			
	a	b	c	d
$2024 = 8 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 23$	6	1	9	19
$2024 = 8 \cdot 1 \cdot 23 \cdot 11$	6	1	21	7
$2024 = 11 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 23$	9	1	6	19
$2024 = 11 \cdot 1 \cdot 23 \cdot 8$	9	1	21	4
$2024 = 23 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 11$	21	1	6	7
$2024 = 23 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 8$	21	1	9	4
$2024 = 4 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$	2	2	9	19
$2024 = 4 \cdot 2 \cdot 23 \cdot 11$	2	2	21	7
$2024 = 11 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 23$	9	2	2	19
$2024 = 23 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 11$	21	2	2	7
$2024 = 4 \cdot 1 \cdot 22 \cdot 23$	2	1	20	19
$2024 = 4 \cdot 1 \cdot 23 \cdot 22$	2	1	21	18
$2024 = 4 \cdot 1 \cdot 46 \cdot 11$	2	1	44	7
$2024 = 4 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 46$	2	1	9	42
$2024 = 22 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 23$	20	1	2	19
$2024 = 23 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 22$	21	1	2	18
$2024 = 46 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 11$	44	1	2	7
$2024 = 11 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 46$	9	1	2	42

Úloha 30. Nech x a y sú kladné celé čísla také, že

$$2^x \cdot 3^y = \left(24^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{60}}\right) \cdot \left(24^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{60}}\right)^2 \cdot \left(24^{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{60}}\right)^3 \cdots \left(24^{\frac{1}{60}}\right)^{59}.$$

Určte $x + y$.

Výsledok. 3540

Riešenie. Nech $2^x \cdot 3^y = 24^k$. Potom máme

$$\begin{aligned}
k &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{60} + \frac{2}{60} + \cdots + \frac{59}{60}\right) =\\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \cdots + \frac{59}{2} =\\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 + 59) \cdot 59}{2} =\\
&= 15 \cdot 59.
\end{aligned}$$

Potom $2^x \cdot 3^y = (2^3 \cdot 3^1)^{15 \cdot 59}$, čo znamená, že $x = 3 \cdot 15 \cdot 59 = 45 \cdot 59$ a $y = 15 \cdot 59$. Z toho $x + y = 60 \cdot 59 = 3540$.

Úloha 31. Kika miluje jabĺčka, najmä postupnosti červených a zelených jabĺčok dĺžky 18 zoradených tak, že každých 12 po sebe idúcich jabĺčok obsahuje aspoň 7 zelených. Koľko takých postupností obsahujúcich najviac 8 zelených jabĺčok existuje?

Výsledok. 21

Riešenie. Sústreďme sa najprv iba na prvých a posledných 12 jabĺk. Ak všetkých šesť stredných jabĺk $(7-12)$ je zelených, prvej aj poslednej dvanástici chýba už iba po jednom zelenom jablku, čo sa dá ľahko opraviť umiestnením po jednom zelenom jablku do prvej aj poslednej šestice, takže osem zelených jabĺk stačí.

Ak niektoré zo stredných šiestich jabĺk je červené, potrebovali by sme dokopy viac ako 8 zelených jabĺk, pretože za každé zelené jablko odobraté zo strednej šestice potrebujeme pridať dve (jedno do prvej šestice a druhé do poslednej). Preto je 8 minimálny potrebný počet zelených jabĺk, pričom šesť z nich musí byť umiestnených do stredu, jedno v prvej šestici a jedno v poslednej.

Avšak prvé a posledné zelené jablko nemôžu byť umiestnené do svojich šestíc ľubovoľne. Aby platila podmienka pre každých 12 po sebe idúcich jabĺk, vzdialenosť medzi týmito dvomi zelenými nesmie prekročiť 12, napríklad ak prvé zelené jablko bude na pozícii 2, posledné môže byť buď na pozícii 13, alebo 14. V závislosti od pozície prvého zeleného jablka to posledné má 1 až 6 možných pozícií. Sčítaním týchto možností dostaneme dokopy $1+2+3+4+5+6=21$ možných postupností.

Úloha 32. Fero má 33 mincí s hodnotou 1 cent, 106 mincí s hodnotou 2 centy a 31 mincí s hodnotou 5 centov. Chce ich rozdeliť na dve kôpky s rovnakým počtom mincí a s rovnakou hodnotou a jednu kôpku dať svojej sestre. Koľkými spôsobmi to vie urobiť? Mince s rovnakou hodnotou považujeme za nerozlíšiteľné.

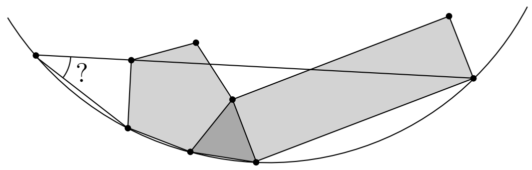
Výsledok. 12

Riešenie. Nech a je počet jednocentoviek, b počet dvojcentoviek a c počet päťcentoviek v sestrinej kôpke. Potom máme rovnosti

$$a+b+c=\frac{1}{2}(33+106+31)=85,$$
$$a+2b+5c=\frac{1}{2}(33+2\cdot 106+5\cdot 31)=200.$$

Odčítaním prvej rovnice od druhej dostaneme $b+4c=115$. Táto rovnica má viacero riešení tvaru $b=115-4c$ pre rôzne dané c. Avšak z podmienok $0<115-4c<106$ pre b vyplýva, že $c\in\{3,4,\ldots,28\}$. Navyše, nie všetky riešenia dávajú zmysluplné množstvo jednocentových mincí. Preto musíme pridať podmienku $0\leq 85-(115-4c+c)=-30+3c\leq 33$. Vidíme, že iba hodnoty c z množiny $\{10,11,\ldots 21\}$ vedú k správnemu riešeniu. Existuje teda 12 možných spôsobov.

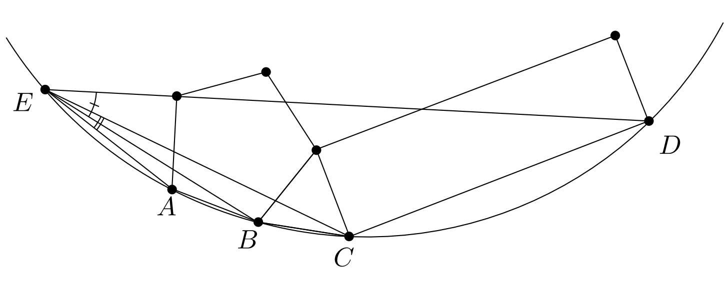
Úloha 33. Na obrázku sú rovnostranný trojuholník, pravidelný päťuholník a obdĺžnik tak, že niektoré ich vrcholy ležia na kružnici (iba časť je vyobrazená na obrázku). Nájdite veľkosť vyznačeného uhla v stupňoch.



Výsledok. 36°

Riešenie.

Pripomeňme si vetu o obvodovom uhle; veľkosť uhla, pod ktorým sa pozeráme z bodu Z kružnice k na jej tetivu XY, závisí iba od toho, na ktorom z oblúkov kružnice k ohraničených bodmi X, Y bod Z leží. Navyše, obvodový uhol prislúchajúci kratšiemu oblúku a obvodový uhol prislúchajúci dlhšiemu oblúku sa dokopy nasčítajú na 180°.



Označme si nejaké z bodov ako na obrázku vyššie. Keďže pravidelný päťuholník a rovnostranný trojuholník majú všetky vnútorné uhly veľkosti 108°, resp. 60°, vieme jednoducho dopočítať

$$|\sphericalangle AEC| = 180^\circ - |\sphericalangle CBA| = 180^\circ - 60^\circ - 108^\circ = 12^\circ.$$

Podobne

$$|\sphericalangle BED| = 180^\circ - |\sphericalangle DCB| = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ.$$

Nakoniec si uvedomme, že trojuholník ABC je rovnoramenný, a preto

$$|\sphericalangle BEC| = |\sphericalangle BAC| = \frac{180^\circ - 108^\circ - 60^\circ}{2} = 6^\circ.$$

Teraz už zo znalosti troch uhlov pri vrchole E vieme hľadaný uhol vyjadriť jednoducho ako

$$|\sphericalangle AED| = 12^\circ + 30^\circ - 6^\circ = 36^\circ.$$

Úloha 34. Koľkými spôsobmi vie Marek umiestniť 9 veží na šachovnicu 4×4 tak, aby každá veža bola ohrozená nejakou inou vežou? Dve veže sa navzájom ohrozujú, ak sú v rovnakom riadku alebo stĺpci.

Výsledok. 11296

Riešenie. Spočítajme počet možností, keď aspoň jedna veža nie je ohrozovaná žiadnou inou. Táto veža musí byť sama vo svojom riadku aj stĺpci zároveň, čo znamená, že je najviac jedna taká veža. Môžeme ju umiestniť na akékoľvek políčko $4 \cdot 4 = 16$ spôsobmi. Po odstránení jej riadku a stĺpca ostane deväť políčok, kam musíme umiestniť zvyšných osem veží. To vieme určením políčka, na ktoré vežu neumiestnime, čo nám dáva 9 možností. Dokopy máme teda $16 \cdot 9 = 144$ spôsobov, ako to spraviť. Celkový počet spôsobov, ako vybrať deväť políčok spomedzi 16, je rovný $\binom{16}{9} = 11440$, čiže hľadaný výsledok je $11440 - 144 = 11296$.

Úloha 35. Kladné celé číslo N nie je prvočíslo a všetky jeho delitele okrem samotného N sú menšie ako 100. Nájdite najväčšie možné N.

Výsledok. 9409

Riešenie. Keďže N nie je prvočíslo, buď je to 1, alebo existuje prvočíslo $p < N$, ktoré delí N. Podmienka $p < 100$ vedie na

$$p \leq 97.$$

Všimnime si, že $N = 97^2 = 9409$ spĺňa zadané podmienky.

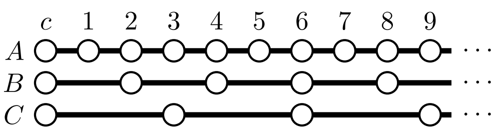
Predpokladajme, že existuje číslo $N' > 9409$, ktoré tiež spĺňa zadané podmienky. Ak $p \leq 97$ je prvočíslo, ktoré delí N', tak podiel $\frac{N'}{p}$ je číslo väčšie ako 97. To dáva $\frac{N'}{p} \in \{98, 99\}$, keďže každý deliteľ N' musí byť menší ako 100. Ale potom N' je deliteľné $k \in \{2, 3\}$ a z danej podmienky plynie

$$N' = k \cdot \frac{N'}{k} \leq 3 \cdot 99 < 97^2,$$

čo je spor.

Hľadané číslo je preto $N = 9409$.

Úloha 36. David sa rozhodol ísť na dovolenku do Rovnobežkova. Narazil tu na zaujímavú mestskú hromadnú dopravu, ktorá pozostáva z troch autobusových spojov, hlavnej stanice a zastávok očíslovaných 1, 2, 3, ... Všetky spoje začínajú na hlavnej stanici, ktorá je na obrázku označená písmenom c. Následne prechádzajú zastávkami v rastúcom poradí. Bežný spoj A zastavuje na každej z nich (čiže postupne 1, 2, 3, ...), zrýchlený spoj B na každej druhej (čiže postupne $2, 4, 6, \ldots$) a expresný spoj C zas na každej tretej (čiže postupne 3, 6, 9, ...). David, ktorý dorazil na hlavnú stanicu, sa potrebuje dostať na zastávku číslo 17, kde sa má stretnúť s Kubkom. Vždy, keď autobus, v ktorom sa David práve nachádza, zastaví na zastávke, môže v ňom buď zotrvať alebo z neho vystúpiť a prestúpiť na iný. Koľkými spôsobmi sa vie David dostať za Kubkom, ak jazdy, ktoré sa líšia iba v čase čakania na prestupný spoj, považujeme za rovnaké?



Výsledok. 845

Riešenie. Uvažujme ľubovoľnú zastávku z_0, na ktorej stoja všetky tri spoje a označme $z_1, z_2, \ldots, z_6$ nasledujúcich 6 zastávok na trase spoja A. Teraz spočítame, koľkými spôsobmi sa David vie dostať z z_0 na z_6.

1. Na zastávku z_1 sa vie David dostať iba jediným spôsobom – spojom A.
2. Na zastávku z_2 sa vie dostať dvoma spôsobmi – buď spojom A zo zastávky z_1 alebo spojom B zo zastávky z_2.
3. Na zastávku z_3 sa vie dostať troma spôsobmi. Jednak vie ísť spojom A zo zastávky z_2, na ktorú sa vedel dostať dvoma spôsobmi, a jednak vie použiť spoj C zo zastávky z_0, na ktorú sa vedel dostať jedným spôsobom.
4. Na zastávku z_4 sa vie dostať zo z_3 spojom A a zo z_2 spojom B, čo dokopy dáva $2 + 3 = 5$ možností.
5. Na zastávku z_5 sa dá dostať iba zo z_4 spojom A, čo nám dáva 5 možností.
6. Na zastávku z_6 sa vie dostať spojom A zo z_5, spojom B zo z_4 alebo spojom C zo z_3, čiže dokopy sa na ňu vieme dostať $3 + 5 + 5 = 13$ možnosťami.

Keďže hlavná stanica c spĺňa predpoklady na z_0 (stoja na nej všetky tri spoje), vieme sa z nej na zastávku číslo 6 trinástimi spôsobmi. Podobnú úvahu vieme urobiť aj pre zastávku 6, z ktorej sa vieme dostať 13 spôsobmi na zastávku 12. A aj zastávka 12 vie byť zastávkou z_0, čiže počet spôsobov, ktorými sa vieme dostať z 12 na 17, je rovnaký ako počet spôsobov, ktorými sa vieme dostať zo z_0 na z_5, čiže 5. Preto celkový počet spôsobov, ktorými vie David doraziť za Kubkom, je $5 \cdot 13^2 = 845$.

Úloha 37. Pre reálne číslo x symbol $\lfloor x \rfloor$ označuje najväčšie celé číslo neprevyšujúce x. Ďalej $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Majme takú postupnosť reálnych čísel, že $a_1 = \sqrt{3}$ a pre každé kladné celé n platí $a_{n+1} = \lfloor a_n \rfloor + \frac{1}{\{a_n\}}$. Akú hodnotu má a_{2024}?

Výsledok. $3034 + \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 3035 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

Riešenie. Všimnime si, že a_1 má desatinnú časť $\sqrt{3} - 1$. Preto sa dá zapísať ako $a_1 = 1 + \sqrt{3} - 1$. Spočítame prvých pár členov postupnosti.

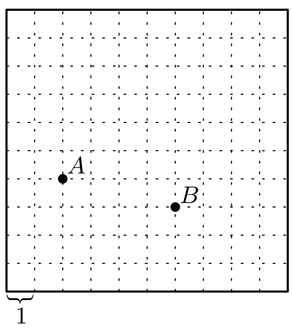
$$\begin{aligned}
a_2 &= 1 + \frac{1}{\sqrt{3}-1} = 1 + \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 2 + \frac{\sqrt{3}-1}{2},\\
a_3 &= 2 + \frac{2}{\sqrt{3}-1} = 2 + \frac{2\sqrt{3}+2}{2} = 2 + \sqrt{3} + 1 = 3 + 1 + \sqrt{3} - 1,\\
a_4 &= 4 + \frac{1}{\sqrt{3}-1} = 4 + \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 3 + 2 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}.
\end{aligned}$$

Členy a_1 a a_3 majú rovnakú desatinnú časť $\sqrt{3} - 1$ a líšia sa o $a_3 - a_1 = 3$. To isté platí pre a_2 a a_4, ktoré majú spoločnú desatinnú časť $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ a rozdiel $a_4 - a_2 = 3$. Odtiaľ môžeme odhadnúť, že $a_{2k+1} = 3k + 1 + \sqrt{3} - 1$ a $a_{2k+2} = 3k + 2 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ pre všetky nezáporné celé k. Tento odhad treba overiť. Avšak postačuje dosadiť naše vyjadrenia do definície $a_{n+1} = \lfloor a_n \rfloor + \frac{1}{a_n - \lfloor a_n \rfloor}$. A naozaj,

$$\begin{aligned}
a_{2k+2} &= \lfloor a_{2k+1} \rfloor + \frac{1}{a_{2k+1} - \lfloor a_{2k+1} \rfloor} = 3k + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}-1} = 3k + 1 + \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 3k + 2 + \frac{\sqrt{3}-1}{2},\\
a_{2\cdot(k+1)+1} &= \lfloor a_{2k+2} \rfloor + \frac{1}{a_{2k+2} - \lfloor a_{2k+2} \rfloor} = 3k + 2 + \frac{2}{\sqrt{3}-1} = 3k + 2 + \frac{2\cdot(\sqrt{3}+1)}{2} = 3\cdot(k+1) + 1 + \sqrt{3} - 1.
\end{aligned}$$

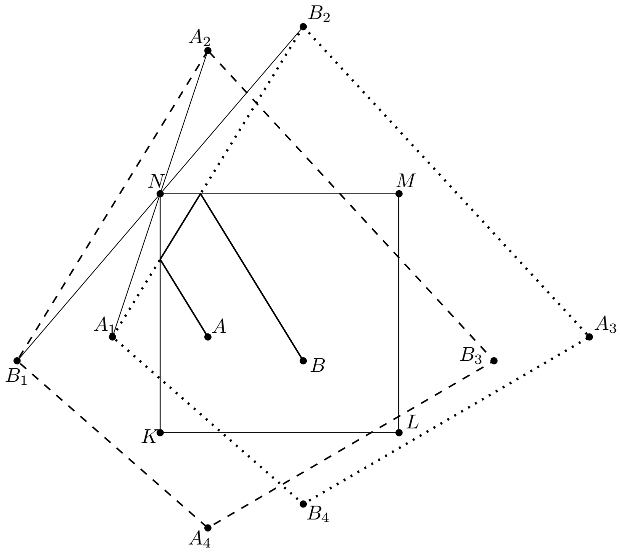
Nakoniec $a_{2024} = 3034 + \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 3035 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Úloha 38. Na biliardovom stole je vyznačená mriežka 10×10. Biliardová guľa má nulový polomer (teda je to bod), pohybuje sa po priamke, kým nenarazí na stenu, a potom sa odrazí pod rovnakým uhlom. Určte súčet druhých mocnín dĺžok všetkých možných trajektórií, po ktorých sa vie dostať guľa z bodu A do bodu B s dvoma odrazmi od stien.



Výsledok. 2520

Riešenie.

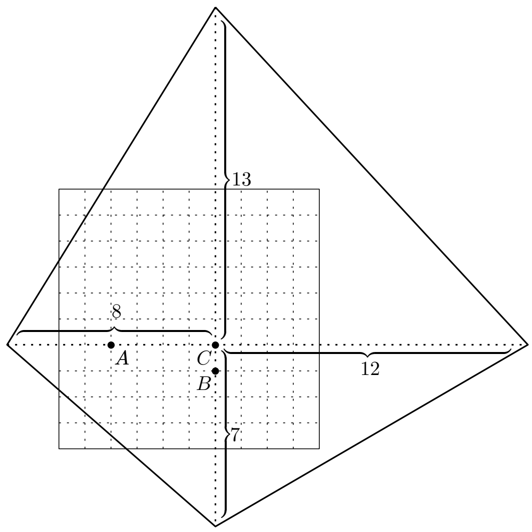


Zavedieme súradnicovú sústavu tak, že ľavý dolný roh je $[0, 0]$, $A = [2, 4]$ a $B = [6, 3]$. Body A a B preklopíme osovo súmerne postupne podľa strán štvorca. Ich obrazy a vrcholy štvorca označíme ako na obrázku.

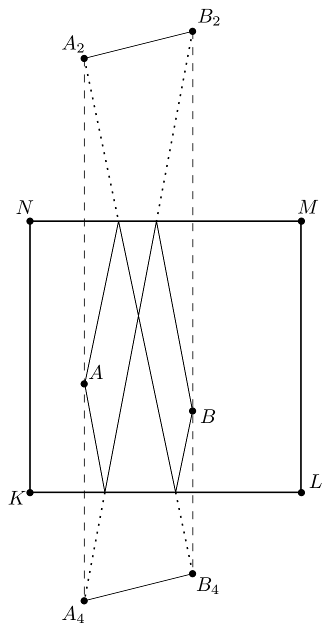
Teraz vezmime trajektóriu z bodu A do bodu B, pri ktorej sa guľa odrazí postupne od strán KN a MN. Preklopením A podľa KN a B podla MN sa trajektória zmení, vďaka pravidlu o uhle odrazu, na úsečku A_1B_2. Keby sa guľa odrazila najprv od MN a potom od KN, museli by sme dostať úsečku A_2B_1. Prostredný úsek trajektórie (medzi bodmi odrazu) však zostáva na mieste, a teda vnútri štvorca. Keďže sme však preklápali pozdĺž dvoch susedných strán, bod N je stredom úsečiek A_1A_2 a B_1B_2. Úsečka A_2B_1 musí ležať mimo a takáto trajektória nie je možná.

Analogicky vieme ukázať, že všetky trajektórie, pri ktorých sa guľa odráža od dvoch susedných stien, vieme „vystrieť" pomocou preklopenia A a B tak, že dostaneme buď stranu štvoruholníka $A_1B_2A_3B_4$, alebo rovnobežnú stranu štvoruholníka $B_1A_2B_3A_4$. Z dvojice strán rovnakej dĺžky tak bude použitá vždy práve jedna, druhá bude mimo štvorca $KLMN$. Stačí nám teda sčítať druhé mocniny dĺžok strán štvoruholníka $A_1B_2A_3B_4$. Využitím Pytagorovej vety a faktu, že uhlopriečky tohto štvoruholníka sú na seba kolmé, dopočítame tento súčet ako

$$2 \cdot (8^2 + 13^2 + 12^2 + 7^2) = 852.$$



Teraz zostávajú trajektórie, pri ktorých sa guľa odrazí od protiľahlých stien. Tie vieme tiež vystrieť, čím dostaneme uhlopriečky rovnobežníka, rovnako ako na obrázku.



Tentoraz sú obe úsečky vhodné, aj v prípade rovnobežníka $A_1A_3B_3B_1$ aj v prípade $A_2B_2B_4A_4$.

Využijeme fakt, že v rovnobežníku je súčet druhých mocnín dĺžok uhlopriečok rovný súčtu druhých mocnín dĺžok strán. Oba rovnobežníky majú strany dlhé 20 a $\sqrt{1^2+4^2}$. Súčet tak bude v oboch prípadoch

$$2\cdot(20^2+1^2+4^2)=834.$$

Už iba sčítame všetky možnosti dokopy, čím dostaneme $852+2\cdot 834=2520$.

Úloha 39. Označme $x \parallel y$ zlepenie dvoch kladných celých čísel také, že najprv sa vypíšu postupne cifry x a potom cifry y (napr. $3 \parallel 4 = 34$, $24 \parallel 5 = 245$ alebo $20 \parallel 24 = 2024$). Kladné celé číslo n nazývame *trojdeliteľné*, ak existujú po dvojiciach rôzne kladné celé čísla (bez núl na začiatku) a, b a c také, že $n = a \parallel b \parallel c$, a delí b a b delí c. Aké je najväčšie *trojdeliteľné* 5-ciferné číslo?

Výsledok. 94590

Riešenie.

Keďže a, b a c sú po dvojiciach rôzne a spĺňajú podmienky týkajúce sa deliteľnosti, musí platiť, že $2\cdot a \le b$ a $2\cdot b\le c$. Nech $s(k)$ je počet cifier čísla k. Potom z podmienky deliteľnosti platí, že $s(a)\le s(b)\le s(c)$. Dostávame sa tak ku dvom možným prípadom:

1. $s(a)=s(b)=1$ a $s(c)=3$: Vtedy musí a byť najviac 4, nakoľko $4<\frac{9}{2}$. Z toho dostaneme maximálne riešenie $a=4$, $b=8$, $c=992$.
2. $s(a)=1$, $s(b)=2$ a $s(c)=2$: V tomto prípade musí platiť, že $b<\frac{99}{2}$. Aby sme maximalizovali hodnotu n, uvažujme, že $a=9$. Potom b je najviac 45 a $c=90$. Úvaha o menšom a vedie už len k menšiemu výsledku.

Dostávame tak najväčšie vyhovujúce číslo, ktorým je 94590.

Úloha 40. Nech S_x značí číslo, ktorého zápis v pozičnej číselnej sústave so základom x je reťazec cifier S, pričom x je kladné celé číslo väčšie ako všetky cifry reťazca S. Napríklad $242_7 = 2\cdot 7^2+4\cdot 7+2 = 128_{10} = 10000000_2$. Nájdite súčet všetkých kladných celých čísel $x>5$, pre ktoré platí, že číslo 2024_x je deliteľné číslom 15_x.

Výsledok. 471

Riešenie. Hľadáme také x, aby zlomok $\frac{2x^3+2x+4}{x+5}$ bol celé číslo. Pretože

$$\frac{2x^3+2x+4}{x+5}=2x^2-10x+52-\frac{256}{x+5},$$

$x+5$ musí deliť $256=2^8$. Keďže $x>5$, hľadáme deliteľa väčšieho ako 10. Všetky vyhovujúce delitele sú 16, 32, 64, 128 a 256. Hľadané riešenie je potom

$$\sum_{i=4}^{8}(2^i-5)=2^9-2^4-25=512-16-25=471.$$

Úloha 41. Krtko má dve krabice so svietidlami. Ľavá z nich obsahuje 5 zbrusu nových lámp a 9 pokútnych žiaroviek. Tá pravá zas 9 zbrusu nových lámp a 5 pokútnych žiaroviek. Zbrusu nové lampy svietia vždy a spoľahlivo, kým pokútne žiarovky sa rozsvietia iba s pravdepodobnosťou $p \in (0; 1)$, ktorá je pre všetky z nich rovnaká. Určte hodnotu p, pre ktorú majú udalosti

1. náhodne zvolená žiarovka z ľavej krabice sa rozsvieti a
2. dve náhodne zvolené žiarovky z pravej krabice sa rozsvietia

rovnakú pravdepodobnosť.

Výsledok. 7/20

Riešenie. Pravdepodobnosť prvej udalosti je zrejme

$$P_1 = \frac{1}{14}(5 + 9p),$$

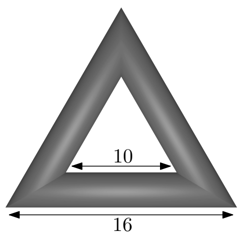
kým pre druhú udalosť dostaneme pravdepodobnosť

$$P_2 = \frac{1}{\binom{14}{2}} \left(\binom{9}{2} + 9 \cdot 5p + \binom{5}{2} p^2 \right).$$

Našim cieľom je vyriešiť rovnicu $P_1 = P_2$. Ide o kvadratickú rovnicu, riešiteľnú štandardnými metódami. Avšak môžeme si všimnúť, že $p = 1$ je riešením tejto rovnice (hoc nespĺňa podmienku $p < 1$), čo znamená, že druhé riešenie vieme nájsť použitím Vietových vzťahov. Pripomeňme, že konštantný člen kvadratickej rovnice $a(x - x_1)(x - x_2)$ s koreňmi x_1, x_2 a koeficientom a u kvadratického člena, je rovný ax_1x_2. Preto súčin riešení (a vzhľadom na to, že jedno riešenie je 1, tak aj hodnotu druhého z riešení) vieme určiť ako

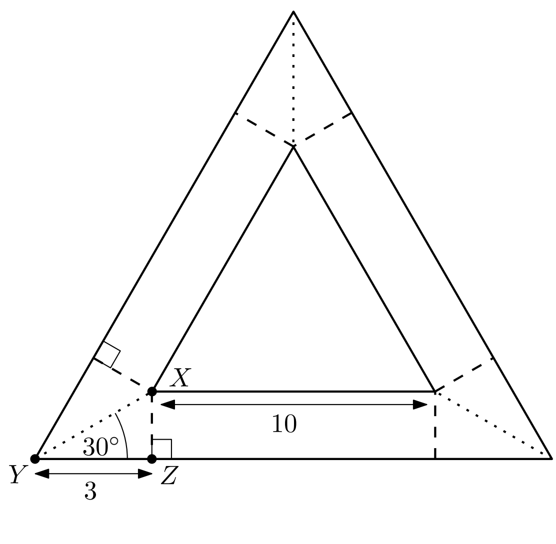
$$\frac{\frac{\binom{9}{2}}{\binom{14}{2}} - \frac{5}{14}}{\frac{\binom{5}{2}}{\binom{14}{2}}} = \frac{7}{20}.$$

Úloha 42. Mišo dostal na narodeniny ako správny vedúci dopravy výstražný trojuholník. Výstražný trojuholník je tvorený troma rovnako zrezanými valcovými rúrkami. Osi valcov sa pretínajú vo vrcholoch rovnostranného trojuholníka. Dĺžky strán vnútorného a vonkajšieho obrysu (čo sú tiež rovnostranné trojuholníky) sú uvedené na obrázku. Určte objem Mišovho darčeka.



Výsledok. $\frac{117\pi}{4}$

Riešenie. Pozrime sa na rovinu obsahujúcu vnútorný aj vonkajší obrys Mišovho trojuholníka a dokreslime úsečku XZ kolmú na YZ tak, ako na obrázku.



Keďže rovnostranný trojuholník je symetrický, dostávame $|YZ| = 3$ a $|\sphericalangle ZYX| = 30°$. Preto $|XZ| = \sqrt{3}$. Rozrezaním trojuholníka rovinami označenými v obrázku bodkovanými a čiarkovanými čiarami sa rozpadne na tri valce s polomerom $\frac{|XZ|}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a výškou 10 a šesť častí, ktoré vieme pospájať tak, že tvoria tri valce s rovnakým polomerom a výškou 3. Hľadaný objem je potom

$$V = \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot (3 \cdot 10 + 3 \cdot 3) = \frac{117\pi}{4}.$$

Úloha 43. Pedro si napísal za seba 10 navzájom rôznych kladných celých čísel tak, aby

1. súčet ľubovoľných dvoch po sebe idúcich čísel bol deliteľný 3 a
2. súčet ľubovoľných troch po sebe idúcich čísel bol deliteľný 2.

Aký je najmenší súčet takýchto desiatich čísel?

Výsledok. 78

Riešenie. Ukážeme, že optimálna konštrukcia je postupnosť $(2, 1, 5, 4, 11, 7, 8, 13, 17, 10)$ so súčtom 78. Ak je v postupnosti číslo deliteľné 3, tak aj jeho susedia musia byť deliteľní 3, a teda ich súčet je najmenej $3 \cdot (1 + 2 + \cdots + 10) = 3 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 165 > 78$, čo nie je optimálne.

Keďže súčet ľubovoľnej trojice za sebou idúcich čísel musí byť deliteľný 2, musia byť buď všetky párne, alebo dve z nich nepárne a jedno párne. Ak má trojica (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) v sebe všetky členy párne, tak všetky členy celej postupnosti musia byť tiež párne, lebo ak zoberieme trojicu (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}), tak tá musí byť mať párne členy a rovnako aj trojica $x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}$. Najmenší súčet, ktorý tak vieme dostať, je $2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 110 > 78$.

Ostáva nám teda ešte prípad, keď trojica obsahuje dva nepárne členy (N) a jeden párny člen (P). Rozoberme si jednotlivé konfigurácie:

1. NPNNPNNPNN: Sčítaním 7 najmenších nepárnych čísel a 3 najmenších párnych čísel, ktoré nie sú deliteľné 3, dostaneme $1 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 2 + 4 + 8 = 87 > 78$.
2. NNPNNPNNPN: Tento prípad je symetrický s predošlým.
3. PNNPNNPNNP: Sčítaním 6 najmenších nepárnych čísel a 4 najmenších párnych čísel, ktoré nie sú deliteľné 3, dostaneme $1 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 2 + 4 + 8 + 10 = 78$, čo je hľadaný výsledok.

Úloha 44. Robka si zlomila ruku, a tak sa teraz hrá so zlomkami. Chcela by nájsť také prirodzené čísla a, b spĺňajúce

$$\frac{2020}{2024} < \frac{a^2}{b} < \frac{999}{1000},$$

pre ktoré je súčet $a + b$ najmenší možný. Avšak má zlomenú ruku, takže nemôže písať. Pomôžte jej a určte tento najmenší možný súčet.

Výsledok. 553

Riešenie. Zadané nerovnosti vieme ekvivalentne prepísať na

$$\frac{1000}{999} < \frac{b}{a^2} < \frac{2024}{2020}.$$

Robka preto potrebuje vybrať najmenšie prirodzené a, pre ktoré existuje prirodzené b spĺňajúce

$$\frac{1000}{999} \cdot a^2 < b < \frac{2024}{2020} \cdot a^2 \quad \iff \quad a^2 + \frac{1}{999} \cdot a^2 < b < a^2 + \frac{4}{2020} \cdot a^2.$$

Pre $a < 32$ platí, že $a^2 < a^2 + \frac{a^2}{999} < a^2 + 1$. Ak má preň existovať prirodzené b spĺňajúce podmienky, musí byť aspoň $a^2 + 1$, a preto horné ohraničenie $a^2 + \frac{4}{2020} \cdot a^2$ musí byť ostro väčšie ako $a^2 + 1$, čiže $\frac{4a^2}{2020} > 1$. Keďže

$$\frac{4 \cdot 22^2}{2020} = \frac{44^2}{2020} = \frac{1936}{2020} < 1 \quad \text{a} \quad \frac{4 \cdot 23^2}{2020} = \frac{46^2}{2020} = \frac{2116}{2020} > 1,$$

najmenšia hodnota a spĺňajúca nerovnosť je 23. Preto $a = 23$ a $b = a^2 + 1 = 530$ sú hľadané hodnoty a ich súčet je $23 + 530 = 553$.

Úloha 45. Miro si kúpil stan s podlahou v tvare trojuholníka so stranami 1,3, 2 a 2,1 metra. V reklame bolo spomenuté, že osoba výšky v si môže ľahnúť cez *ľubovoľný* bod na podlahe. Teda každý bod na podlahe patrí nejakej úsečke dĺžky najmenej v vo vnútri stanu. Aký najvyšší môže byť Miro, aby sa na neho vzťahovala vlastnosť z reklamy?

Výsledok. $\frac{126}{65}$ metra

Riešenie. Tvrdíme, že najdlhšia úsečka, ktorá sa dá vložiť do ostrouhlého trojuholníka (čo trojuholník zo zadania je) skrz ľubovoľný bod je najdlhšia výška. Nakreslením všetkých úsečiek z vrchola k protiľahlej strane pokryjeme celý trojuholník. Najkratšia úsečka v takomto pokrytí je príslušná výška. Navyše ostrouhlý trojuholník obsahuje všetky svoje výšky.

Stačí ukázať, že žiadna dlhšia úsečka nevyhovuje. Pozrime sa na pätu najdlhšej výšky. Ak je príslušná strana kratšia ako výška, tak potom neexistuje dlhšia úsečka. To vychádza z toho, že všetky úsečky obsahujúce pätu výšky nie sú dlhšie ako maximum z dĺžky výšky a strany. Podľa vzorca pre výpočet plochy trojuholníka vieme, že najdlhšia výška prislúcha najkratšej strane. Teda v našom prípade hľadaná výška prislúcha strane s dĺžkou 1,3. Preto ak príslušná výška je dlhšia ako 1,3 tak sme hotoví.

Existuje mnoho spôsobov, ako spočítať dĺžku príslušnej výšky. Napríklad cez Herónov vzorec vypočítať obsah a potom vydeliť dĺžkou strany. Ukážeme jednoduchší postup. Pre jednoduchosť vynásobme dĺžky strán 10. Označme x a $13-x$ dĺžky úsečiek k prislúchajúcej päte výšky. Potom z Pytagorovej vety

$$\begin{aligned}20^2 - x^2 &= 21^2 - (13-x)^2,\\ 26x &= 128,\\ x &= \frac{64}{13}.\end{aligned}$$

A preto je výška

$$\begin{aligned}h &= \sqrt{20^2 - \left(\frac{64}{13}\right)^2}\\ &= \frac{4}{13}\sqrt{25\cdot 169 - 256}\\ &= \frac{4}{13}\sqrt{9\cdot 9\cdot 49}\\ &= \frac{252}{13}.\end{aligned}$$

Keďže $\frac{252}{13} > 13$, tak výška je dlhšia ako dĺžka strany. Výsledok je preto $\frac{252}{130} = \frac{126}{65}$ metrov.

Úloha 46. Nájdite najväčšie kladné celé číslo q také, že pre všetky kladné celé čísla $n \geq 55$, číslo q delí výraz

$$n(n+4)(n-23)(n-54)(n+63).$$

Výsledok. 40

Riešenie. Označme daný súčin ako A. Rozoberieme zvyšky A po delení 5; členy súčinu budú n, $n+4$, $n+2$, $n+1$ a $n+3$. Keďže dané členy dávajú po delení 5 rôzne zvyšky, tak aspoň jeden z nich bude 0 a príslušný člen bude deliteľný 5, a teda $5 \mid A$.

Ak n je párne, v A existujú aspoň 3 párne členy, teda $8 \mid A$. Ak n je nepárne, v súčine sa nachádzajú 2 párne členy s rozdielom 86. Ďalej $86 \equiv 2 \pmod 4$, teda práve jeden z členov tohto súčinu je deliteľný 4, teda $8 \mid A$. Celkovo tak dostávame $40 \mid A$.

Ak zoberieme napríklad $n = 59$, vidno, že najvyššie mocniny 2, resp. 5, ktoré delia A, sú práve 8 a práve 5. Ak $n = 55$, možno pozorovať, že $3 \nmid A$. Pre ľubovoľné prvočíslo $p > 5$ pokrývajú zvyšky po delení 5 v jednotlivých členoch súčinu najviac $5 < p$ zvyškov $\mod p$, teda je vždy možné nájsť n také, že $p \nmid A$. Na základe toho dostaneme riešenie $q = 40$.

Úloha 47. Andy, Baška, Čeky, Denys a Ela sa rozhodli zapísať si niektoré z dvoch predmetov iných fakúlt – *Mágia a čarodejníctvo z antropologickej perspektívy* a *Chirurgia (5)*. Andy a Baška si zapísali iba čarodejníctvo, Čeky a Ela iba chirurgiu. Denys si verí a zapísal si oba. Mati vie, že na obidva predmety chodia práve traja z jeho kamarátov, ale netuší, ktorí traja. Tak všetkých naraz poprosí, aby prstom ukázali náhodne na spolužiaka, s ktorým majú aspoň jeden spoločný predmet (čiže Denys ukáže na každého zo zvyšných štyroch ľudí s pravdepodobnosťou $\frac{1}{4}$). Aká je pravdepodobnosť, že na základe tejto informácie bude Mati vedieť s istotou určiť, že Denys je ten, kto chodí na oba predmety?

Výsledok. $\frac{3}{4}$

Riešenie. Ak študent prstom ukazuje na iného študenta, povieme, že je medzi nimi *spojenie*.

Mati je schopný identifikovať Denysa práve vtedy, ak z každého predmetu má aspoň jeden študent *spojenie* s Denysom. Ak Denys má viac ako dve *spojenia*, je to zrejmé, pretože žiaden iný študent nemôže mať toľko *spojení*. V opačnom prípade má Denys práve jedno *spojenie* na každom z predmetov.

Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že máme *spojenia* Andy – Denys a Čeky – Denys. Keďže Baška nemá *spojenie* s Denysom, musí ukazovať na Andyho. Rovnako vieme odargumentovať, že Ela ukazuje na Čeky. Preto máme reťaz *spojení* Baška – Andy – Denys – Čeky – Ela, a keďže jediné možné reťaze *spojení* dĺžky 4 obsahujúce všetkých 5 študentov majú Denysa uprostred, sme hotoví.

Naopak, ak Denys nemá *spojenie* s niektorým predmetom, môžeme predpokladať, že chodí iba na ten druhý (pretože Mati nemá žiadnu informáciu, že na ten prvý by mal chodiť), a preto je od svojich spolužiakov na tomto predmete nerozlíšiteľný.

Teraz môžeme prejsť k určeniu výslednej pravdepodobnosti.

1. Predpokladajme, že Andy a Baška ukazujú na seba navzájom (čo nastáva s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$), zatiaľ čo Čeky a Ela nie (to nastáva s pravdepodobnosťou $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$). Okrem toho Denys musí ukazovať buď na Andyho, alebo na Bašku (čo nastáva s pravdepodobnosťou $\frac{2}{4}$). Analogicky vieme doriešiť aj prípad, keď Čeky a Ela ukazujú na seba navzájom a Andy s Baškou nie.
2. V opačnom prípade aspoň jeden z Andyho a Bašky ukazuje na Denysa s pravdepodobnosťou $1 - \frac{1}{4}$, to isté s pravdepodobnosťou $1 - \frac{1}{4}$ platí aj pre Čeky a Elu a potom je irelevantné, kam ukazuje Denys.

Keď to všetko nasčítame, dostaneme

$$\frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{2}{4} + \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{32} + \frac{3}{32} + \frac{9}{16} = \frac{3}{4}.$$

Úloha 48. Mišova funkcia $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ spĺňa

1. $f(x) = x^2$ pre všetky $0 \leq x < 1$ a
2. $f(x+1) = f(x) + x + 1$ pre všetky nezáporné reálne x.

Pomôžte Mišovi nájsť všetky nezáporné reálne x také, že $f(x) = 482$.

Výsledok. $15 + 11 \cdot \sqrt{2} = 15 + \sqrt{242}$

Riešenie. Označme desatinnú časť čísla x ako $\{x\}$. Potom

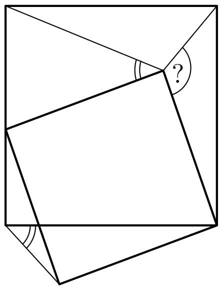
$$\begin{aligned} f(x) &= f(\lfloor x \rfloor + \{x\}) \\ &= \lfloor x \rfloor + \{x\} + f(\lfloor x \rfloor - 1 + \{x\}) = \cdots \\ &= \sum_{i=1}^{\lfloor x \rfloor} i + \lfloor x \rfloor \cdot \{x\} + f(\{x\}) \\ &= \frac{\lfloor x \rfloor \cdot (\lfloor x \rfloor + 1)}{2} + \lfloor x \rfloor \cdot \{x\} + \{x\}^2. \end{aligned}$$

Ďalej ukážeme, že f je rýdzo rastúca. Pre $x, y \in \langle n, n+1)$ také, že $x < y$, sa dá z podmienok v zadaní ukázať, že $f(x) < f(y)$. Pre všetky $x \in \langle n, n+1)$ platí nerovnosť $f(x) < f(n+1)$, pretože

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\lfloor x \rfloor \cdot (\lfloor x \rfloor + 1)}{2} + \lfloor x \rfloor \cdot \{x\} + \{x\}^2 \\ &< \frac{\lfloor x \rfloor \cdot (\lfloor x \rfloor + 1)}{2} + \lfloor x \rfloor + 1 \\ &= \frac{(\lfloor x \rfloor + 2) \cdot (\lfloor x \rfloor + 1)}{2} \\ &= \frac{(n+2) \cdot (n+1)}{2} \\ &= f(n+1). \end{aligned}$$

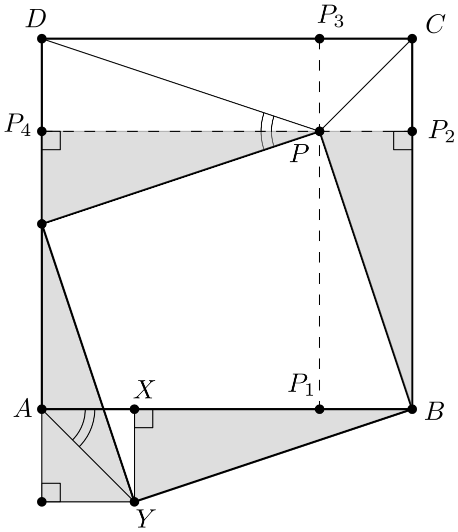
Preto existuje najviac jedno riešenie. Nájdime teda najväčšie kladné celé číslo n také, že $\frac{n^2+n}{2} \leq 482$. Riešením kvadratickej rovnice dostaneme $n = 30$, na základe čoho vieme, že $\lfloor x \rfloor = 30$. Preto potom $482 = f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor \cdot (\lfloor x \rfloor + 1)}{2} + \lfloor x \rfloor \cdot \{x\} + \{x\}^2 = 15 \cdot 31 + 30 \cdot \{x\} + \{x\}^2$. Opäť tak dostávame kvadratickú rovnicu, ktorej riešením je $-15 + \sqrt{242}$, ktoré leží medzi 0 a 1, teda môže byť desatinnou časťou x. Jediné riešenie je tak $x = 30 - 15 + \sqrt{242} = 15 + 11\sqrt{2}$.

Úloha 49. Na obrázku sú dva štvorce a dva vyznačené uhly rovnakej veľkosti. Zistite v stupňoch veľkosť uhla označeného otáznikom.



Výsledok. 112,5

Riešenie. Dokreslíme si kolmé priemety vrchola P pri hľadanom uhle, na strany väčšieho štvorca a označíme ich ako na obrázku.



Ľahko vidieť, že štyri šedé trojuholníky sú podobné. Vskutku všetky sú pravouhlé s odvesnami rovnakých dĺžok a s jedným uhlom α, ktorý udáva to, ako sú štvorce navzájom pootočené. Potom vieme, že P_4PP_3D je obdĺžnik vytvorený ďalšími dvoma kópiami šedých trojuholníkov, a preto vyznačený uhol musí byť 2α. Trojuholníky AXY a PP_2C sú pravouhlé a rovnoramenné, čiže $2\alpha = 45°$ a hľadaný uhol je

$$90° - \alpha + 45° = 112{,}5°.$$

Úloha 50. Števka sa už unavila z tradičných operácií, a tak si vymyslela jednu vlastnú – *hviezdenie*. Táto operácia označená aj ako $a \star b$ je definovaná na reálnych číslach a má nasledujúce vlastnosti:

1. $(a + b) \star c = (a \star c) + (b \star c)$,
2. $a \star (b + c) = (a \star b) \star c$.

S predpokladom, že $3 \star 2 = 54$, pomôžte Števke nájsť hodnotu $5 \star 4$.

Výsledok. 1620

Riešenie. Aby sme našli všeobecný predpis pre $n \star m$, kde m a n sú kladné celé čísla, využijeme prvú vlastnosť a dostaneme

$$\begin{aligned} n \star m &= (1 + (n-1)) \star m \\ &= 1 \star m + (1 + (n-2)) \star m && \text{(1. vlastnosť)} \\ &= 1 \star m + 1 \star m + \cdots + 1 \star m && \text{(1. vlastnosť)} \\ &= n \cdot (1 \star m). && \text{(výsledok A)} \end{aligned}$$

Predpokladajme, že $1 \star 1 = k$. Potom na základe predošlého výsledku a druhej vlastnosti možno odvodiť

$$\begin{aligned}
1 \star m &= 1 \star (1 + (m-1)) \\
&= (1 \star 1) \star (m-1) && \text{(2. vlastnosť)} \\
&= (((1 \star 1) \star 1) \dots) \star 1 && \text{(2. vlastnosť)} \\
&= ((k \star 1) \dots) \star 1 \\
&= ((k \cdot (1 \star 1)) \dots) \star 1 && \text{(výsledok A)} \\
&= \big((k^2 \star 1) \dots\big) \star 1 = \dots && \text{(výsledok A)} \\
&= k^m && \text{(výsledok B)}
\end{aligned}$$

Využitím nadobudnutých poznatkov už len vyjadríme $3 \star 2$:

$$\begin{aligned}
54 &= 3 \star 2 = 3 \cdot (1 \star 2), && \text{(výsledok A)} \\
18 &= 3^2 \cdot 2 = 1 \star 2 = k^2, && \text{(výsledok B)} \\
3 \cdot \sqrt{2} &= k.
\end{aligned}$$

Preto $n \star m = n \cdot \left(3 \cdot \sqrt{2}\right)^m$, teda $5 \star 4 = 5 \cdot \left(3 \cdot \sqrt{2}\right)^4 = 1620$.

Úloha 51. Marek chce zafarbiť štvorčeky štvorčekovej siete 10×11 bielymi a čiernymi políčkami, pričom žiadny štvorček nemá viac ako jeden susedný štvorček, ktorý s ním zdieľa farbu. Koľkými rôznymi spôsobmi môže Marek zafarbiť štvorčekovú sieť? Za susedné štvorčeky považujeme tie, ktoré zdieľajú hranu. Za rôzne považujeme aj šachovnice, ktoré stačí otočiť o $180°$, aby vyzerali rovnako.

Výsledok. 464

Riešenie. Ak máme obdĺžnik 2×1 (domino) políčok rovnakej farby, následne celý „dvojitý“ stĺpec (resp. „dvojitý“ riadok), v ktorom toto domino leží, musí byť vyplnený rovnako otočenými dominami so striedajúcimi sa farbami. To nám zaručí, že na celej šachovnici sú všetky dominá rovnako otočené. Spomeňme, že vyplnenie pásu $n \times 1$ políčok dominami a štvorčekmi vieme urobiť f_n spôsobmi, kde f je Fibonacciho postupnosť spĺňajúca $f_0 = 1$ a $f_1 = 1$.

Keďže všetky dominá musia byť rovnako otočené a rozloženie domín a štvorčekov na všetkých riadkoch (resp. stĺpcoch) je identické, počet všetkých možných rozložení jednofarebných domín a štvorčekov je $f_{10} + f_{11} - 1$. Jednotku sme odčítali preto, že rozloženie obsahujúce iba štvorčeky a žiadne dominá sme započítali dvakrát. Navyše, každému rozloženiu vieme priradiť dve rôzne ofarbenia v závislosti od toho, akú farbu má ľavé horné políčko, keďže následne sa už farby musia striedať.

Dokopy je preto $2 \cdot (144 + 89 - 1) = 464$ ofarbení šachovnice.

Úloha 52. Mati sa učí o kĺzavých priemeroch. Zobral si svoju obľúbenú postupnosť (Fibonacciho postupnosť) $\{F_k\}_{k=0}^{\infty}$, pre ktorú platí, že $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, kde $F_0 = 0$ a $F_1 = 1$. Na základe nej si zostavil postupnosť kĺzavých priemerov $\{m_k\}_{k=6}^{2024}$, pre ktorú platí $m_k = \frac{F_k + F_{k-1} + \cdots + F_{k-6}}{7}$. Koľko prvkov postupnosti $\{m_k\}_{k=6}^{2024}$ sú celé čísla?

Výsledok. 252

Riešenie.

Na začiatok si pripomeňme, že $\sum_{i=0}^{k} F_i = F_{k+2} - 1$. Toto tvrdenie dokážeme indukciou, kde indukčnou bázou je $\sum_{i=0}^{0} F_i = F_0 = 0 = 1 - 1 = F_2 - 1$ a ako indukčný krok spravíme $\sum_{i=0}^{k+1} F_i = F_{k+1} + \sum_{i=0}^{k} F_i = F_{k+1} + F_{k+2} - 1 = F_{k+3} - 1$. Preto

$$F_k + F_{k-1} + \cdots + F_{k-6} = \sum_{i=0}^{k} F_i - \sum_{i=0}^{k-7} F_i = F_{k+2} - F_{k-5} = 7 \cdot m_k.$$

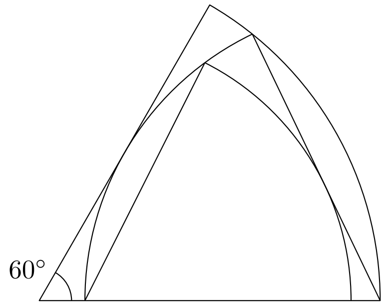
Nech d_l je zvyšok F_l po delení 7. Potom členy postupnosti $\{d_l\}_{l=0}^{2024}$ sú

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 1,\ 6,\ 0,\ 6,\ 6,\ 5,\ 4,\ 2,\ 6,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ \dots,\ 0,$$

a keďže $d_l \equiv d_{l-1} + d_{l-2} \pmod 7$, je jasné, že postupnosť zvyškov d_l bude mať periódu dĺžky 16.

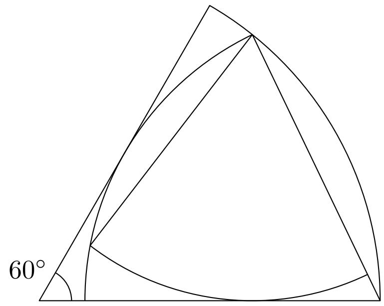
Pre všetky indexy l také, že $d_{l+2} \equiv d_{l-5} \pmod 7$, platí, že $l \equiv 4, 12 \pmod{16}$. Keďže $6 \leq l \leq 2024$ a $2024 = 126 \cdot 16 + 8$, tak existujú riešenia v tvare $l = 16 \cdot k + 4$ ak $1 \leq k \leq 126$ a v tvare $l = 16 \cdot k + 12$ ak $0 \leq k \leq 125$. Celkovo dostávame $2 \cdot 126 = 252$ riešení.

Úloha 53. Do kružnicového výseku s vnútorným uhlom 60° vpíšeme ďalší kružnicový výsek a toto zopakujeme ešte raz tak ako na obrázku. Určte pomer polomerov najmenšieho a najväčšieho výseku.



Výsledok. $\sqrt{39}/8$

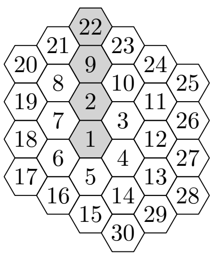
Riešenie. Otočme najmenší výsek ako na obrázku.



Z toho je jasné, že potrebujeme vypočítať y-ovú súradnicu prieniku prvého a druhého výseku.

Nech stred prvého výseku je na súradniciach $(0,0)$ a pravý vrchol na $(1,0)$. Potom najväčšiu kružnicu vieme popísať rovnicou $x^2+y^2=1$ a strednú kružnicu rovnicou $(x-1)^2+y^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$. Odčítaním prvej rovnice od druhej dostaneme $1-2x=\frac{3}{4}-1$, a preto $x=\frac{5}{8}$. Potom môžeme dopočítať, že $y=\pm\frac{\sqrt{39}}{8}$, a keďže zápornému riešeniu neprislúcha korektná geometrická konfigurácia, jediné riešenie je $\frac{\sqrt{39}}{8}$.

Úloha 54. Včelí plást pozostáva z 2024 šesťuholníkových políčok. V strednom políčku je 1 ml medu. Podľa špirálového vzoru zobrazeného na obrázku sa v políčkach nachádza rastúce množstvo medu, až kým posledné políčko nebude mať 2024 ml. Kráľovná Maja sa rozhodla postaviť diaľnicu zo stredového políčka priamo na okraj, ako je vyznačené šedou farbou na obrázku. Aby to mohla spraviť, musia robotnice presunúť med zo šedých políčok. Koľko medu (v mililitroch) musí byť presunutých, aby mohli vybudovať tento projekt?



Výsledok. 17928

Riešenie. Označme $H(n)$ množstvo medu v n. políčku diaľnice od stredu. Potom $H(1)=2$, $H(2)=9$, atď. Pozrime sa na šesťuholníky tvorené políčkami vo vzdialenosti n od stredu. Každá strana má n políčok. Na to, aby sme sa dostali z $H(n)$ do $H(n+1)$ po špirálovom vzore, potrebujeme prejsť po piatich stranách dĺžky n a jednej stanu dĺžky $n+1$. Preto môžeme usúdiť, že $H(n+1)=H(n)+5n+(n+1)=H(n)+6n+1$. Potom môžeme nájsť uzavretý tvar tejto postupnosti ako

$$\begin{aligned}H(n) &= 6(n-1)+1+H(n-1) = \cdots \\ &= 6\cdot((n-1)+(n-2)+\cdots+1)+(n-1)+H(1) \\ &= 6\cdot\frac{(n-1)n}{2}+n+1 \\ &= 3n^2-2n+1.\end{aligned}$$

Aby sme našli celkové množstvo medu, musíme nájsť počet šesťuholníkov N (nepočítajúc stred) na diaľnici. Keďže máme dokopy 2024 šesťuholníkov, tak N je najväčšie kladné celé číslo také, že

$$\begin{aligned}H(N) &\leq 2024, \\ 3N^2-2N &\leq 2023, \\ N^2-\frac{2}{3}N &\leq 674+\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Keďže $27^2-\frac{2}{3}\cdot 27 > 729-27 > 675$, tak hodnota N môže byť nanajvýš 26 a vskutku $26^2-\frac{2}{3}\cdot 26 < 676-18 < 674$, nuž $N=26$ je hľadaný počet diaľničných šesťuholníkov.

Teraz zostáva vypočítať sumu

$$\begin{aligned}1+\sum_{k=1}^{N}H(k) &= 1+3\cdot\sum_{k=1}^{N}k^2-2\cdot\sum_{k=1}^{N}k+\sum_{k=1}^{N}1 \\ &= 1+\frac{1}{2}N(N+1)(2N+1)-N(N+1)+N \\ &= 1+13\cdot 27\cdot 53-26\cdot 27+26 \\ &= 17928.\end{aligned}$$

Iný postup pre vypočítanie poslednej sumy spočíva v tom, že

$$H(k) = 6\cdot\frac{(k-1)k}{2}+k+1 = 6\cdot\binom{k}{2}+\binom{k+1}{1}$$

a z Pascalovho trojuholníka platí identita (tiež známa ako hokejkové pravidlo)

$$\binom{m}{m}+\binom{m+1}{m}+\cdots+\binom{n}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

Potom

$$\begin{aligned}1+\sum_{k=1}^{N}H(k) &= 1+6\cdot\sum_{k=1}^{N}\binom{k}{2}+\sum_{k=1}^{N}\binom{k+1}{1} \\ &= 1+6\cdot\binom{N+1}{3}+\left(\binom{N+2}{2}-1\right) \\ &= 27\cdot 26\cdot 25+14\cdot 27 \\ &= 17928.\end{aligned}$$

Úloha 55. Koľko rozličných celých čísel sa objaví v postupnosti

$$\left\lfloor\frac{1^2}{2024}\right\rfloor, \left\lfloor\frac{2^2}{2024}\right\rfloor, \ldots, \left\lfloor\frac{2024^2}{2024}\right\rfloor,$$

kde $\lfloor x\rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré je menšie alebo rovné ako x?

Výsledok. 1519

Riešenie. Keďže $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$, pre $n \leq 1011$ platí, že $\frac{(n+1)^2}{2024} - \frac{n^2}{2024} = \frac{2n+1}{2024} \leq \frac{2023}{2024} < 1$. Potom $\left\lfloor \frac{(n+1)^2}{2024} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n^2}{2024} \right\rfloor + 1$. Odtiaľ vieme, že postupnosť $\left\lfloor \frac{1^2}{2024} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2^2}{2024} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{1012^2}{2024} \right\rfloor$ obsahuje všetky celé čísla od $\left\lfloor \frac{1^2}{2024} \right\rfloor = 0$ do $\left\lfloor \frac{1012^2}{2024} \right\rfloor = 506$, takže medzi prvými 1012 členmi postupnosti je 507 unikátnych.

Na druhej strane, pre $n \geq 1012$ platí, že $\frac{(n+1)^2}{2024} - \frac{n^2}{2024} = \frac{2n+1}{2024} \geq \frac{2025}{2024} > 1$, a teda $\left\lfloor \frac{(n+1)^2}{2024} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{n^2}{2024} \right\rfloor$. Preto každý člen z $\left(\left\lfloor \frac{1013^2}{2024} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{1014^2}{2024} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{2024^2}{2024} \right\rfloor\right)$ na zozname ešte nebol (keďže je ostro väčší ako predchádzajúci člen). Potom z posledných 1012 členov postupnosti je všetkých 1012 unikátnych (zároveň sa nevyskytujú od prvej polovice postupnosti).

Dokopy postupnosť obsahuje $507 + 1012 = 1519$ rozličných členov.

Úloha 56. Koľko existuje usporiadaných štvoríc (a, b, c, d), navzájom rôznych čísel $a, b, c, d \in \{1, 2, \dots, 17\}$, takých, že $a - b + c - d$ je deliteľné 17?

Výsledok. 1904

Riešenie. Zostrojme pravidelný 17-uholník $P_1 \dots P_{17}$. Platí, že ak $a - b \equiv d - c \pmod{17}$, potom $|P_aP_b| = |P_dP_c|$, a teda body P_a, P_b, P_c, P_d tvoria rovnoramenný lichobežník. Takže základne P_aP_c a P_bP_d sú rovnobežné. Po odobratí jedného vrchola 17-uholníka ostatných 16 vrcholov môže byť popárovaných do 8 rovnobežných čiar. Každé 2 z nich môžu byť použité ako P_aP_c a P_bP_d. Existuje preto $17 \cdot \binom{8}{2} = 476$ podmnožín. Každá podmnožina môže definovať viacero usporiadaných štvoríc. Úsečky P_aP_c a P_cP_a sú rovnaké, avšak rozličná orientácia nám dáva rozličnú štvoricu. Podobne pre úsečky P_bP_d a P_dP_b. Nakoniec tieto úsečky môžu byť vymenené, a teda výsledok je $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 476 = 3808$.

Úloha 57. Nech $ABCD$ je obdĺžnik a bod E je na strane CD taký, že $2|DE| = |EC|$. Nech F je prienik úsečiek BD a AE. Ak $|\sphericalangle DFA| = 45°$, určte pomer $\frac{|AD|}{|AB|}$.

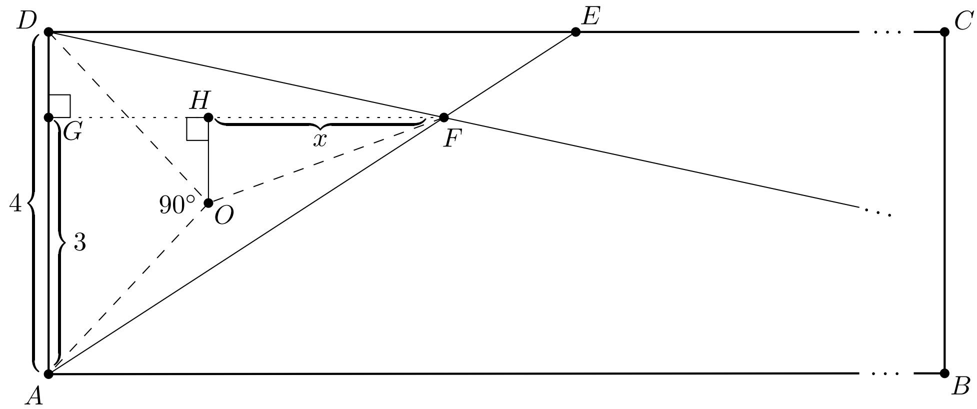
Výsledok. $\frac{\sqrt{7}-2}{3}$

Riešenie. Pomer úsečiek zrejme nezávisí od veľkosti konfigurácie, preto môžeme predpokladať, že $|AD| = 4$. Označme kolmú projekciu bodu F na stranu AD ako G, stred kružnice opísanej trojuholníka ADF ako O a kolmú projekciu O na stranu GF ako H. Trojuholníky ABF a EDF sú podobné s pomerom $|AB| : |ED| = 3 : 1$, preto $|AG| = 3$. Ďalej máme, že $|\sphericalangle DOA| = 2 \cdot |\sphericalangle DFA| = 90°$, a preto AOD je pravouhlý rovnoramenný trojuholník. Vzdialenosť O od AB aj od AD je teda 2. Označme poslednú neznámu dĺžku v pravouhlom trojuholníku HOF ako $x = |HF|$. Použitím Pytagorovej vety dostaneme

$$x^2 + (3-2)^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8 \Rightarrow x = \sqrt{7}.$$

Keďže trojuholníky DGF a DAB sú podobné, hľadaný pomer je rovný

$$\frac{|DA|}{|AB|} = \frac{|DG|}{|DF|} = \frac{1}{2+\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}-2}{3}.$$



Úloha 58. Nech $P(x)$ je polynóm stupňa 10 s celočíselnými koeficientmi taký, že má iba reálne korene a polynóm $P(x)$ delí polynóm $P(P(x)+2x-4)$. Nájdite hodnotu $\frac{P(2024)}{P(206)}$. *Poznámka:* Hovoríme, že polynóm $P(x)$ delí polynóm $Q(x)$, ak polynómy $P(x)$ a $Q(x)$ majú celočíselné koeficienty a existuje polynóm $R(x)$ s celočíselnými keoficientmi taký, že $Q(x) = R(x) \cdot P(x)$.

Výsledok. $10^{10} = 10000000000$

Riešenie. Ak r je koreň polynómu $P(x)$, tak potom aj $2r-4$, $2(2r-4)-4 = 4r-12$, $2(4r-12)-4 = 8r-28$, $\ldots$, $2^n r - 2^{n+2} + 4$ sú korene polynómu $P(x)$. Avšak $P(x)$ má najviac 10 rôznych reálnych koreňov. Preto existuje $j > i$ také, že $2^i r - 2^{i+2} + 4 = 2^j r - 2^{j+2} + 4$. Z toho vyplýva, že $2^i \cdot (r-4) = 2^j \cdot (r-4)$, a teda $r = 4$. Potom $P(x) = a \cdot (x-4)^{10}$, kde a je reálna konštanta. Nakoniec $\frac{P(2024)}{P(206)} = \left(\frac{2020}{202}\right)^{10} = 10^{10} = 10000000000$.

Úloha 59. Marek je v kruhu 2024 ľudí označených 1 až 2024 po smere hodinových ručičiek. Tí si hádžu lietajúci tanier. Človek na mieste 1 hodí tanier človeku na mieste 3. Človek na mieste 3 ho ďalej hodí človeku na mieste 5 a tak ďalej, čiže každý človek hodí tanier druhému človeku po svojej ľavej ruke. Práve vynechaný človek sa nahnevá a opustí kruh. Proces sa opakuje, kým v kruhu nezostanú poslední dvaja hráči. Kde má Marek stáť, ak chce byť jeden z posledných dvoch hráčov? Nájdi súčet prípustných pozícií.

Výsledok. 2978

Riešenie. Ak sú v hre poslední dvaja hráči, tak ten, ktorý drží tanier, by ho hodil sám sebe a ostal by posledný v kruhu. Aby sme našli pozíciu posledného človeka, uvažujme nasledovne. Ak by bolo 2^n ľudí v kruhu, tak každý človek na párnej pozícii by po jednom úplnom kole opustil kruh. Potom sa dostávame do podobnej situácie pre 2^{n-1} hráčov, pričom človek na pozícii 1 by opäť držal tanier. Indukciou dostávame, že by v kruhu zostal posledný. Ak je v kruhu $2^n + k$ ľudí, tak po k hodoch je človek na pozícii $2k+1$ v situácii, keď ostáva 2^n ľudí a môžeme preňho použiť vyššie spomínanú indukciu. Tento človek teda zostáva ako posledný. Medzi $2024 = 1024 + 1000$ ľuďmi, to bude človek na pozícii 2001.

Pre predposledného človeka uvažujme, že by v kruhu bolo $2^n + 2^{n+1}$ ľudí. Tvrdíme, že v takomto prípade predposledný človek, ktorý ostane v kruhu, bude na pozícii 1. Vieme si to vyskúšať na malých prípadoch. Znovu indukciou, ak by bolo $2^{n+1} + 2^{n+2}$ ľudí v kruhu, tak po jednej plnej otočke by ich ostalo $2^n + 2^{n+1}$, pričom hráč číslo 1 by znovu držal tanier. Teraz pre počet ľudí rovný $2^n + 2^{n+1} + k$ sa po k hodoch dostaneme do známej situácie, a teda človek na mieste $2k+1$ ostane ako predposledný. Keďže $2024 = 1024 + 512 + 488$, dostávame, že predposledný človek je na pozícii 977. Takže odpoveď je $2001 + 977 = 2978$.

Úloha 60. Kubko si hádže frisbee so svojimi 3 kamarátmi, pričom majú pravidlo, že nemôžu hodiť frisbee kamarátovi, ktorý im ho predtým hodil. Kubko hádzal ako prvý a po desiatich hodoch bol Kubko opäť tým, kto držal frisbee. Koľkými spôsobmi mohlo týchto desať hodov nastať?

Výsledok. 414

Riešenie. Spočítajme, koľko existuje postupností hádzania bez ohľadu na to, že Kubko bol posledný. Pri prvom hode mohol Kubko hodiť frisbee svojim trom kamarátom. Z týchto troch kamarátov môže každý hodiť už len dvom, lebo Kubkovi naspäť frisbee hodiť nemôžu. Teda ak frisbee bolo hodené n-krát, máme $3 \cdot 2^{n-1}$ postupností, kde Kubko začína.

Označme počet postupností, kde Kubko má frisbee v n. ťahu, ako y_n. V n. ťahu je všetkých možností $3 \cdot 2^{n-1}$. Nasledujúci ťah niektoré z týchto možností môžu byť predĺžené hodom Kubkovi. Tie, ktoré nemôžu byť predĺžené Kubkovi, sú tie, kde Kubko držal disk v n. ťahu alebo $(n-1)$. ťahu, pretože musel hodiť disk niekomu inému. Takých postupností je postupne y_n a $2y_{n-1}$. Preto $y_{n+1} = 3 \cdot 2^{n-1} - y_n - 2y_{n-1}$.

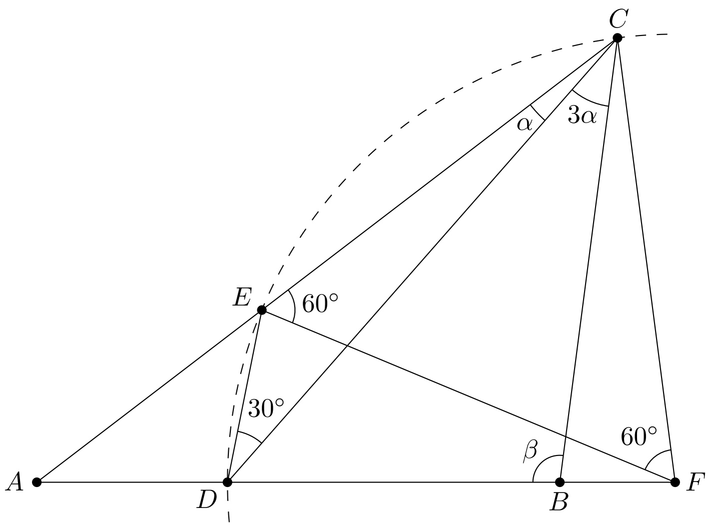
Je oveľa jednoduchšie spočítať každý člen až po y_{10} ako hľadať uzavretý tvar. Z toho, že $y_1 = 0$ $y_2 = 0$ a platí rekurentný vzťah $y_{n+1} = 3 \cdot 2^{n-1} - y_n - 2y_{n-1}$, vieme dopočítať $y_3 = 3 \cdot 2^1 - 0 - 0 = 6$, $y_4 = 3 \cdot 2^2 - 6 = 6$, $y_5 = 3 \cdot 2^3 - 6 - 12 = 6$, $y_6 = 3 \cdot 2^4 - 6 - 12 = 30$, $y_7 = 3 \cdot 2^5 - 30 - 12 = 54$, $y_8 = 3 \cdot 2^6 - 54 - 60 = 78$, $y_9 = 3 \cdot 2^7 - 78 - 108 = 198$ a nakoniec $y_{10} = 3 \cdot 2^8 - 198 - 156 = 414$.

Iné riešenie. Uvažujme postupnosť n hodov, kde Kubko je na začiatku, na konci a nikde medzi tým nemal disk. Ak takáto postupnosť bola na začiatku hry, tak Kubko mohol hodiť disk ľubovoľnému z 3 svojich kamarátov a ten mohol pokračovať iba 2 spôsobmi, po čom už je postupnosť hodov jednoznačne určená. Ak taká postupnosť hodov je niekde uprostred, tak Kubko nemôže vrátiť disk tomu kamarátovi, ktorý hodil disk Kubkovi. Kubko preto môže prihrať iba dvom kamarátom, po čom sú znova len dve možnosti a nakoniec jednoznačne určená postupnosť. Taká postupnosť hodov nemôže byť kratšia ako 3, preto je dostatočné nájsť všetky rozklady čísla 10 na súčet, ktoré nemajú sčítance menšie ako 3. Také rozklady sú len 10, $3+7$, $7+3$, $6+4$, $4+6$, $5+5$, $3+3+4$, $3+4+3$ a $4+3+3$. Rozklad 10 môže byť zahratý 6 spôsobmi. Každý rozklad s dvoma sčítancami môže byť zahratý $6 \cdot 4$ spôsobmi, teda dokopy $5 \cdot 6 \cdot 4$ spôsobmi. A nakoniec rozklady o troch sčítancoch môžu byť zahraté $6 \cdot 4 \cdot 4$ spôsobmi, preto $3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4$ možností. Dokopy $6 \cdot (1 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 4) = 6 \cdot 69 = 414$ možností.

Úloha 61. Pedro si nakreslil trojuholník ABC s $|\sphericalangle CBA| = 97{,}4^\circ$ a na jeho strane AB si vyznačil bod D taký, že $|\sphericalangle ACD| = 11{,}3^\circ$ a $|\sphericalangle DCB| = 33{,}9^\circ$. Potom si na AC vyznačil bod E taký, že $|EC| = |BC|$. Určte veľkosť uhla AED.

Výsledok. $41{,}3^\circ$

Riešenie. Označme si $\alpha = 11{,}3^\circ$ a $\beta = 97{,}4^\circ$. Následne $|\sphericalangle DCB| = 3\alpha$. Ďalej si na priamke AB označme ako $F \neq B$ bod spĺňajúci $|CB| = |CF|$.



Keďže $|\sphericalangle FBC| = 180^\circ - \beta$ a $\triangle BCF$ je rovnoramenný, tak $|\sphericalangle BCF| = 180^\circ - 2|\sphericalangle FBC| = 2\beta - 180^\circ$. Z toho vieme, že

$$|\sphericalangle ECF| = \alpha + 3\alpha + 2\beta - 180^\circ = 4 \cdot 11{,}3^\circ + 2 \cdot 97{,}4^\circ - 180^\circ = 60^\circ.$$

Nuž a vďaka $|CF| = |CB| = |CE|$ dostávame, že $\triangle CEF$ je rovnostranný.

Chceli by sme ešte ukázať $|FC| = |FD|$. Keďže $|\sphericalangle DCF| = 60^\circ - \alpha$ a $|\sphericalangle CFD| = 180^\circ - \beta$, zo súčtu uhlov $\triangle CDF$ vyplýva

$$|\sphericalangle FDC| = 180^\circ - (60^\circ - \alpha) - (180^\circ - \beta) = \alpha + \beta - 60^\circ = 48{,}7^\circ = 60^\circ - \alpha = |\sphericalangle DCF|,$$

a teda $\triangle CDF$ je rovnoramenný so základňou CD. Spoločne s tým, že $\triangle CEF$ je rovnostranný, dostávame $|FD| = |FC| = |FE|$. Body C, D, E preto ležia na kružnici so stredom F. Z obvodových a stredových uhlov potom $|\sphericalangle CDE| = \frac{1}{2}|\sphericalangle CFE| = 30^\circ$ a $|\sphericalangle DEC| = 180^\circ - \alpha - 30^\circ$. Napokon

$$|\sphericalangle AED| = 180^\circ - |\sphericalangle DEC| = 30^\circ + \alpha = 41{,}3^\circ.$$

Úloha 62. Reálne čísla $a > b > 1$ spĺňajú nerovnosť

$$(ab + 1)^2 + (a + b)^2 \leq 2(a + b)(a^2 - ab + b^2 + 1).$$

Určte najmenšiu možnú hodnotu

$$\frac{\sqrt{a - b}}{b - 1}.$$

Výsledok. $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Riešenie. Upravíme nerovnosť

$$\begin{aligned}(ab + 1)^2 + (a + b)^2 &\leq 2(a + b)(a^2 - ab + b^2 + 1),\\ 0 &\leq 2a^3 + 2b^3 - a^2b^2 - a^2 - b^2 - 4ab + 2a + 2b - 1,\\ 0 &\leq (a^2 - 2b + 1)(2a - b^2 - 1).\end{aligned}$$

Keďže $a > b > 1$, potom aj $a^2 > b^2$ a $a^2 - 2b + 1 > b^2 - 2b + 1 = (b - 1)^2 > 0$. Preto v druhej zátvorke máme

$$\begin{aligned}2a - b^2 - 1 &\geq 0,\\ 2a - 2b &\geq b^2 - 2b + 1,\\ 2(a - b) &\geq (b - 1)^2,\\ \frac{\sqrt{a - b}}{b - 1} &\geq \frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Hodnota $1/\sqrt{2}$ sa nadobúda napríklad, keď $a = 5/2$ a $b = 2$ (ak máme dostať rovnosť, tak musí platiť $a = (b^2 + 1)/2$), takže je to skutočne najmenšia možná hodnota.

Úloha 63. Nech x, y, z sú rôzne nenulové celé čísla, ktoré spĺňajú

$$\frac{(x-1)^2}{z} + \frac{(y-1)^2}{x} + \frac{(z-1)^2}{y} = \frac{(x-1)^2}{y} + \frac{(y-1)^2}{z} + \frac{(z-1)^2}{x}.$$

Nájdite najmenšiu možnú hodnotu výrazu

$$|64x + 19y + 4z|.$$

Výsledok. 7

Riešenie. Nech značenie $\sum_{\text{cyc}} Q(x, y, z)$ predstavuje súčet troch členov, v ktorom zvyšné dva členy získame cyklickou zámenou premenných $x \to y \to z \to x$ zopakovanou dvakrát, čiže $\sum_{\text{cyc}} Q(x, y, z) = Q(x, y, z) + Q(y, z, x) + Q(z, x, y)$.

Prenásobením zadanej rovnice nenulovým xyz a následnými úpravami dostávame

$$P(x, y, z) = x(x-1)^2(y-z) + y(y-1)^2(z-x) + z(z-1)^2(x-y) = \sum_{\text{cyc}} x(x-1)^2(y-z) = 0.$$

Nakoľko P nadobúda hodnotu 0 pre $x = y$, $y = z$ a $z = x$, musí byť tento polynóm deliteľný výrazom $(x-y)(y-z)(z-x) = \sum_{\text{cyc}} x^2(z-y)$. A keďže $P(x, y, z)$ je polynóm stupňa 4 a $\sum_{\text{cyc}} x^2(z-y)$ je polynóm stupňa 3, zostávajúci činiteľ musí byť lineárny.

$$P(x, y, z) = \left(\sum_{\text{cyc}} x^2(z-y)\right) \cdot (ax + by + cz + d)\,.$$

Naviac $xy - xz + yz - yx + zx - zy = \sum_{\text{cyc}} x(y-z) = 0$, z čoho

$$\begin{aligned} P(x, y, z) &= \sum_{\text{cyc}} \left(x^3(y-z) - 2x^2(y-z) + x(y-z)\right), \\ &= \sum_{\text{cyc}} \left(x^3(y-z) - 2x^2(y-z)\right) + 0, \\ &= \left(\sum_{\text{cyc}} x^2(z-y)\right) \cdot (ax + by + cz + d)\,. \end{aligned}$$

Z toho vidno, že a musí byť -1, aby platila rovnosť $x^2(z-y) \cdot ax = x^3(y-z)$. Podobne aj $b = c = -1$. Následne z $x^2(z-y) \cdot d = -2x^2(y-z)$ platí $d = 2$. Preto

$$P(x, y, z) = (x-y)(y-z)(z-x)(2 - x - y - z) = 0.$$

Keďže hľadáme iba trojice navzájom rôznych čísel, musí platiť $x + y + z = 2$. Zrejme každá trojica spĺňajúca túto rovnosť spĺňa aj rovnosť zo zadania.

Aby sme našli najmenšiu možnú hodnotu $|64x + 19y + 4z|$, odčítajme od vnútra absolútnej hodnoty $4(x + y + z) - 8$, ktoré je v skutočnosti rovné nule, a teda tým hodnotu výrazu nezmeníme. Dostaneme tak

$$|64x + 19y + 4z| = |15 \cdot (4x + y) + 8|.$$

Teraz hľadáme celé číslo $4x + y$, pre ktoré je hodnota výrazu minimálna. To očividne nastáva pre $4x + y = -1$. A k tomu už vieme nájsť riešenie $(x, y, z) = (-2, 7, -3)$.