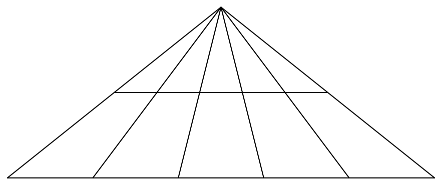
**1. feladat** Három évvel ezelőtt Peti édesanyja háromszor olyan idős volt, mint Peti. Most Peti édesapja háromszor olyan idős mint Peti. Hány év a korkülönbség Peti szülei között?

*Eredmény.* 6

*Megoldás.* Ha $x$-szel jelöljük Peti jelenlegi korát, akkor Peti édesanyjának jelenlegi életkora $3(x-3)+3$, azaz $3x-6$. A második állítás alapján Peti édesapjának kora $3x$, tehát a szülők közötti korkülönbség 6 év.

**2. feladat** Hány háromszög látható az ábrán?

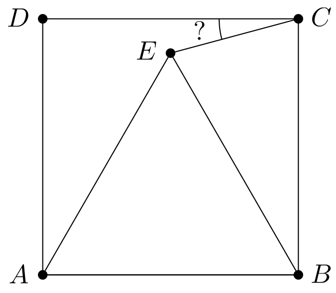


*Eredmény.* 30

*Megoldás.* Az ábrán látható összes háromszögnek az egyik csúcsa a legfelső pont. Továbbá az összes háromszög esetén az egyik oldal teljes egészében a két vízszintes szakasz valamelyikére esik. Ebből kifolyólag minden egyes háromszöget meghatározza a két vízszintes szakasz közül valamelyik, és az azon kiválasztott két különböző csúcs. Mivel mindkét szakaszon hat csúcs található, így a háromszögek száma összesen

$$2 \cdot \binom{6}{2} = 2 \cdot (5+4+3+2+1) = 30.$$

**3. feladat** Az $ABCD$ négyzet belsejében van az $E$ pont úgy, hogy $ABE$ szabályos háromszög. Hány fokos a $DCE$ szög?




*Eredmény.* 15

*Megoldás.* Mivel egy szabályos háromszög minden szöge 60°-os, így azt kapjuk, hogy $CBE\sphericalangle = 90° - EBA\sphericalangle = 30°$. Mivel $EB = AB = BC$, a $BCE$ háromszög egyenlő szárú, és így

$$ECB\sphericalangle = BEC\sphericalangle = \tfrac{1}{2}(180° - CBE\sphericalangle) = 75°.$$

Tehát a keresett szög nagysága $DCE\sphericalangle = 90° - ECB\sphericalangle = 15°$.

**4. feladat** Szandinak van egy nagy kincsesládája, benne számozott pénzérmékkel: egy érmére 1 van írva, két érmére 2, és így tovább, tizennyolc érmére 18, tizenkilenc érmére 19. Szandi egyesével vesz ki érméket a ládából, anélkül, hogy el tudná olvasni a rájuk írt számokat. Minimum hány érmét kell kivennie, hogy biztosan legyen közte 10 azonos számmal jelölt érme?

*Eredmény.* 136

*Megoldás.* Lehet, hogy Szandi úgy vett ki érméket, hogy kiválasztotta az összes 10-nél kisebb számmal jelöltet, és a 10 és 19 közötti jelölésű érmék mindegyikéből pontosan kilencet vett ki. Ez azt jelenti, hogy összesen $(1+2+\cdots+9)+9\cdot 10 = 135$ érmét vett ki a kincsesládából. Tehát ki lehet választani 135 érmét úgy, hogy ne legyen közte tíz azonos számmal jelölt.

Azonban, ha Szandi kivesz 136 érmét, akkor lesz legalább 91 érme, aminek a jelölése nagyobb 9-nél. A skatulyaelv szerint ekkor a tízféle, 10 és 19 közötti jelölésű érme közül van olyan, amiből kivett legalább tízet. Azaz minimum 136 érmét kell kiválasztani.

**5. feladat** Cukros bácsi vett egy nagy dobozzal a kedvenc cukorkáiból, hogy szétosztogassa a szomszéd gyerekeknek. Először megette a cukorkák felét, majd adott néhány cukorkát az első gyereknek. Az ezután megmaradt cukorkák felét megette, majd adott a cukorkákból a második gyereknek. A megmaradó cukorkáknak újra megette a felét, a többi cukorkát pedig odaadta a harmadik gyereknek. Ha mindegyik gyerek pontosan három cukorkát kapott, akkor mennyi cukorkát vett Cukros bácsi eredetileg?

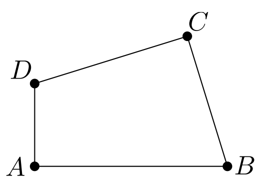
*Eredmény.* 42

*Megoldás.* Ha $n$-nel jelöljük a Cukros bácsi által vásárolt cukorkák számát, akkor a cukorkák szétosztása alapján felírhatjuk az alábbi egyenletet:

$$\left(\left(\frac{n}{2}-3\right)\cdot\frac{1}{2}-3\right)\cdot\frac{1}{2}-3=0.$$

Megoldva az egyenletet azt kapjuk, hogy $n=42$.

**6. feladat** Legyen $ABCD$ egy négyszög, amelynek az $A$ és $C$ csúcsoknál derékszögei vannak. Tudjuk három oldal hosszát: $BC=6$, $CD=8$, és $DA=2$. Adjuk meg az $ABCD$ négyszög területét!




*Eredmény.* $24+4\sqrt{6}$

*Megoldás.* A Pitagorasz-tétel szerint $BD=\sqrt{6^2+8^2}=10$ és ezt felhasználva

$$AB=\sqrt{BD^2-AD^2}=\sqrt{10^2-2^2}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}.$$

Így az $ABCD$ négyszög területe

$$\frac{1}{2}(6\cdot 8+2\cdot 4\sqrt{6})=24+4\sqrt{6}.$$

**7. feladat** Egy irodai nyomtatóval tudunk csak az egyik oldalra vagy mindkét oldalra nyomtatni. Az egyoldalas nyomtatás oldalanként három másodpercet vesz igénybe, míg a kétoldalas nyomtatás kilenc másodpercbe telik laponként. Kata ki akar nyomtatni egy 18 oldalas cikket a lapok mindkét oldalára nyomtatva. Kinyomtathatja az egészet kétoldalas nyomtatással, vagy egyoldalassal kinyomtathatja először a páratlan oldalakat, majd a lapokat kézzel visszatéve a nyomtatóba rájuk nyomtatja a páros oldalakat. Kata gyorsan rájön, hogy a két folyamat pontosan ugyanannyi időbe telne. Hány másodpercbe telik Katának visszatenni a lapokat a nyomtatóba?

*Eredmény.* 27

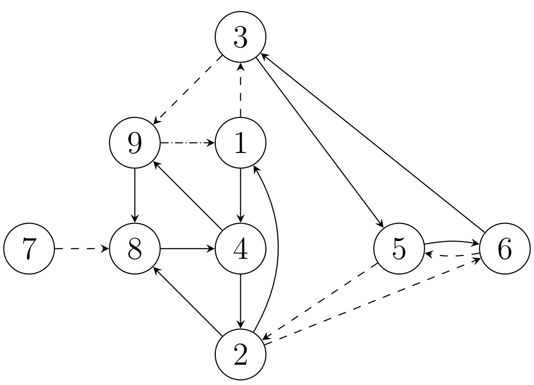
*Megoldás.* Tudjuk, hogy Kata 18 oldalt, vagyis kilenc lapnyit akar nyomtatni. Ha a kétoldalas nyomtatást használja, az összesen $9\cdot 9=81$ másodpercet vesz igénybe. Másfelől, ha külön nyomtatja az egyes oldalakat, akkor maga a nyomtatás $2\cdot 3\cdot 9=54$ másodpercbe telik. Tehát $81-54=27$ másodpercig tart visszatenni a lapokat a nyomtatóba.

**8. feladat** Keressétek meg az összes olyan 9-jegyű számot, melyre teljesülnek a következő feltételek:

- Az $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ számjegyek mindegyike pontosan egyszer szerepel a számban.
- Bármely két szomszédos számjegy által (sorrendcsere nélkül) alkotott kétjegyű szám osztható 7-tel vagy 13-mal.

*Eredmény.* 784913526

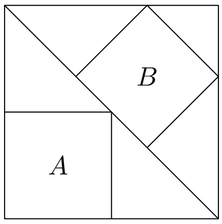
*Megoldás.* Írjuk az $1,\ldots,9$ számokat a diagramba, és húzzunk be egy nyilat $x$-ből $y$-ba, ha $\overline{xy}$ osztható 7-tel vagy 13-mal.



(A folytonos nyíl a 7-tel oszthatókat mutatja, a szaggatott a 13-mal oszthatókat, a 91 pedig mindkettővel osztható.) A szám csak 784-vel kezdődhet. Ha a 9-es szám következik, akkor az 1, 3, és 5 fogják követni, a maradék két szám sorrendje csak 2, 6 lehet. Az így kapott megoldás: 784913526.

A másik lehetséges kezdés 7842, ami után megint két lehetőség van. Ha az 1-essel folytatjuk, akkor utána csak a 3-as jöhet, ami után már nem szerepelhet mindkettő az 5 és 9 közül. A másik esetben a 784263 kezdést kapjuk, ami szintén nem fejezhető be.

**9. feladat** Egy nagyobb négyzetbe két négyzetet tettünk az ábrán látható módon. Mekkora az $A$ négyzet területe, ha a $B$ négyzet területe 48 egység?




*Eredmény.* 54

*Megoldás.* A $B$ négyzet melletti háromszögek egyenlőszárúak, ezért a $B$ négyzet oldala a nagy négyzet átlójának a harmada. Ha $s$ a nagy négyzet oldalának hossza, akkor a $B$ négyzet oldalának hossza $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot s$, az $A$ oldal hossza $\frac{1}{2} \cdot s$. A két négyzet területének arányát felírhatjuk így:

$$\frac{s^2}{4} : \frac{2 \cdot s^2}{9} = \frac{9}{8}$$

vagyis az $A$ négyzet területe $48 \cdot \frac{9}{8} = 54$.

**10. feladat** Fanninak két kockája van, az egyik 9 cm élhosszúságú és fehér egységkockákból áll (egységkocka alatt az 1 cm élhosszúságú kockát értjük), a másik pedig 10 cm élhosszúságú és fekete egységkockákból áll. Fanni ezekből az egységkockákból szeretne egy 12 cm élhosszúságú kockát építeni. Az így kapott kocka felszínén legalább hány $\text{cm}^2$ fekete területet látunk szükségképpen?

*Eredmény.* 0

*Megoldás.* Fanninak $9^3 = 729$ fehér és $10^3 = 1000$ fekete egységkockája van. Egy 12 élhosszúságú kocka felszínéhez összesen $12^3 - 10^3 = 1728 - 1000 = 728$ egységkockára van szükség. Ebből következik, hogy össze tud rakni egy 12 élhosszúságú kockát úgy, hogy a kockának mind a hat lapja teljesen fehér legyen, tehát a válasz 0.

**11. feladat** Egy matematika dolgozat után a tanár megállapította, hogy az osztályban pontosan tízen nem tudnak két törtet összeszorozni, tizennégyen nem tudnak két törtet összeadni, és tizenheten nem tudnak törtet egyszerűsíteni. Azt is észrevette, hogy minden tanulónak legalább az egyik művelettel problémája akad, ráadásul hat olyan tanuló is van, aki egyik műveletet se tudja elvégezni. Legfeljebb hány tanulója lehet az osztálynak?

*Eredmény.* 29

*Megoldás.* Ahhoz, hogy pontosan meg tudjuk állapítani az osztály létszámát, azt is ismernünk kellene, hogy hány olyan tanuló van, akiknek pontosan két művelettel van problémája. Belátható azonban, hogy akkor kapjuk a lehető legnagyobb számot, ha feltesszük, hogy nincs olyan diák, aki pontosan két műveletet nem tud elvégezni. Ebben az esetben az összes tanuló száma

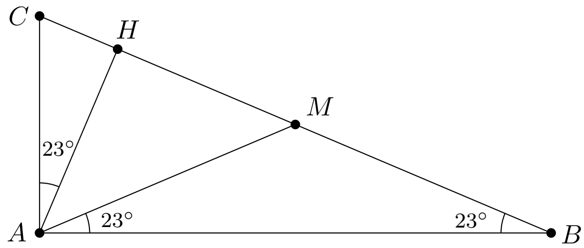
$$10 + 14 + 17 - 2 \cdot 6 = 29.$$

Kétszer kell kivonnunk azon diákok számát, akik egyik műveletet sem tudják elvégezni, hiszen amikor összeadtuk a három csoport létszámát, őket háromszor számoltuk.

**12. feladat** Egy derékszögű háromszög egyik szögének nagysága 23°. Mekkora (fokban mérve) a derékszögű csúcsból induló súlyvonal és magasságvonal által bezárt szög?

*Eredmény.* 44

*Megoldás.* Legyen $ABC$ a háromszögünk, és $BAC\sphericalangle = 90°$. Az $A$ pontot a $BC$ oldal $M$ felezőpontjával összekötve megkapjuk a súlyvonalat, az $A$-ból húzott magasság és a $BC$ oldal metszéspontját pedig jelöljük $H$-val.



Thalész tétele alapján az $ABC$ háromszög csúcsai rajta vannak egy $M$ középpontú körön. Az általánosság megsértése nélkül legyen $CBA\sphericalangle = 23°$. Mivel az $ABM$ háromszög egyenlőszárú, így $BAM\sphericalangle = 23°$. Továbbá az $AHC$ háromszög hasonló az $ABC$ háromszöghöz, tehát $HAC\sphericalangle = 23°$. Ezek alapján a keresett szög nagysága $MAH\sphericalangle = 90° - 2\cdot 23° = 44°$.

**13. feladat** Az $a$ és $b$ olyan pozitív egész számok, melyre $20a+19b=365$. Mennyi az értéke a $20b + 19a$ kifejezésnek?

*Eredmény.* 376

*Megoldás.* Világos, hogy $a, b \leq 20$. Mindkét oldalhoz $b$-t adva azt kapjuk, hogy $20(a + b) = 365 + b$. Tudjuk, hogy a bal oldal osztható 20-szal, tehát a jobb oldal egyenlő kell legyen 380-nal. Ezek alapján $b = 15$, és $a = 4$, vagyis $20b + 19a = 380 - a = 376$.

**14. feladat** Egy 2018 oldalú szabályos sokszögnek 2033135 átlója van. Mennyivel van ennél több átlója egy szabályos 2019-szögnek? A sokszög oldalait egyik esetben sem számoljuk bele az átlókba.

*Eredmény.* 2017

*Megoldás.* A szabályosság nem játszik szerepet a feladatban, vagyis nézhetjük úgy a 2019-szöget, hogy egy 2018-szögnek az egyik oldalát bontjuk két részre egy új csúccsal. Az új csúcsból 2016 új átlót húzhatunk abba a 2016 csúcsba, amelyek nem szomszédosak az új csúccsal. Ezenkívül egy új átló keletkezik, ami az új pont két szomszédos csúcsát köti össze. Így összesen 2017-tel nő meg az átlók száma.

**15. feladat** Keressétek meg a $(x^2 - 4x + 5)^{x^2+x-30} = 1$ egyenlet valós megoldásait!

*Eredmény.* 2, 5, $-6$

*Megoldás.* Mivel $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 \geq 1$, a hatványra emelés alapja egy pozitív egész szám. Az egyenlet értéke csak akkor lehet 1, ha az alap 1 vagy ha a kitevő 0. Az első eset, hogy $x^2 - 4x + 5 = 1$ ekvivalens azzal, hogy $(x-2)^2 = 0$, ami alapján $x = 2$. A második esetben $x^2 + x - 30 = (x - 5)(x + 6) = 0$ az $x = 5$ és a $x = -6$ megoldásokat kapjuk. Összességében ez a három megoldás létezik.

**16. feladat** Hány olyan permutációja van az 1,2,3,4 számoknak, melyből bárhogyan törlünk egy számot, akkor a megmaradt számok nem alkotnak se növekvő, se csökkenő számsort?

Megjegyzés: A *permutáció* egy olyan sorozata a számoknak, melyben minden szám pontosan egyszer szerepel.

*Eredmény.* 4

*Megoldás.* Tegyük fel, hogy az első szám az 1. Ha a maradék három szám között van két növekvő szám, akkor a harmadik számot kitörölve, egy három hosszú növekvő sort kapunk. Ha nincs közte két növekvő szám, akkor az $(1, 4, 3, 2)$ sort kapjuk, amiből ha az 1-et kitöröljük, akkor egy három hosszú csökkenő sort kapunk. Vagyis az 1 nem lehet kezdőszám, és szimmetria miatt utolsó sem. Hasonlóan a 4-es szám sem lehet a sor elején vagy a végén. Vagyis az 1 és a 4 lesz a két középső szám. Így a közepén kétféle: $(1, 4)$ és $(4, 1)$ lehet, valamint a 2 és 3 számoknak is kétféle sorrendje lehet:

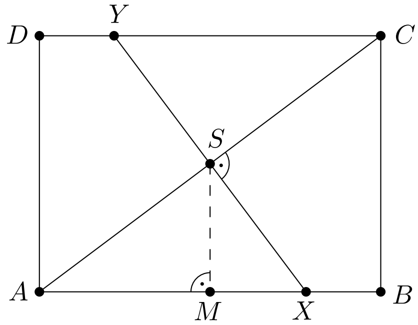
$$(2, 1, 4, 3),\ (3, 1, 4, 2),\ (2, 4, 1, 3),\ (3, 4, 1, 2).$$

Az így kapott 4 permutáció mindegyike megfelel a feltételeknek.

**17. feladat** Legyen az $ABCD$ egy olyan téglalap, melyre $AB = 8$ cm és $BC = 6$ cm. Az $X$ és $Y$ pontok legyenek az $AC$ szakasz felezőmerőlegesének $AB$-vel és $CD$-vel vett metszéspontjai. Milyen hosszú az $XY$ szakasz (centiméterben mérve)?

*Eredmény.* $\frac{15}{2}$

*Megoldás.* A Pitagorasz-tétel alapján $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$. Legyen $S$ az $AC$-nek és felezőmerőlegesének a metszéspontja. Világos, hogy $S$ felezőpontja az átlónak, vagyis $AS = 5$.




Tudjuk, hogy $CAB\sphericalangle = SAX\sphericalangle$ és $XSA\sphericalangle = CBA\sphericalangle = 90°$, vagyis $ASX$ és $ABC$ hasonló háromszögek, ami alapján $SX : AS = BC : AB$, azaz

$$SX = \frac{BC \cdot AS}{AB} = \frac{15}{4}.$$

Ebből látjuk, hogy $XY = 2 \cdot SX = \frac{15}{2}$.

**18. feladat** A $FOUR + FIVE = NINE$ egyenlőségben minden egyes betű egyértelműen megfelel egy számjegynek és a különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek. Továbbá tudjuk, hogy

- $FOUR$ osztható néggyel,
- $FIVE$ osztható öttel,
- $NINE$ osztható hárommal.

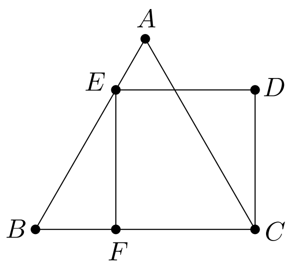
Keressük meg $NINE$ minden lehetséges értékét.

*Eredmény.* 3435

*Megoldás.* Az egyesek helyén álló számjegyeket nézve azt látjuk, hogy $R + E = E$, tehát $R = 0$. Mivel $FIVE$ osztható 5-tel és $R = 0$, így $E = 5$. A százasok helyén álló számjegyeket vizsgálva, és tudva, hogy a 0 már foglalt, azt kapjuk, hogy $O = 9$ és 1-et továbbhozunk a tízesek összeadásából, illetve ugyancsak továbbviszünk 1-et az ezresek összeadásába. Azaz $U + V$ nagyobb kell legyen, mint 10, és $N$ egy 1-nél nagyobb páratlan számjegy. Másrészt $U + V \leq 7 + 8 = 15$, hiszen a 9 már foglalt. Ezzel behatároltuk, hogy csak $N = 3$ lesz jó. $N$ ismeretében és a 4-gyel való oszthatóságból pedig következik, hogy $U = 6$, $V = 7$ és $F = 1$.

Mivel $NINE$ osztható 3-mal, a számjegyeinek összege $N + I + N + E = 3 + I + 3 + 5 = 11 + I$ is osztható kell legyen 3-mal. Az $I$ értékének megfelelő 1, 4, és 7 számjegyekből már csak a 4 szabad, azaz $I = 4$. Azt kaptuk, hogy az egyetlen jó válasz $NINE = 3435$ és az egyenlőségünk a $1960 + 1475 = 3435$ formában áll elő.

**19. feladat** Legyen $ABC$ egy szabályos háromszög és $CDEF$ egy négyzet úgy, hogy $E$ az $AB$ szakaszon, $F$ pedig a $BC$ szakaszon fekszik. Ha a négyzet kerülete 4, mekkora az $ABC$ háromszög kerülete?




*Eredmény.* $3 + \sqrt{3}$

*Megoldás.* Vegyük észre, hogy a két derékszögű, 30°, 60° és 90° fokos szögekkel rendelkező háromszög egybevágó, mert mindkettőnek az egyik oldala az egységnégyzet egy oldala. Egy ilyen alakú derékszögű háromszög egy szabályos háromszög félbevágva, ezért a rövidebb befogója az átfogó fele. Legyen a rövidebb befogó hossza $x$, az átfogó hossza $2x$. A Pitagorasz-tétel alapjan $(2x)^2 = x^2 + 1^2$, tehát $x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Ebből következik, hogy az $ABC$ szabályos háromszög egy oldala $1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}$, tehát a kerülete $3 + \sqrt{3}$.

**20. feladat** Legyenek $a$ és $b$ valós számok. Ha az $x^3 - ax^2 + 588x - b = 0$ egyenletnek van háromszoros gyöke, akkor mik az $a$ lehetséges értékei?

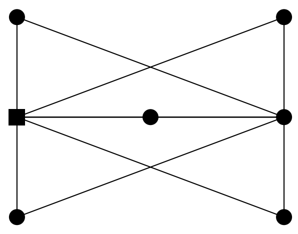
*Eredmény.* 42, $-42$

*Megoldás.* Ha $r$ háromszoros gyök, akkor

$$(x - r)^3 = x^3 - 3rx^2 + 3r^2x - r^3 = x^3 - ax^2 + 588x - b.$$

Összehasonlítva az együtthatókat azt kapjuk, hogy $3r^2 = 588$ vagyis $r = \pm 14$. Így $a = \pm 42$.

**21. feladat** Simon túrázik, szigeteket látogat meg, amelyek az ábrán látható módon hidakkal vannak összekötve. Minden hídon vámot kell fizetnie. Egyedi a kilátás minden hídról, ezért az összes hídon át akar menni. Hogy pénzt spóroljon, minden hídon pontosan egyszer szeretne átmenni. Hányféleképpen szervezheti a túrát, ha a négyzettel jelölt szigetről indul? Simon nem tud átugrani egy hídról egy másikra amikor nem egy szigeten van, és bármely szigetet tetszőlegesen sokszor meglátogathat.



*Eredmény.* 120

*Megoldás.* Vegyük észre, hogy a négyzettel jelölt sziget és a jobb oldali középső sziget "speciális" szigetek: Minden híd valamelyik speciális szigetről indul, és minden "szokásos" sziget össze van kötve híddal a két speciális szigettel. Tehát a túra során Simon mindig keresztülmegy egy szokásos szigeten, és a túloldali speciális szigetre érkezik. Tehát csak azt kell megszámolnunk, hányféle sorrendben tudja meglátogatni a szokásos szigeteket, ami $5! = 120$ féleképpen tehető meg.

**22. feladat** Hány olyan $(m, n)$ pozitív egészekből álló rendezett számpár van, amelyre $m$ és $n$ legkisebb közös többszöröse 2000?

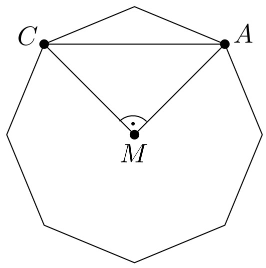
*Eredmény.* 63

*Megoldás.* Vizsgáljunk két esetet: Először nézzük azt, amikor egyik szám sem $2000 = 2^4 \cdot 5^3$. Ekkor az egyik szám $2^4 \cdot 5^k$ valamilyen $k \in \{0, 1, 2\}$-re és a másik szám $2^l \cdot 5^3$ valamilyen $l \in \{0, 1, 2, 3\}$-re. Tehát 24 megfelelő számpárt találunk (mindkét sorbarendezést számolva). A második eset, ha az egyik szám 2000. Ekkor a másik szám 2000 osztója, és $(4 + 1) \cdot (3 + 1) = 20$ osztója létezik. Mindkét sorbarendezést számolva $2 \cdot 20 - 1 = 39$ párt kapunk. (Levontunk egyet, mert a $(2000, 2000)$ párt duplán számoltuk.) Összesen tehát $24 + 39 = 63$ megfelelő számpár van.

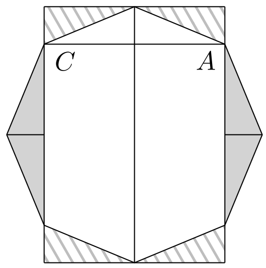
**23. feladat** Legyen $ABCDEFGH$ egy szabályos nyolcszög és $AC = 7\sqrt{2}$. Határozzátok meg a nyolcszög területét.

*Eredmény.* $98\sqrt{2}$

*Megoldás.* Legyen $M$ a nyolcszög középpontja. Mivel $AMC\sphericalangle = \frac{2}{8} \cdot 360° = 90°$, a nyolcszög köréírt körének sugara 7, átmérője 14.




Az ábrán látható átrendezés miatt a nyolcsszög területe megegyezik az átmérő és az $AC$ szakasz szorzatával. Tehát a keresett terület $14 \cdot 7\sqrt{2} = 98\sqrt{2}$.




**24. feladat** Négy barát elhatározta, hogy nyelveket fog tanulni. A helyi nyelviskola arab, bengáli, kínai és holland tanfolyamokat kínál, és a barátok mindegyike pontosan három nyelvet akar megtanulni ezek közül. Hányféleképpen választhatnak tanfolyamokat, hogy legyen legalább egy kurzus, amelyre mindannyian járnak?

*Eredmény.* 232

*Megoldás.* Először vegyük észre, hogy egy ember négyféle nyelvhármast választhat, hiszen ezt egyértelműen meghatározza az, hogy melyik nyelvet nem választja. Tehát összesen $4^4 = 256$ féleképpen választhat a négy barát nyelvtanfolyamokat, ha eltekintünk az extra feltételtől.

Nézzük azokat az eseteket, amikor nincsen közös tanfolyamuk. Ez csak úgy fordulhat elő, ha mindegyik nyelvet pontosan egy ember nem tanul. Ez $4! = 24$ féleképpen lehetséges.

Végül kivonjuk az összes esetből a rossz eseteket, tehát a jó esetek száma $256 - 24 = 232$.

**25. feladat** Valaki mondott egy $n$ pozitív egész, csupa nemnulla számjegyekkel rendelkező számot Abigélnek. Abigél leírta az eredeti szám számjegyeit fordított sorrendben, és ezt a számot megszorozta $n$-nel. Azt vette észre, hogy éppen ezerrel többet kapott mint $n$ számjegyeinek szorzata. Adjátok meg $n$ összes lehetséges értéket.

*Eredmény.* 24, 42

*Megoldás.* Az $n$ szám legalább kétszámjegyű. Ha pontosan kétszámjegyű, és a két nemnulla jegye $a$ és $b$, akkor a feladatbeli feltétel

$$(10a + b)(10b + a) = 1000 + ab$$

azaz

$$a^2 + b^2 = 10(10 - ab).$$

Mivel a jobboldal pozitív, $ab < 10$. Ezután már csak néhány esetet kell végignéznünk, és kapjuk hogy $a$ és $b$ 2 és 4 valamilyen sorrendben.

Végül, ha $n$ $k$-jegyű, ahol$k \geq 3$, akkor az egyenlet bal oldala legalább $(10^{k-1})^2$, míg a jobb oldala kevesebb mint $1000 + 10^k$. Ezért $n$ nem lehet több mint két jegyű.

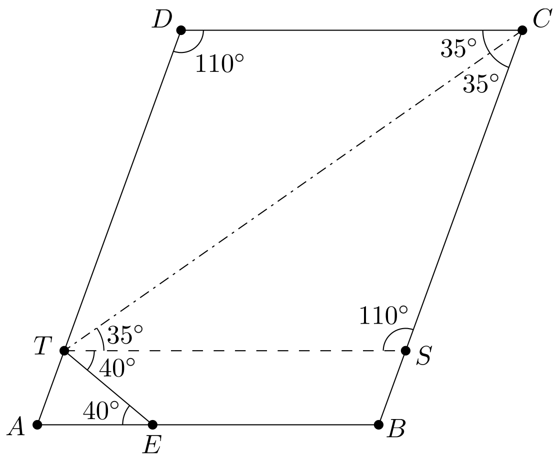
**26. feladat** Legyen $ABCD$ egy paralelogramma és legyen $T$ egy olyan belső pont az $AD$ oldalon, hogy a $T$ és $C$ pontokon átmenő egyenes a $BCD\sphericalangle$ szögfelezője. Továbbá legyen $E$ egy olyan pont az $AB$ oldalon, hogy $AET\sphericalangle = 40°$. Ha $CTE\sphericalangle = 75°$, hány fokos a $CDA\sphericalangle$?

*Eredmény.* 110

*Megoldás.* Legyen $S$ olyan pont a $BC$ oldalon, hogy $TS$ párhuzamos az $AB$ oldallal. Ekkor $ETS\sphericalangle = 40°$ és

$$DCT\sphericalangle = STC\sphericalangle = CTE\sphericalangle - STE\sphericalangle = 35°.$$

Mivel $CT$ a $DCB\sphericalangle$ szögfelezője, így a $CTS$ háromszög egyenlőszárú, $DCT\sphericalangle = TCS\sphericalangle$, és $DCB\sphericalangle = 2 \cdot 35° = 70°$. Tehát $CDA\sphericalangle = 180° - DCB\sphericalangle = 110°$.




**27. feladat** Két nagy nemesi ház találkozott egy lakomán, és mindkét házból jelen volt legalább egy férfi és legalább egy nő. Egy ház minden egyes tagja egyenként üdvözölte a másik ház minden egyes tagját a következő módon: ha két férfi üdvözölte egymást, ők kezet fogtak, ha két nő vagy egy nő és egy férfi üdvözölte egymást, ők meghajoltak. Az üdvözlés végeztével összeszámolták, hogy összesen 85 kézfogás és 162 meghajlás történt. Hány nő volt jelen a lakomán? Amikor két ember meghajolt egymásnak, azt egy meghajlásnak számoljuk.

*Eredmény.* 10

*Megoldás.* Legyen $f_1$, $f_2$, $n_1$, $n_2$ rendre a férfiak és a nők száma az egyes házakban. Mivel $f_1 f_2 = 85 = 5 \cdot 17$, így az általánosság megsértése nélkül legyen $f_1 = 5$ és $f_2 = 17$ (hogy a férfiak száma 1 és 85, azt könnyen kizárhatjuk). Összesen $85 + 162 = 247$ üdvözlés volt, ekkor a

$$(f_1 + n_1)(f_2 + n_2) = 247 = 13 \cdot 19$$

egyenlőségből azt kapjuk, hogy $f_1 + n_1 = 13$ és $f_2 + n_2 = 19$ (a többi szorzatra bontás itt is könnyen kizárható). Azaz $n_1 = 8$, $n_2 = 2$, tehát a válasz $8 + 2 = 10$.

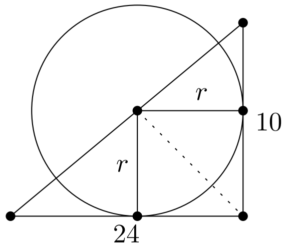
**28. feladat** Vegyünk egy háromszöget, amelynek oldalhosszai 10, 24 és 26. Legyen $c$ egy olyan kör, amelynek középpontja a leghosszabb oldalon van, és érinti a két rövidebb oldalt. Mekkora a $c$ kör sugara?

*Eredmény.* 120/17

*Megoldás.* A Pitagorasz-tétel alapján ez a háromszög derékszögű. A derékszögű csúcsot és a kör középpontját összekötő szakasz az eredeti háromszögünket két háromszögre bontja. Az érintési pontokba húzott sugarak merőlegesek a nekik megfelelő rövidebb oldalakra, így ezek a sugarak a kisebb háromszögekben magasságvonalak lesznek. Jelöljük $r$-rel a $c$ kör középpontját. Kétféleképpen számoljuk ki a háromszög területét, egyrészt az oldalak segítségével, másrészt a két kisebb háromszög területéből:

$$T = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 10 = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot r + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot r,$$

ebből pedig megkapjuk, hogy $r = 120/17$.




**29. feladat** Margaréta 10 €-val elment egy kaszinóba. A kaszinó egyik nyerőgépe a következő módon működik: a játékos bedob 1 €-t érmékben, és $p$ valószínűséggel megnyeri a jackpotot; egyébként visszakap 0,5 €-t. Mekkora az a legkisebb $p$ valószínűség, amely mellett ha Margaréta ezzel a nyerőgéppel játszik addig, ameddig van rá pénze vagy megnyeri a jackpotot, akkor legalább 50% esélye van megnyerni a jackpotot.

*Eredmény.* $1 - \sqrt[19]{0{,}5}$

*Megoldás.* Vegyük észre, hogy Margaréta legfeljebb 19-szer játszhat sikertelenül, hiszen miután elköltötte az utolsó 1 €-t, csak 0,5 € marad nála, ami kevesebb, mint amennyit a gép elfogad. Minden próbálkozásnál $1 - p$ valószínűséggel nem nyer, tehát annak a valószínűsége, hogy nem nyeri meg a jackpotot $(1 - p)^{19}$. Ahhoz, hogy legalább 50% esélye legyen a jackpotra, $(1 - p)^{19} \leq 0{,}5$ fenn kell álljon, ami ekvivalens azzal, hogy $p \geq 1 - \sqrt[19]{0{,}5}$, így $1 - \sqrt[19]{0{,}5}$ a keresett legkisebb valószínűség.

**30. feladat** Keressétek meg az összes $\overline{abcd}$ számot, amelyre $\overline{abcd} = a^a + b^b + c^c + d^d$. A számjegyek egyike sem egyenlő 0-val.

*Eredmény.* 3435

*Megoldás.* Mivel $6^6 \geq 10000$, ezért a legnagyobb számjegy legfeljebb 5. A számban kell lennie 5-ös számjegynek, mivel ha mindegyik számjegy 4-es, akkor nem teljesül az egyenlőség, ha pedig legfeljebb 3 darab 4-es van, akkor $3 \cdot 4^4 + 3^3 < 1000$. Mivel $5^5 = 3125$, ezért az 5-ös számjegy legfeljebb egyszer szerepelhet, különben az első számjegy 5-nél nagyobb lenne. Mivel $3000 < 5^5 < 5^5 + 3 \cdot 4^4 < 4000$, ezért az első számjegy a 3.

Az eddigi ismeretek alapján a szám legalább $5^5 + 3^3 + 2 \cdot 1^1 = 3154$, ami nem teljesíti az egyenlőséget. A következő lehetséges szám a 3211, azonban $3211 > 5^5 + 3 \cdot 3^3$, vagyis a szám tartalmaz legalább egy darab 4-es számjegy. Több 4-es nem lehet benne, mivel akkor a második számjegy nagyobb lenne, mint 5. A maradék esetet megvizsgálva az jön ki, hogy az egyetlen megoldás a 3435.

**31. feladat** Hány olyan kétjegyű számokból álló ötös van, amelyben a számjegyek 0-tól 9-ig mind pontosan egyszer szerepelnek és mindegyik kétjegyű szám páros, de egyik sem osztható hárommal? Azokat a számötösöket, amelyek csak a számok sorrendjében különböznek, azonosnak tekintjük.

*Eredmény.* 16

*Megoldás.* Mivel párosak, mind az öt számnak páros számjegyre kell végződnie. Hogy egyik szám se legyen osztható hárommal, a 0-ra és 6-ra végződő számoknak az 1, 5, 7 számok valamelyikével kell kezdődnie, a 2-re és 8-ra végződőknek a 3, 5, 9 számok valamelyikével, a 4-re végződőnek pedig az 1, 3, 7, 9 számok valamelyikével. Ha a 4-re végződő számot 14-nek választjuk, akkor kétféleképpen választhatjuk ki a tízesek helyén álló számjegyet a 0 és 6 esetén (50, 76 vagy 56, 70), és emiatt a 2 és 8 esetén is csak kétféleképpen választhatunk (32, 98 vagy 38, 92), azaz összesen négyféle lehetőség van. Bárhogy választjuk a 4-re végződő szám tízes helyen álló számjegyét, hasonló érveléssel belátható, hogy mindig négy lehetőség lesz, így összesen $4 \cdot 4 = 16$ ilyen számötös van.

**32. feladat** Keressétek meg az összes olyan pozitív egész $n$ számot, amelyekre

$$\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{35} \right\rfloor = 2019.$$

Megjegyzés: Az $\lfloor x \rfloor$ kifejezés az $x$ egész részét jelöli, azaz a legnagyobb egészt, ami nem haladja meg $x$-et.

*Eredmény.* 5439

*Megoldás.* Legyen

$$f(n) = \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{35} \right\rfloor.$$

Nyilván $f$ egy monoton növekvő függvénye $n$-nek. Továbbá, $f(n) - f(n-1) = 1$ ha $n$ az 5 és 7 számok közül pontosan az egyikkel osztható, és $f(n) - f(n-1) = 3$ ha $n$ osztható 35-tel. Minden más esetben $f(n) = f(n-1)$ áll fenn. Mivel

$$f(n) \leq \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{35} \right) n = \frac{13}{35} n,$$

a megoldásra a következő becslést kapjuk

$$n \geq \frac{35}{13} \cdot 2019$$

és mivel $n$ egész, $n \geq 5436$. Tudjuk, hogy $f(5436) = 2018$; a következő 5-tel osztható szám az 5440, a következő 7-tel osztható pedig az 5439. Ez alapján azt kapjuk, hogy $f(5439) = 2019$ és $f(5440) = 2020$, tehát 5439 az egyetlen megoldás.

**33. feladat** Hány olyan $n$ pozitív egész szám létezik, amelyre találhatóak olyan $x, y \leq 1\,000\,000$ (nem feltétlenül különböző) pozitív egész számok, hogy

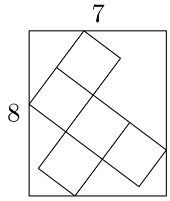
$$n = S(x) = S(y) = S(x + y).$$

Itt $S(a)$ az $a$ számjegyeinek összegét jelöli.

*Eredmény.* 6

*Megoldás.* Mivel bármely pozitív egész $a$ számra $a$ és $S(a)$ kilences maradéka megegyezik, kapjuk hogy $n$, $x$, $y$, és $x + y$ kilences maradéka egyforma. Ebből következik, hogy $x$, $y$ és $n$ mind kilenccel oszthatók. Ha $n = 9m$ egy pozitív egész $m$-re, akkor az $x = y = 10^m - 1$ választás kielégíti a feladatban szereplő feltételt. A legnagyobb számjegyösszeg, amit egy egymillió alatti szám adhat 54, tehát 6 megfelelő $n$ található: 9, 18, 27, 36, 45 és 54.

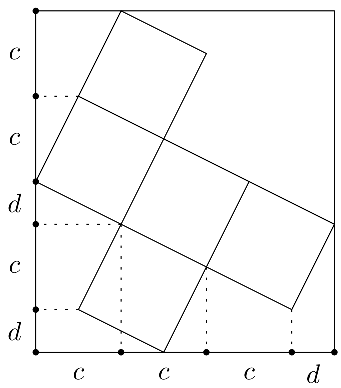
**34. feladat** Az ábrán látható pentominó öt négyzetből áll, ahol egy négyzet oldalhossza $a$. Ezt a pentominót berajzoltunk egy $7 \times 8$-es méretű téglalapba az ábrán látható módon:




Mekkora $a$?

*Eredmény.* $\sqrt{5}$

*Megoldás.* Legyen $c$ és $d$ egy kisnégyzet oldalának rendre rövidebb és hosszabb vetülete a téglalap oldalaira.




Ekkor

$$\begin{aligned} 3c + 2d &= 8, \\ 3c + d &= 7, \end{aligned}$$

tehát $c = 2$ és $d = 1$. A Pitagorasz-tétel segítségével kapjuk, hogy

$$a = \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{5}.$$

**35. feladat** Palinak van egy 3-szor 5-ös csokitáblája. A bal felső kockára egy kis cukrot rak, hogy még édesebb legyen. Így fogyasztja el a csokit: minden lépésben véletlenszerűen választ: vagy a jobb szélső oszlopot eszi meg, vagy a legalsó sort. Mindkét lehetőségnek 1/2 a valószínűsége. Ezeket a lépéseket ismételi, amíg meg nem eszi a teljes csokoládét. Mi a valószínűsége, hogy az utolsó lépésben egyedül a becukrozott kockát eszi meg?

*Eredmény.* 15/64

*Megoldás.* Tegyük fel, hogy a csokitáblának 3 oszlopa és 5 sora van. Akkor fogy el, ha az alsó sort ($S$) háromszor választotta már Pali, vagy a jobb oldali oszlopot ($O$) ötször választotta. Az, hogy utolsó lépésben egyedül a cukrozott kocka marad meg, akkor és csak akkor teljesül, ha az első 6 lépésben pontosan kettő $S$-t és négy $O$-t választott, mindegy milyen sorrendben. (Ekkor a 7. lépésben bármit is választ, a cukros kockát eszi meg.) $\binom{6}{2}$ olyan hat hosszú $S-O$ sorozat létezik, ami pontosan kettő $S$-t és négy $O$-t tartalmaz, és mindegyik valószínűsége $1/2^6$, tehát a keresett valószínűség

$$\frac{\binom{6}{2}}{2^6} = \frac{15}{64}.$$

**36. feladat** Gergő alkotott néhány páronként különböző prímszámot, úgy, hogy a $1,\dots,9$ számjegyek mindegyikét pontosan kétszer használta fel. A prímszámok összege a lehető legkisebb. Mekkora ez az összeg?

*Eredmény.* 477

*Megoldás.* A 2 és 5 kivételével egy prímszám sem végződhet páros számjeggyel vagy öttel, ezért a

$$2, 5, 4, 4, 6, 6, 8, 8$$

számjegyek mindegyike legalább tizes helyiértéken kell hogy szerepeljen. Továbbá, a megmaradó számjegyek

$$2, 5, 1, 1, 3, 3, 7, 7, 9, 9$$

mindegyike legalább egyes helyiértéken szerepel. Ezért az összeg legalább

$$10(2+5+4+4+6+6+8+8)+2+5+1+1+3+3+7+7+9+9 = 477.$$

Ez az összeg meg is valósítható, ha Gergő az alábbi prímszámokat írja fel:

$$2, 5, 29, 53, 41, 47, 61, 67, 83, 89.$$

**37. feladat** Tom és Jerry leírtak két polinomot: $T(x) = x^2 + 2x + 10$ és $J(x) = x^2 - 8x + 25$. Mindketten a kedvenc pozitív egész számukat (rendre $t$ és $j$) behelyettesítették a saját polinomukba, és ugyanazt az eredményt kapták, azaz $T(t) = J(j)$. Keressétek meg $|t - j|$ összes lehetséges értékét.

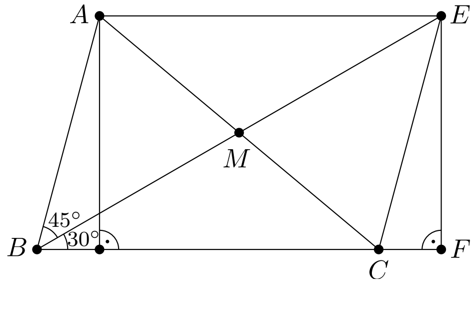
*Eredmény.* 1, 5

*Megoldás.* Az $T(t) - J(j) = 0$ egyenletet szorzattá bontva kapjuk, hogy $(t + j - 3)(t - j + 5) = 0$ ezért vagy $\{t, j\} = \{1, 2\}$ vagy $|t - j| = 5$.

**38. feladat** Az $ABC$ háromszög $A$ csúcshoz tartozó magasságvonala épp olyan hosszú, mint a $B$ csúcsból induló súlyvonala. Tudjuk, hogy az $ABC$ szög 75 fokos. Mennyi az $AB : BC$ hányados értéke?

*Eredmény.* $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

*Megoldás.* Legyen $M$ az $AC$ oldal felezőpontja. Tükrözzük $B$-t az $M$ pontra, az így kapott pont $E$. Legyen $F$ az $E$ merőleges vetülete a $BC$ egyenesre. A feladatbeli első feltételből következik, hogy $\sin(EBC\sphericalangle) = \frac{EF}{BE} = \frac{1}{2}$ ezért $EBC\sphericalangle = 30°$ (a második feltétel miatt nem lehet tompaszög). Tehát $ABM\sphericalangle = ABE\sphericalangle = 75° - 30° = 45°$.




Használjuk a szinusztételt az $ABM$ és $CBM$ háromszögekre

$$\frac{BM}{\sin(BAC\sphericalangle)} = \frac{AM}{\sin 45°} = \frac{AM}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

és

$$\frac{BM}{\sin(BCA\sphericalangle)} = \frac{CM}{\sin 30^\circ} = \frac{AM}{\frac{1}{2}}.$$

Elosztva ezeket az egyenleteket egymással (vegyük észre hogy $AM = CM$) és a szinusztételt használva az $ABC$ háromszögre, végül kapjuk, hogy

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\sin(BCA\sphericalangle)}{\sin(BAC\sphericalangle)} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**39. feladat** A tic-tac-toe játékban két játékos felváltva rak O és X jeleket egy 3x3-as táblára. Az nyer, aki ki tud rakni a saját szimbólumával egy sor, oszlopot vagy átlót. A játék döntetlennel ér véget, ha a tábla betelt, és egyik játékos sem nyert. Hányféle elrendezés lehet a táblán egy döntetlen játék végén? A forgatással vagy tükrözéssel egymásba vihető állapotok is különbözőnek számítanak. Bármelyik játékos kezdhet.

*Eredmény.* 32

*Megoldás.* Négy esetet különböztetünk meg aszerint, hogy milyen jel áll a középső mezőben, és melyik szerepel ötször a táblán. Ha egy iksz áll középen, és öt iksz van a táblán (hívjuk ezt az esetet ”iksz-iksz”-nek), még négy ikszet kell elhelyeznünk. Mivel nem tölthetünk ki egy sort, oszlopot, vagy átlót, így az 1. ábrán látható elrendezést kapjuk. Ez se nem tükör-, se nem forgásszimetrikus, így 8 ilyet kaphatunk.

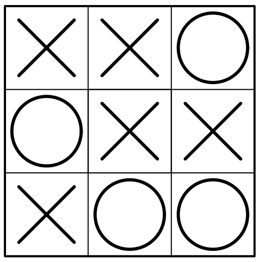


Figure 1

”Iksz-kör” estetén öt kört kell elhelyeznünk, egy iksszel középen. Nem tehetünk kört mind a négy sarokba, hiszen ekkor mindenképpen lenne teljes sor vagy oszlop az ötödik kör lehelyezésével. Azonban minden átlóba kell tennünk kört, különben az iksz nyer. Vagyis pontosan három, vagy pontosan két kört kell tennünk a sarokba. Mindkét esetben lényegében egy lehetőségünk van, és mindkét megoldás tükörszimmetrikus lesz (2. és 3. ábra). Vagyis még $4-4$ megoldást kapunk itt.

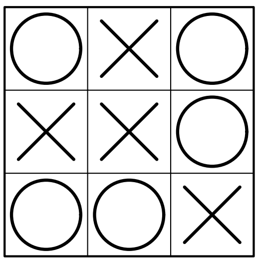


Figure 2

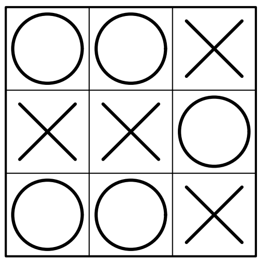


Figure 3

A ”kör-kör” és ”kör-iksz” esetek az előzőeknek felelnek meg a jelek felcserélésével, így összességében $2(8+4+4) = 32$ elrendezést kaphatunk.

**40. feladat** Keressétek meg a legnagyobb olyan $a$ pozitív egész számot, amihez nem létezik pozitív egész $b$ ami teljesítené az alábbi feltételt.

$$\frac{4}{3} < \frac{a}{b} < \frac{25}{18}$$

*Eredmény.* 32

*Megoldás.* Reciprokot véve kapjuk, hogy

$$0.72 < \frac{b}{a} < 0.75.$$

A 0.72 és 0.75 közötti intervallum hossza $0.03 > 1/34$, tehát bármely $a \geq 34$ esetén van megoldása az egyenlőtlenségrendszernek. Ha $a = 33$, van megoldása, $b = 24$ (ekkor $b/a = 0.7272\ldots$). Ha $a = 32$, akkor nincs megoldás, ugyanis $24/32 = 0.75$ és $1/32 > 0.03$.

**41. feladat** Egy 110 km hosszú biciklitúrán Passau és Linz között, Helga és Éva megmászott 3 emelkedőt. Az első pihenő alatt Helga, aki remek fejszámoló, így szólt: "Ha megszorozzuk a távolságot Passautól minden emelkedő csúcsáig, akkor 2261 többszörösét kapjuk." Éva gondolkodott egy kicsit, majd azt mondta "Akkor is 2261 többszörösét kapjuk, ha Linztől számoljuk a távolságokat Passau helyett.". Miután 80 km-t tekertek, tartottak egy második pihenőt, és Helga megjegyezte: "már csak egy emelkedőt kell megmászni, mielőtt Linzbe érünk." Feltéve, hogy minden távolság kilométerben van megadva és egész számok, keressétek meg távolságokat Passautól mindegyik emelkedő csúcsáig.

*Eredmény.* 68, 76, 91

*Megoldás.* Legyen $A$, $B$ és $C$ a három csúcs távolsága Passautól, kilométerben mérve. Tudjuk, hogy $2261 \mid ABC$ és $2261 \mid (110-A)(110-B)(110-C)$. Mivel $2261 = 7 \cdot 323 = 7 \cdot 17 \cdot 19$ és $7 \cdot 17 = 119 > 110$ egyik távolság sem tartalmazhatja 2261 több mint egy prímosztóját is.

Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy $7 \mid A$, $17 \mid B$, and $19 \mid C$. Mivel ugyanezek a feltételek vonatkoznak a $110-A$, $110-B$ és $110-C$ tvolságokra is, két lehetőség van: $7 \mid (110-B)$ vagy $7 \mid (110-C)$, mivel $7 \nmid (110-A)$. Abban az esetben, ha $7 \mid (110-B)$ kapjuk hogy $19 \mid (110-A)$ mert $19 \nmid (110-C)$, és végül $17 \mid (110-C)$. Abban az esetben, ha $7 \mid (110-C)$ akkor hasonló módon látható, hogy $17 \mid (110-A)$ és $19 \mid (110-B)$.

Mivel 7 és 19 legnagyobb közös osztója 1, az egyetlen mód, hogy felírjuk 110-et $a \cdot 7 + b \cdot 19$ alakban (ahol $a$, $b$ nemnegatív egészek) $110 = 13 \cdot 7 + 1 \cdot 19$ (minden felbontás $110 = (13+19k) \cdot 7 + (1-7k) \cdot 19$ alakú, valamilyen $k \in \mathbb{Z}$-re és az együtthatük csak akkor nemnegatívag, ha $k = 0$). Hasonlóan kapjuk az alábbi felbontásokat: $110 = 4 \cdot 17 + 6 \cdot 7$ és $110 = 4 \cdot 19 + 2 \cdot 17$. Ebből megkapjuk az alábbi két megoldást,

$$A = 13 \cdot 7 = 91, \quad B = 4 \cdot 17 = 68, \quad C = 4 \cdot 19 = 76$$

és

$$A = 6 \cdot 7 = 42, \quad B = 2 \cdot 17 = 34, \quad C = 19.$$

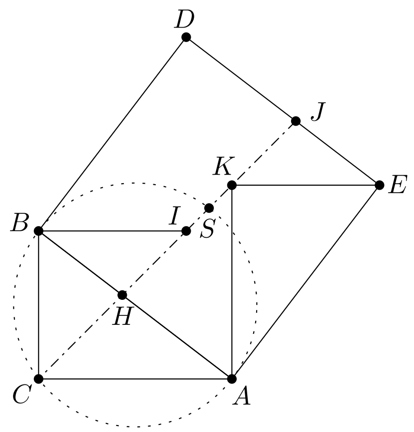
Helga második megjegyzéséből következik, hogy a harmadik csúcs legalább 80 km-re van Passautó. Tehát a keresett távolságok 68, 76, és 91.

**42. feladat** Legyen $ABC$ egy derékszögű háromszög, amelynek a $C$ csúcsnál van derékszöge, továbbá $AC = 4 - \sqrt{3}$ és $BC = \sqrt{3}$. Vegyük fel a $D$ és $E$ pontokat úgy, hogy $ABDE$ egy négyzet, amely nem tartalmazza a $C$ pontot a belsejében, és legyen $J$ egy pont a $DE$ szakaszon úgy, hogy $ACJ\sphericalangle = 45°$. Végül, legyen $K$ egy pont a $CJ$ szakaszon, $AK \parallel BC$. Mekkora a $JKE$ háromszög területe?

*Eredmény.* $3\sqrt{3}/8$

*Megoldás.* Először vegyük észre, hogy az $ADK$ és $ABC$ háromszögek egybevágóak, mivel $AK = AC$, $AE = AB$ és $EAK\sphericalangle = BAC\sphericalangle$. Ezért $EKA\sphericalangle = 90°$. Továbbá, legyen $S$ az $ABCD$ négyzet középpontja. $S$ az $ABC$ háromszög köréírt körén fekszik, mert $ASB\sphericalangle$ és $ACB\sphericalangle$ derékszögek. Mivel $AS = BS$, az $ACS\sphericalangle$ és $BCS\sphericalangle$ kerületi szögek egyenlőek, tehát 45 fokosak.

Ezért $S$ a $CJ$ szögfelezőn fekszik. Középpontosan tükrözzük a $JKE$ háromszöget az $S$ pontra, ekkor $E$ a $B$ pontba megy át, $J$ a $H$ pontba, amely az $AB$ és $CJ$ szakaszok metszéspontja. $K$ az $I$ pontba megy át, amely a $CJ$ szakaszon fekszik, és $IBC\sphericalangle = 90°$.




Tehát $IBC$ egy egyenlőszárú derékszögű háromszög, amelynek a $B$ csúcsnál van derékszöge. így a területe $(\sqrt{3})^2/2 = 3/2$. A továbbiakban jelölje $[\dots]$ egy háromszög területét, ekkor

$$\frac{[IBC]}{[IBH]} = \frac{IC}{IH} = \frac{IH+HC}{IH} = 1 + \frac{HC}{IH}.$$

Továbbá, az $ACH$ és $BIH$ háromszögek hasonlóak, a hasonlóság együtthatója

$$\frac{HC}{IH} = \frac{AC}{IB} = \frac{AC}{BC}.$$

Végül kapjuk, hogy

$$[JKE] = [IBH] = [IBC] \cdot \frac{BC}{AC + BC} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

**43. feladat** Két rab áll két doboz előtt. Tudják, hogy az egyik dobozban két fehér és egy fekete golyó van, a másik dobozban pedig egy fehér és két fekete golyó, de nem tudják melyik doboz melyik. Mindegyik rabnak választania kell egy dobozt és véletlenszerűen húznia egy golyót belőle (visszatevés nélkül). Ha valaki egy fehér golyót húz, szabadon engedik, de ha feketét, akkor kivégzik. Ha a második rab megfigyeli az első választását és ez alapján logikusan dönt, mi a túlélésének esélye (még mielőtt az első golyót kihúzzák)? Feltesszük, hogy az első rab véletlenszerűen választ dobozt.

*Eredmény.* 5/9

*Megoldás.* Jelöljük $c$-vel azt a színt, amit az első rab kihúzott, és $o$-val a másik színt. Annak a valószinűsége hogy a $c, c, o$-t tartalmazó dobozból húzta ki, 2/3, annak a valószinűsége, hogy a $c, o, o$ dobozból, 1/3.

Ha a második rab ugyanazt a dobozt választja mint az első, akkor

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3},$$

valószínűséggel húz $c$ színűt, tehát

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

valószínűséggel húz $o$ színűt. Ha azonban a második rab a másik dobozt választja, akkor

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9},$$

valószínűséggel húz $c$ színűt és

$$1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

valószínűséggel húz $o$ színűt.

Ha $c$ fehér, akkor a második rab megmenekül ha ő is $c$-t húz. Mivel $\frac{4}{9} > \frac{1}{3}$, hasznosabb számára a másik dobozt választani, és $\frac{4}{9}$ eséllyel megmenekül. Ha $c$ fekete, a rab akkor éli túl, ha $o$-t húz. Mivel $\frac{2}{3} > \frac{5}{9}$, jobb számára, ha ugyanazt a dobozt választja, mint amit az első rab választott. Ekkor $\frac{2}{3}$ eséllyel menekül meg. Könnyen látható, hogy $c$ $\frac{1}{2}$ eséllyel fehér és $\frac{1}{2}$ fekete, tehát a második rab megmenekülésének valószínűsége

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{9}.$$

**44. feladat** Mi a legkisebb olyan pozitív egész $n$, amelyre az $[1, 2019]$ intervallumból bármely $n$ (nem feltétlenül különböző) valós számot kiválasztva, lesz közte 3 szám amelyek egy nem elfajuló háromszög oldalhosszainak felelnek meg?

*Eredmény.* 18

*Megoldás.* Ha $n < 18$, vegyük a Fibonacci sorozat első $n$ tagját. $a_1 = a_2 = 1$ és $a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$, így az első 18 tag $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597$. Ebből bármely számhármast választva a legnagyobb tag nagyobb vagy egyenlő, mint a két kisebb tag összege, tehát nem alkothajuk belőlünk nem elfajuló háromszög oldalait.

Ha $n = 18$, legyenek $x_1 \leq \cdots \leq x_{18}$ a kiválasztott számok. Ha semelyik három nem alkothat nem elfajuló háromszöget, kapjuk hogy $x_1, x_2 \geq 1$, $x_3 \geq x_1 + x_2 \geq 2$, $x_4 \geq x_3 + x_2 \geq 2 + 1 = 3, \ldots$ azaz minden lépésben a Fibonacci sorozat adott tagja az alsó becslés. $x_{18} \geq 987 + 1597 > 2019$, ami nem megengedett. A keresett szám tehát $n = 18$.

**45. feladat** Jelölje $\sigma(k)$ egy pozitív egész $k$ összes (pozitív) osztóinak számát. Keressétek meg a legkisebb olyan pozitív egész $n$-et, amelyre $\sigma(n)$ és $\sigma(n^3)$ legnagyobb közös osztója nem kettőhatvány. (Az 1 is kettőhatványnak számít.)

*Eredmény.* $432 = 2^4 \cdot 3^3$

*Megoldás.* Ha az $n$ prímfelbontása

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t}$$

akkor az osztóinak száma

$$\sigma(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_t + 1).$$

Mivel a legnagyobb közös osztó nem lehet kettőhatvány, létezik egy $q$ páratlan prím, ami osztja $\sigma(n)$-et és $\sigma(n^3)$-t. Mivel

$$\sigma(n^3) = (3\alpha_1 + 1)(3\alpha_2 + 1) \cdots (3\alpha_t + 1),$$

ez a szám nem lehet 3-mal osztható. Azaz $q$ legkisebb lehetséges értéke 5. Továbbá vegyük észre, hogy $q$ nem oszthatja egyszerre $\alpha_i + 1$ $3\alpha_i + 1$, különben osztaná $3(\alpha_i + 1) - (3\alpha_i + 1) = 2$-t is. Tehát van két kölünböző $i, j \in \{1, \dots, t\}$ hogy $q \mid \alpha_i + 1$ és $q \mid 3\alpha_j + 1$. Mivel a legkisebb számot keressük, feltehetjük, hogy $t = 2$, $i = 1$, and $j = 2$.

Ha $q = 5$, akkor $\alpha_1$ és $\alpha_2$ lehetséges legkisebb értékei $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 3$, és a legkisebb prímeket választva hozzá $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, így azt kapjuk, hogy $n = 2^4 \cdot 3^3 = 432$.

Ha $q \geq 7$, akkor $\alpha_1 \geq 6$ és $\alpha_2 \geq 2$, emiatt

$$n \geq 2^6 \cdot 3^2 = 576 > 432,$$

tehát 432 a legkisebb, a feltételeknek megfelelő $n$.

**46. feladat** Legyen $ABC$ egy derékszögű háromszög, $ACB\sphericalangle = 90°$, $AC = 15$, $BC = 20$. Legyen $D$ az a pont az $AB$ egyenesen, amelyre $CD \perp AB$. Az $ACD$ háromszög beírt köre (jelöljük $t$-vel) a $CD$ oldalt a $T$ pontban érinti. Egy másik, $c$ kör szintén a $T$ pontban érinti a $CD$ oldalt, és érinti a $BC$ szakaszt. Jelöljük a $c$ kör és az $AB$ egyenes két metszéspontját $X$-szel és $Y$-nal. Mekkora az $XY$ távolság?

*Eredmény.* $3\sqrt{5}$

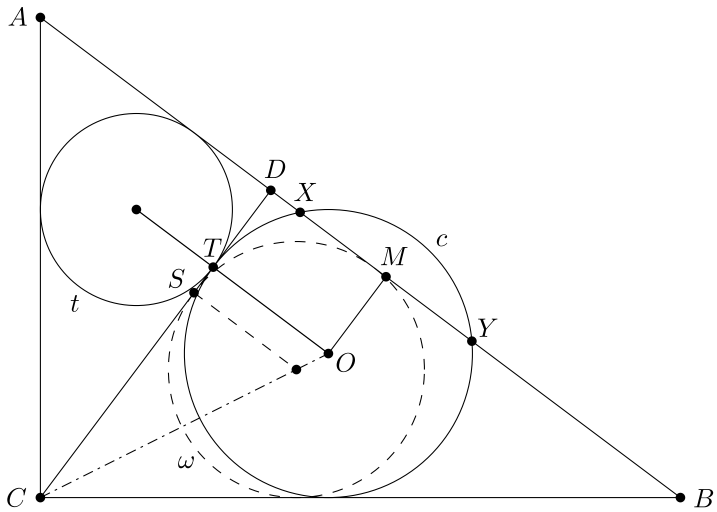
*Megoldás.*

A befogó tételt és a magasságtételt használva használva

$$AD = \frac{AC^2}{AB} = 9, \quad BD = \frac{BC^2}{AB} = 16, \quad CD = \sqrt{AD \cdot BD} = 12.$$

A $t$ kör sugara (ami egyenlő $DT$-vel) kiszámítható úgy, hogy leosztjuk a háromszög területét a kerületének felével. Így kapjuk, hogy $DT = 54/(36/2) = 3$. Legyen a $BCD$ háromszög beírt köre $\omega$, és ez a $CD$ szakaszt az $S$ pontban érinti. Ennek a körnek a sugara $DS = 4$. Végezzünk el $C$ középponttal egy $CT/CS = 9/8$ arányú nagyítást, ez az $\omega$ kört a $c$ körbe viszi. Tehát a $c$ kör sugara $4 \cdot 9/8 = 9/2$. Legyen $M$ az $XY$ szakasz középpontja és $O$ a $c$ kör középpontja. Tudjuk, hogy $XO = 9/2$ és $OM = DT = 3$. Tehát, a Pitagorasz-tétel felhasználva kapjuk, hogy

$$XY = 2 \cdot XM = 2\sqrt{\frac{9^2}{2^2} - 3^2} = 6\sqrt{\frac{9}{4} - 1} = 3\sqrt{5}.$$




**47. feladat** Egy $6 \times 7$-es sakktábla minden mezője fehér, zöld, piros vagy kék színre van színezve. Azt mondjuk hogy egy ilyen színezés ,,vonzó", ha bármely $2 \times 2$-es résztábla csupa különböző színeket tartalmaz. Hányféle vonzó színezés létezik?

*Eredmény.* 1128

*Megoldás.* Első megfigyelés: két szomszédos mező színe mindig különböző, ezért ha egy oszlopban több mint két szín előfordul, akkor lesz három szomszédos, különböző színű mező abban a sorban.

Második megfigyelés: egy ilyen ,,színes" hármas egyértelműen meghatározza a hozzájuk tartozó három oszlop színezését. Ugyanis egy $1-2-3$ szinű hármas esetén a függőlegesen szomszédos hármas színezése csak $3-4-1$ lehet. Ez a két színezés váltakozva megtölti a teljes oszlopot, így ezek az oszlopok csak két színt tartalmaznak. Ugyanez mondható el a sorok és oszlopok szerepét felcserélve. Tehát nem használhatunk egyszerre több mint két színt valamely sorban és több mint két színt valamely oszlopban.

Tegyök fel, hogy a táblázatnak 6 sora és 7 oszlopa van. Számoljuk ki a szinezések számát, ha csak 2 szin van minden sorban: kiválasztjuk a 2 színt az első sorban (ez meghatározza a színpárt az összes többi sorban). Minden sorban eldönthetjük, melyik színnel keztünk. Ez $\binom{4}{2} \cdot 2^6 = 6 \cdot 2^6$ színezést ad. Hasonló módon, ha minden oszlopban két szín van csak, az $6 \cdot 2^7$ színezést ad. Végül le kell vonnunk azokat az eseteket amiket kétszer számoltunk. Az ilyen színezéseket a bal felső $2 \times 2$ rész már meghatározza, ezért $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ ilyen van.

Az eredmény tehát $6 \cdot 2^6 + 6 \cdot 2^7 - 24 = 1128$.

**48. feladat** Száz gyerek áll egy sorban. Az első gyereknek van 4 gramm csokija, a másodiknak 8 gramm, és így tovább, végül a századik gyereknek van 400 gramm csokija. Az első gyerek a másodiknak adja a csokija harmadát. (Tehát most már a második gyereknek $\frac{28}{3}$ gramm csokija van). A második gyerek odaadja a csokija harmadát a harmadik gyereknek, és így tovább, végül a 99. gyerek a századiknak adja a csokija harmadát. A folyamat végén hány gramm csokija lesz a 100. gyereknek?

*Eredmény.* $597 + 3^{-99}$

*Megoldás.* Az alábbiakban minden tömeg grammban van megadva. Az első lépés után a második gyereknél $8 + 4/3$ gramm van. A második lépésben a harmadik gyereknek adja a csokija harmadát, tehát ekkor a harmadik gyereknél $12 + 8/3 + 4/3^2$ gramm van. A harmadik lépés után a negyedik gyereknél $16 + 12/3 + 8/3^2 + 4/3^3$ van. Megfigyelhetjük, hogy a végén a századik gyereknél

$$4\left(100 + \frac{99}{3^1} + \frac{98}{3^2} + \frac{97}{3^3} + \cdots + \frac{2}{3^{98}} + \frac{1}{3^{99}}\right)$$

gramm csoki van. Legyen

$$S = 100 + \frac{99}{3^1} + \frac{98}{3^2} + \frac{97}{3^3} + \cdots + \frac{2}{3^{98}} + \frac{1}{3^{99}}.$$

Ekkor tudjuk, hogy

$$\begin{aligned} S = \quad & 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{98}} + \frac{1}{3^{99}} + \\ & + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{98}} + \\ & \vdots \\ & + 1 + \frac{1}{3} + \\ & + 1. \end{aligned}$$

Használva a képletet a mértani szorozatok összegére

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} = \frac{1 - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right),$$

kapjuk hogy

$$\begin{aligned} S &= \frac{3}{2}\left(100 - \left(\frac{1}{3^{100}} + \frac{1}{3^{99}} + \cdots + \frac{1}{3}\right)\right) \\ &= \frac{3}{2}\left(100 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3^{99}} + \frac{1}{3^{98}} + \cdots + 1\right)\right) \\ &= \frac{3}{2}\left(100 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{100}}\right)\right). \end{aligned}$$

Végül,

$$4S = 4 \cdot \frac{3}{2}\left(100 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{100}}\right)\right) = 600 - 3 + \frac{1}{3^{99}} = 597 + 3^{-99}.$$

**49. feladat** Keressétek meg az összes olyan $n \geq 3$ egész számot, amelyre

$$\frac{(n-1)^{n-1} - n^2 + 2019 \cdot (n-1)}{(n-2)^2}$$

is egész szám.

*Eredmény.* 3, 4, 5, 6, 8, 14

*Megoldás.* Szeretnénk, hogy $(n-2)^2 \mid (n-1)^{n-1} - n^2 + 2019 \cdot (n-1)$ teljesüljön. Ezt nem befolyásolja, ha hozzáadunk $(n-2)^2$-et a jobb oldalhoz, és így megszabadulhatunk a $n^2$ tagtól, mivel $n^2 - 4n + 4 - n^2 = -4(n-1)$. Az alábbi ekvivalens feltételt kapjuk

$$(n-2)^2 \mid (n-1)^{n-1} + 2015 \cdot (n-1).$$

Mivel $n-1$ és $n-2$ relatív prímek, leoszhatjuk a jobb oldalt $n-1$-gyel. Helyettesítsük be, hogy $t = n-2$. Ekkor $t^2 \mid (t+1)^t + 2015$. Végül, binomiális kibontást használva

$$t^2 \mid t^t + \binom{t}{t-1} t^{t-1} + \cdots + \binom{t}{2} t^2 + \binom{t}{1} t + 1 + 2015,$$

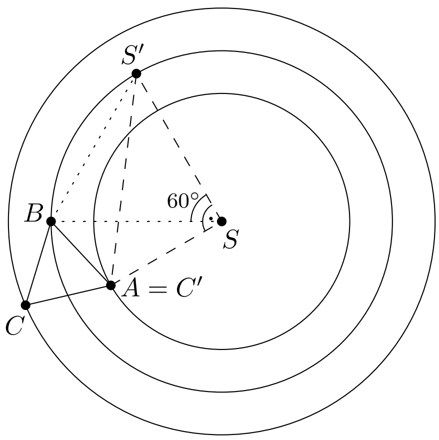
csupán arrra van szükségünk, hogy $t^2 \mid 2016$ legyen. 2016 prímfelbontása $2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, ezért 1, 2, 3, 4, 6, 12 lehetnek $t$ lehetséges (és valóban megfelelő) értékei. Visszahelyettesítve hogy $n = t+2$ a feladat megoldásai 3, 4, 5, 6, 8, 14.

**50. feladat** Legyen $ABC$ egy szabályos háromszög. Vegyünk három koncentrikus kört, amelyeknek a sugarai rendre 3, 4 és 5. Az $ABC$ háromszög csúcsai rendre ezen a három körön fekszenek. Találjátok meg a háromszög összes lehetséges oldalhosszát.

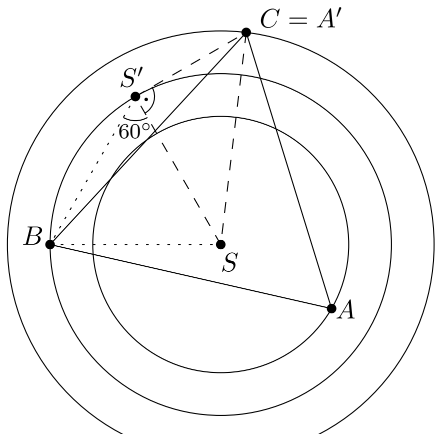
*Eredmény.* $\sqrt{25 - 12\sqrt{3}}$, $\sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$

*Megoldás.* Legyen $A$ a 3 sugarú körön, $B$ a 4 sugarún, és $C$ az 5 sugarún. Legyen $S$ a körök középpontja. Két esetet kell megvizsgálni.

Először tegyük fel, hogy $S$ az $ABC$ háromszögön kívül esik. A $B$ pont körül $60°$ fokkal elforgatva a $C$ és $S$ pontokat a $C' = A$ és $S'$ pontokat kapjuk. Az $SBS'$ háromszög szabályos és oldalhossza 4, és $S'C' = SC = 5$. Az $SS'C'$ háromszög oldalhosszai 3, 4, 5, tehát $S'SC'\sphericalangle = 90°$. Tehát $BSA\sphericalangle = S'SC'\sphericalangle - S'SB\sphericalangle = 30°$. A koszinusz tételt használva a $BSA$ háromszögben kapjuk, hogy $AB = \sqrt{25 - 12\sqrt{3}}$.




Ha $S$ az $ABC$ háromszög belsejébe esik, forgassuk el az $A$ és $S$ pontokat $60°$ fokkal $B$ körül, így az $A' = C$ és $S'$ pontokat kapjuk. Hasonlóan, az $SS'A'$ hármoszög derkészögű és $SS'A'\sphericalangle = 90°$. Tehát $BSA\sphericalangle = BS'A'\sphericalangle = SS'A\sphericalangle' + SS'B\sphericalangle = 150°$. A koszinusz tételt a $BSA$ háromszögben használva megkapjuk a második megoldsát, $AB = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$.



**51. feladat** Hét ember ül egyenlő távolságra egymástól egy kör alakú asztal körül, amelyre hét nyíl van felfestve, úgy, hogy mindenki helyétől egy nyíl indul ki, és egy nyíl mutat oda. (Egy nyíl kezdő és végpontja nem kell, hogy különböző legyen.) Minden percben az emberek átülnek oda, ahova a jelenlegi helyükről induló nyíl mutat, és ezután az asztalt elforgatják 1 ülésnyivel, az óramutató járásával megegyezően. Legfeljebb hány perc telhet el addig, míg az összes ember visszakerül az eredeti helyére?

*Eredmény.* 84

*Megoldás.* Vegyük észre hogy minden 7. lépés után az emberek helyet cseréltek ugyan, de az asztal visszatért az eredeti pozíciójába. Tehát ha minden 7. percben nézünk rá, az emberek egy normál permutáció szerint cserélnek helyet. A minimális szám ahányszor egy permutációt alkalmaznunk kell egy hételemű halmazon, hogy minden elem visszatérjen a helyére (avagy a permutáció *rendje* ) legfeljebb 12. Ez elérhető az alábbi permutációval:

$$1 \to 2 \to 3 \to 1; \quad 4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 4.$$

Általában egy permutáció rendje a benne lévő ciklusok hosszának legkisebb közös többszöröse, könnyen látható, hogy valóban 12 a maximum. Ezzel egy felső becslést kaptunk, legfeljebb $7 \cdot 12 = 84$ perc után minden ember visszatér az eredeti helyére.

Ha úgy rajzolták a nyilakat, hogy eredetileg csak az 1. és a 4. ember cserél helyet, akkor 7 perc után az emberek így cserélődnek meg:

$$1 \to 2 \to 3 \to 1; \quad 4 \to 7 \to 6 \to 5 \to 4,$$

Tehát ha csak minden 7. percet nézzük, a procedúra 84 percig tart. Meg kell még mutatnunk, hogy az emberek nem térhetnek vissza az eredeti helyükre a közbülső percekben. Minden 7. percben az $1, 2, 3$ ülőhelyeken az eredeti emberek ülnek (egymás között esetleg felcserélve), de a közbülső 6 percben e három ember legalább egyike nem az $1, 2, 3$ helyeken ül.

**52. feladat** Legyen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ egy pozitív valós számokból álló sorozat. Az $a_2$ tagtól kezdve minden tag a két szomszédja számtani közepének és mértani közepének az összegének a fele. Adjátok meg $a_{333}$-at, ha tudjuk, hogy $a_1 = \frac{2}{7}$ és $a_{11} = \frac{7}{2}$.

Megjegyzés: Az $x$ és $y$ pozitív valós számok mértani közepe $\sqrt{xy}$.

*Eredmény.* 2016

*Megoldás.* A sorozatra vonatkozó feltétel a következőképpen írható fel:

$$a_k = \frac{\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2} + \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a_{k-1}} + \sqrt{a_{k+1}}\right)^2}{4}$$

minden $k \geq 2$-ra. Mivel a sorozat elemei pozitívak, így gyökvonás után:

$$\sqrt{a_k} = \frac{\sqrt{a_{k-1}} + \sqrt{a_{k+1}}}{2}.$$

Ez pont azt jelenti, hogy $b_k = \sqrt{a_k}$ jelöléssel a $b_1, b_2, \ldots$ számok számtani sorozatot alkotnak, legyen $d$ ezen sorozat differenciája. Tudjuk, hogy $b_1 = \sqrt{2/7}$, valamint, hogy $b_{11} = \sqrt{7/2}$, tehát

$$d = \frac{\sqrt{7/2} - \sqrt{2/7}}{10} = \frac{1}{2\sqrt{14}}.$$

Végül a számtani sorozat átalános tagjának képletéből:

$$b_{333} = b_1 + 332 \cdot d = \sqrt{\frac{2}{7}} + \frac{332}{2\sqrt{14}} = \frac{4 + 332}{2\sqrt{14}} = 12\sqrt{14}.$$

Tehát $a_{333} = b_{333}^2 = 2016$.

**53. feladat** Ádám rajzolt egy téglalapot, amelynek a kerülete 444, és az oldalai $a$ és $b$ pozitív egészek, ahol $a > b$. Megpróbálta lefedni $a - b$ oldalhosszúságú négyzetekkel. Az első négyzetet a bal felső sarokba rakta, és így folytatta a lefedést, azaz egy négyzetrácsot követett, aminek vonalai párhuzamosak a téglalap oldalaival, és origója a téglalap bal felső csúcsa. Egy idő után (legalább egy négyzet lerakása után) abba kellett hagynia, mert már nem tudott úgy négyzetet lerakni, hogy az teljes egészében a téglalapban feküdjön. Ekkor a téglalap lefedetlen területe 1296 volt. Az összes, a feladat feltételeinek megfelelő téglalapot tekintve mi az összege lefedésre használt kisnégyzetek lehetséges oldalhosszainak?

*Eredmény.* 166

*Megoldás.* Tudjuk, hogy $a \equiv b \equiv r \pmod{a-b}$ ahol $0 \leq r \leq a-b-1$. Tehát a téglalap lefedetlen része $ra + rb - r^2 = -r^2 + 222r = 1296$ ami ekvivalens azzal, hogy $(r-6)(r-216) = 0$. Nyilván $a > r$ és $b > r$ ezért $r = 6$.

Ha levágjuk a lefedetlen területet és $x = a-r$, $y = b-r$, akkor egy $x \times y$-os téglalapot kapunk, lefedve $(x-y) \times (x-y)$ mértű négyzetekkel (mivel $x - y = a - b$) és $x + y = a + b - 2r = 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Láthat, hogy $x - y$ osztója kell legyen $x$-nek és $y$-nak, tehát $x + y$-nak is. Vegyük 210 egyik osztóját $d \mid 210$ és legyen $x - y = d$. Felhasználva, hogy $x + y = 210$ megkaphatjuk $x$ és $y$-t:

$$x = \frac{210 + d}{2}, \quad y = \frac{210 - d}{2}.$$

Mivel a megoldások pozitív egész számok (létezik legalább egy kisnégyzet, aminek az oldala $a - b = x - y$, tehát pozitív) és $x - y > 6$ (mivel már nem tudunk többet lefedni), láthatjuk, hogy $d$ akkor és csak akkor megfelelő, ha páros osztója 210-nek és $6 < d < 210$. Tehát $d$ az alábbi számok egyike: 10, 14, 30, 42, 70 és ezeknek az összege 166.

**54. feladat** Legyen $P$ egy pont az $ABC$ háromszög belsejében. Jelölje $A'$, $B'$, $C'$ rendre az $AP$, $BP$, $CP$ egyenesek metszéspontját $BC$, $CA$ és $AB$-vel. Tegyük fel, hogy

$$A'P = B'P = C'P = 3$$

és

$$AP + BP + CP = 25.$$

Mennyi az $AP \cdot BP \cdot CP$ szorzat?

*Eredmény.* 279

*Megoldás.* Jelölje egy $XYZ$ háromszög terültetét $[XYZ]$.

Legyen

$$a = AP, \quad b = BP, \quad c = CP.$$

Ekkor

$$\frac{[PBC]}{[ABC]} = \frac{PA'}{AA'} = \frac{3}{a+3}$$

valamint hasonlóan

$$\frac{[PCA]}{[ABC]} = \frac{3}{b+3}, \quad \frac{[PAB]}{[ABC]} = \frac{3}{c+3}.$$

Továbbá $[PBC] + [PCA] + [PAB] = [ABC]$, vagyis

$$\frac{3}{a+3} + \frac{3}{b+3} + \frac{3}{c+3} = 1.$$

Ebből beszorzással, majd átrendezéssel kapjuk, hogy

$$54 + 9(a + b + c) = abc.$$

Innen $a + b + c = 25$ helyettesítéssel adódik a megoldás.

**55. feladat** Egy $k$ körön kijelöltük az $A_1, \ldots, A_{14}$ pontokat az óramutató járásával ellentétetesen. Ezek a pontok által megadott húrok közül semelyik három nem metszi egymást a kör belsejében. Krisztina berajzolta az összes összekötő szakaszt a pontok között, de így az ábra túl zsúfolt lett, ezért úgy döntött kitörli az $A_1A_3A_5A_7A_9A_{11}A_{13}$ és az $A_2A_4A_6A_8A_{10}A_{12}A_{14}$ hétszögek összes oldalát és átlóját. A megmaradt szakaszok hány tartományra vágják fel $k$ belsejét?

*Eredmény.* 295

*Megoldás.* Adjuk hozzá a szakaszokat az ábrához egyesével. Könnyen látható, hogy amikor egy szakaszt hozzáadunk, a tartományok száma eggyel plusz annyival nő, ahány korábbi szakaszt elmetsz az új szakasz. Tehát összesen a tartománok száma

$$1 + \text{szakaszok száma} + \text{metszéspontok száma}.$$

Hívjuk az $A_1, A_3, \ldots, A_13$ pontokat *páratlannak* és a többit *párosnak.* A berajzolt szakaszok mindig egy páratlan és páros pontot kötnek össze, tehát $7 \cdot 7 = 49$ szakasz van.

Hogy meghatározzuk a metszéspontok számát, figyeljuk meg, hogy a két metsző szakasz végpontjai úgy fekszenek a körön, hogy a két páratlan pont szomszédos, és a két páros szomszédos. Minden ilyen négyes pontosan egy metszéspontot határoz meg, ezért a jó pontnégyesek számát keressük. A pontok az óramutató járásával ellentétetesen vannak számozva. Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy $A_1$ az első páratlan pont a négyesben, ezután a pontokat a $(A_2, A_3), (A_4, A_5), \ldots, (A_{14}, A_1)$ párokba osztva azt látjuk, hogy a másik három pontot különböző párokból kell kiválasztanunk. Másrészt, bárhogy választunk ki 3 párt, az pontosan egy jó számnégyest ad: az első párból a páratlant választjuk, a másik kettőből a párosat. Mivel 7 féleképpen választhatjuk meg az első páratlan pontot, összesen

$$7 \cdot \binom{7}{3} = 245$$

metszéspont van. Ez alapján a kört a húrok $1 + 49 + 245 = 295$ tartományra bontják fel.

**56. feladat** Hány rendezett pozitív egész számokból álló $(a, b, c, d)$ négyesre igaz, hogy:

$$a + b + c + d = 505 \quad \text{és} \quad ab = cd\ ?$$

*Eredmény.* 800

*Megoldás.* Szorozzuk meg az első egyenletet $a$-val és használjuk a másodikat, hogy megkapjuk az $(a + c)(a + d) = 505a = 5 \cdot 101 \cdot a$ kifejezést. Vegyük észre, hogy mind 5, mind 101 prímszám. Mivel mindkét zárójelben álló kifejezés nagyobb mint $a$, az egyiknek egyenlőnek kell lennie $5k$-val, és a másiknak $101l$-el, továbbá $kl = a$. Feltéve, hogy $a + c = 5k$ és $a + d = 101l$ igaz egy adott $k$-ra, ahol $l$-re igaz, hogy $kl = a$, kiszámolható, hogy $c = k(5 - l)$, $d = l(101 - k)$ és $b = 505 - a - d - c = (101 - k)(5 - l)$. Egyszerűen belátható, hogy a

$$(a, b, c, d) = (kl, (101 - k)(5 - l), k(5 - l), l(101 - k))$$

négyes kielégíti a $ab = cd$ feltételt és emiatt helyes megoldása a rendszernek bármilyen $l = 1, 2, 3, 4$ és $k = 1, 2, \ldots, 100$ értékre. Mind a 400 megoldás különböző, mivel ha két páros $(k_1, l_1)$ és $(k_2, l_2)$ ugyanazt a fent említett megoldást adja, akkor belátható, hogy a $k_1 l_1 = k_2 l_2$ és $(5 - l_1)k_1 = (5 - l_2)k_2$ kifejezésekből következik, hogy $k_1 = k_2$ illetve $l_1 = l_2$. Hasonlóan, az $a + c = 101l$ és $a + d = 5k$ esetre megkapunk 400 páronként különböző megoldást

$$(a, b, c, d) = (kl, (101 - k)(5 - l), l(101 - k), k(5 - l))$$

adott $l = 1, 2, 3, 4$ és $k = 1, 2, \ldots, 100$ esetre. Egyik megoldás sem egyezik meg egyik első esetbeli megoldással, mivel $5k = a + c = 101l$ nem áll fent egy adott $k$, $l$ értékre sem az általunk vizsgált tartományban. Tehát $400 + 400 = 800$ megoldás lesz.