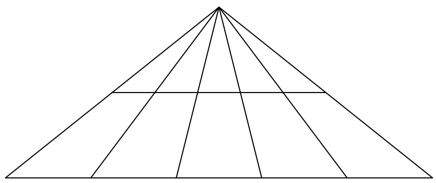
Problema 1. În urmă cu trei ani vârsta mamei lui Punto era de trei ori vârsta lui Punto. În acest moment vârsta tatălui lui Punto este de trei ori vârsta lui Punto. Care este diferența în ani a vârstelor părinților lui Punto?

Rezultat. 6

Soluție. Dacă x este vârsta actuală a lui Punto, atunci vârsta actuală a maei sale este $3(x-3)+3$, adică $3x-6$. Vârsta actuală a tatălui lui Punto este $3x$. Diferența vârstelor părinților este 6 ani.

Problema 2. Câte triunghiuri sunt în figură?

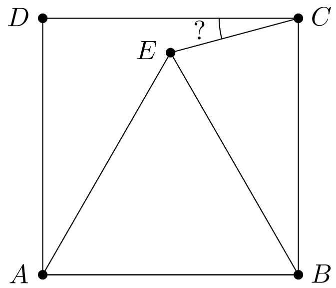


Rezultat. 30

Soluție. Toate triunghiurile au vârfurile în cel al figurii. Mai mult, o latură a triunghiurilor este pe una dintre cele două paralele orizontale.Din acest motiv, fiecare triunghi este determinat prin alegerea unui segment de pe cele două paralele determinat de două puncte de pe paralela pe care se află. Cum sunt șase puncte pe fiecare paralelă, numărul triunghiurilor este

$$2 \cdot (5+4+3+2+1) = 30.$$

Problema 3. Se consideră punctul E în interiorul unui pătrat $ABCD$ astfel încât triunghiul ABE este echilateral. Care este măsura în grade a unghiului DCE ?



Rezultat. 15

Soluție. Cum intr-un triunghi echilateral fiecare unghi are măsura de $60°$, obținem că $\angle CBE = 90° - \angle EBA = 30°$. Deoarece $EB = AB = BC$, triunghiul BCE este isoscel și astfel

$$\angle ECB = \angle BEC = \tfrac{1}{2}(180° - \angle CBE) = 75°.$$

În concluzie $\angle DCE = 90° - \angle ECB = 15°$.

Problema 4. Micuța Sandi are într-un cufăr o comoară formată din monede inscripționate: o monedă inscripționată cu 1, două monede inscripționate cu 2,.., optsprezece monede inscripționate cu 18, și nouăsprezece monede inscripționate cu 19. Sandi scoate din cufăr monedă după monedă fără a putea vedea ce este scris pe ele. Care este numărul minim de monede pe care trebuie să le scoată din cufăr pentru a fi sigură că a scos zece monede identic inscripționate?

Rezultat. 136

Soluție. Pentru siguranță, Sandi ar trebui să scoată toate monedele cu numere mai mici ca 10 și câte nouă monede din fiecare tip inscripționat cu numere de la 10 la 19. În total, $(1+2+\cdots+9)+9\cdot 10 = 135$.

Când Sandi va scoate și moneda 136, cel puțin 91 de monede sunt inscripționate cu numere mai mari decât 9. Din principiul cutiei, din unul din cele zece tipuri de monede inscripționate cu numere de la 10 la 19 a cos zece monede.De aceea, numărul minim este 136.

Problema 5. Domnul Sugar a cumpărat o cutie de bomboane pentru a da copiilor în ziua de Halloween. El a mâncat jumătate din bomboane până ce primul copil a venit la ușa sa. După ce copilul a fost servit, el a mâncat jumătate din ce a rămas până când a venit al doilea copil, și apoi, jumătate din ce a rămas până a venit al treilea copil care a fost servit cu bomboanele rămase. Dacă fiecare copil a primit exact câte trei bomboane, câte bomboane erau inițial în cutie?

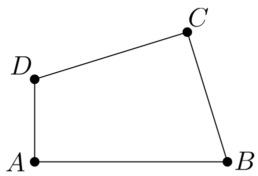
Rezultat. 42

Soluție. Dacă n este numărul inițial de bomboane, putem scrie distribuția bomboanelor folosind ecuația

$$\left(\left(\frac{n}{2}-3\right)\cdot\frac{1}{2}-3\right)\cdot\frac{1}{2}-3=0.$$

Rezolvând-o pentru n obținem $n = 42$.

Problema 6. Fie $ABCD$ un patrulater cu unghiurile A și C drepte. Cunoscând lungimile $BC = 6$, $CD = 8$, și $DA = 2$, determinați aria patrulaterului $ABCD$.



Rezultat. $24 + 4\sqrt{6}$

Soluție. Din teorema lui Pitagora, obținem $BD = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ și apoi

$$AB = \sqrt{BD^2 - AD^2} = \sqrt{10^2 - 2^2} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}.$$

Aria patrulaterului $ABCD$ este

$$\frac{1}{2}(6\cdot 8 + 2\cdot 4\sqrt{6}) = 24 + 4\sqrt{6}.$$

Problema 7. O imprimantă de birou poate printa fie pe o față fie față-verso. Printarea unei coli A4 durează trei secunde pe o față, iar cea față-verso durează nouă secunde. Kate vrea să printeze față-verso o lucrare de cercetare de optsprezece pagini. Ea poate alege să printeze toate paginile față-verso sau să printeze mai întâi paginile impare, să reintroducă colile în imprimantă și să printeze apoi paginile pare. Însă, ea realizează că în ambele situații timpul necesar operațiunilor făcute este același. Cât secunde sunt necesare pentru a reintroduce colile în imprimantă?

Rezultat. 27

Soluție. Observăm că Kate vrea să printeze nouă coli. Când printează față-verso, timpul necesar este $9 \cdot 9 = 81$ secunde. Când printează doar față, fiecare coală este prinată de două ori, deci timpul necesar este $2 \cdot 3 \cdot 9 = 54$ secunde. În concluzie, timpul necesar reintroducerii foilor în imprimantă este $81 - 54 = 27$ secunde.

Problema 8. Determinați numerele de nouă cifre A care satisfac următoarele condiții:

- Conține fiecare cifră $1, \ldots, 9$ exact o dată.
- Fiecare număr format din două cifre alăturate, prin menținerea ordinii, este divizibil cu 7 sau 13.

Rezultat. 784913526

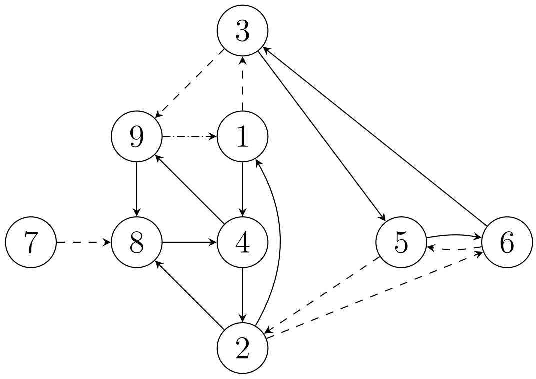
Soluție. (Săgețile pline definesc divizibilitatea cu 7, cele cu liniuțe pe cea cu 13, și cele cu liniuțe și puncte pe cea cu ambele numere.) Din diagramă, este evident că numărul cerut trebuie să înceapă cu 784. Dacă următoare cifră este 9, atunci continuăm cu 1, 3, și 5, și ultimele cifre sunt 2, 6, în această ordine. Obținem soluția 784913526.

Dacă, pe de altă parte, începem cu 7842, rămân de considerat două cazuri. Prima dată, alegând 1 și, respectiv, 3, nu se poate ca numărul să conțină cifrele 5 și 9. A doua oară, ajungem în aceeași situație dacă alegem 784263.

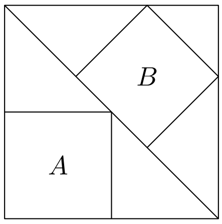
Fie N numărul căutat și numim a *block* numărul de două cifre distincte divizibil cu 7 sau 13. Observăm că 78 este singurul block ce îl conține pe 7 și 84 este singurul block ce începe cu 8, de aceea N trebuie să înceapă cu 784. Să presupunem că N nu se termină cu 9; singurele block-uri ce încep cu 9 sunt 91 și 98, și cum poziția lui 8 în N este deja fixată, 9 trebuie să fie urmat de 1. Analog, deoarece 4 este deja folosit, 1 trebuie să fie urmat de 3, 3 de 5 etc., formându-se secvența de cifre 913526, care alăturată lui 784, oferă răspunsul $N = 784913526$.

Dacă cifra unităților lui N este 9, N trebuie să înceapă cu 7842 și să se termine cu 39. 39 se poate extinde spre stânga folosind 1 sau 6, dar, atunci, singurele posibile extensii sunt 2139, 2639, și 5639, primele două conținându-l pe 2 și ultima nemaiputând fi extinsă spre stânga.

Următoare diagramă arată toate block-urile posibile:



Problema 9. Două pătrate sunt în interiorul unui pătrat ca în figură. Determinați aria pătratului A știind că aria pătratului B este 48.



Rezultat. 54

Soluție. Deoarece triunghiurile adiacente pătratului B sunt isoscele, latura lui B de pe diagonală este o treime din diagonală. De aceea, dacă s este lungimea pătratului mare, lungimea laturii lui B este $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot s$ și cea a lui A este $\frac{1}{2} \cdot s$. Raportul ariilor pătratelor din interior este

$$\frac{s^2}{4} : \frac{2 \cdot s^2}{9} = \frac{9}{8}$$

și, astfel, aria pătratului A este $48 \cdot \frac{9}{8} = 54$.

Problema 10. Fiona are două cuburi, unul cu latura de 9 cm format din cuburi albe mici cu latura de 1 cm, și unul cu latura de 10 cm format din cuburi negre mici cu latura de 1 cm. Cu aceste cuburi ea vrea să construiască un alt cub cu latura de 12 cm. Care este minimul suprafeței în cm^2 de culoare neagră?

Rezultat. 0

Soluție. Fiona are $9^3 = 729$ cuburi albe $10^3 = 1000$ cuburi negre. Pentru a putea construi un cub cu latura de 12 are nevoie de $12^3 - 10^3 = 1728 - 1000 = 728$ cuburi cu latura de 1 cm. În concluzie, poate construi cubul doar cu fețe albe, răspunsul fiind 0.

Problema 11. După ce a terminat de corectat testul la matematică, profesorul a observat că exact 10 dintre elevi nu au înmulțit corect fracțiile, 14 nu au adunat corect fracțiile și 17 nu au făcut corect raționalizarea fracțiilor. Mai mult, fiecare elev a greșit la cel puțin o operație și au fost 6 elevi care le-au grașit pe toate. Care este numărul de elevi din clasă?

Rezultat. 29

Soluție. Pentru a putea determina numărul exact de elevi din clasă, ar trebui să știm și câți elevi au greșit exact două operații pentru fiecare pereche de operații. Observăm că numărul maxim de elevi se obține dacă presupunem că fiecare elev care greșește două operații le greșește pe toate trei. Astfel, numărul total de elevi este

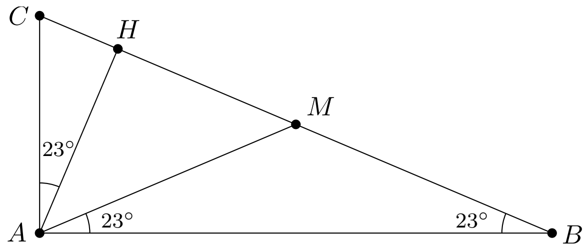
$$10 + 14 + 17 - 2 \cdot 6 = 29.$$

Trebuie să scădem de două ori numărul elevilor care au greșit toate operațiile, deoarece pe aceștia îi numărăm în fiecare dintre cele trei grupe de elevi adunate.

Problema 12. Unul dintre unghiurile ascuțite ale unui triunghi dreptunghic este de $23°$. Aflați măsura unghiului (în grade) dintre mediana și înălțimea duse din unghiul drept.

Rezultat. 44

Soluție. Fie ABC triunghiul cu $\angle BAC = 90°$. Notăm piciorul medianei cu M și cel al înălțimii cu H.



Vârfurile triunghiului ABC se găsesc pe un cerc cu centrul în punctul M. Deci, fie $\angle CBA = 23°$. Deoarece triunghiul ABM este isoscel, avem că $\angle BAM = 23°$. mai mult, triunghiul AHC este asemenea cu triunghiul ABC. Astfel $\angle HAC = 23°$. Obținem $\angle MAH = 90° - 2 \cdot 23° = 44°$ ca fiind măsura unghiului căutat.

Problema 13. Numerele naturale a și b satisfac $20a + 19b = 365$. Aflați valoarea expresiei $20b + 19a$.

Rezultat. 376

Soluție. Este evident că $a, b \leq 20$. Adunând b în ambii membri ai relației date obținem $20(a + b) = 365 + b$. Cum membrul stâng se divide cu 20, membrul drept trebuie să fie egal cu 380. Se obține $b = 15$, deci $a = 4$ și, astfel $20b + 19a = 380 - a = 376$.

Problema 14. Un poligon regulat cu 2018 vârfuri are 2033135 diagonale. Cu câte diagonale sunt mai mult într-un poligon regulat cu 2019 vârfuri? Laturile nu se vor număra ca diagonale ale poligonului.

Rezultat. 2017

Soluție. Prin n puncte necoliniare trei câte trei se pot construi $\frac{n(n-1)}{2}$ drepte. Scăzând numărul de laturi, n, obținem numărul de diagonale $\frac{n(n-3)}{2}$. Astfel, $\frac{2019 \cdot 2016}{2} - \frac{2018 \cdot 2015}{2} = 2017$.

Problema 15. Determinați toate soluțiile reale ale ecuației $(x^2 - 4x + 5)^{x^2+x-30} = 1$.

Rezultat. $2,\ 5,\ -6$

Soluție. Cum $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 \geq 1$, baza este un număr real pozitiv. Posibilitățile pentru care obținem 1 sunt baza egală cu 1 sau exponentul egal cu 0. În primul caz, $x^2 - 4x + 5 = 1$ este echivalentă cu $(x - 2)^2 = 0$ de unde se obține $x = 2$. În a doua situație, din $x^2 + x - 30 = (x - 5)(x + 6) = 0$ obținem soluțiile $x = 5$ și $x = -6$.

Problema 16. Câte numere de patru cifre distincte se pot forma cu cifrele 1, 2, 3, 4, astfel încât oricum am șterge una dintre cifre, numărul rămas să nu aibă cifrele în ordine crescătoare sau descrescătoare?

Rezultat. 4

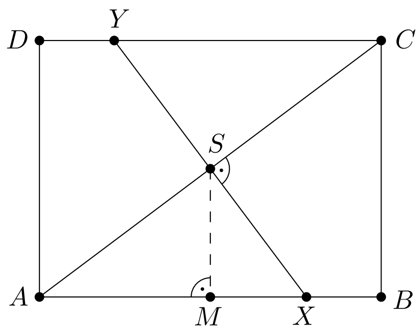
Soluție. Presupunem că numărul începe cu cifra 1. Dacă ținem cont de condiția ca cifrele să nu fie în ordine crescătoare, am putea obține 1432, care după eliminare cifrei 1 ar avea cifrele în ordine descrescătoare. Ținând cont de simetrie, 1 nu poate să fie la început sau sfârșit de număr. La fel și pentru 4. Astfel, cifrele 1 și 4 trebuie să fie în mijloc. Avem patru numere care îndeplinesc condițiile cerute:

$$(2, 1, 4, 3),\ (3, 1, 4, 2),\ (2, 4, 1, 3),\ (3, 4, 1, 2).$$

Problema 17. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $AB = 8\,\mathrm{cm}$ și $BC = 6\,\mathrm{cm}$. Fie X și, respectiv Y intersecțiile mediatoarelor segmentului AC cu AB și, respectiv CD. Care este lungimea, în *cm*, a segmentului XY?

Rezultat. $\frac{15}{2}$

Soluție. Din teorema lui Pitagora, obținem $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$. Fie S mijlocul diagonalei AC, deci $AS = 5$.



Cum $\angle CAB = \angle SAX$ și $\angle XSA = \angle CBA = 90°$, triunghiurile ASX și ABC sunt asemenea, obținând $SX : AS = BC : AB$, de unde

$$SX = \frac{BC \cdot AS}{AB} = \frac{15}{4}.$$

Lungimea cerută este $XY = 2 \cdot SX = \frac{15}{2}$.

Problema 18. În relația $FOUR + FIVE = NINE$ fiecare literă reprezintă o cifră și, litere diferite reprezintă cifre diferite. Se știu următoarele:

- $FOUR$ se divide cu 4,
- $FIVE$ se divide cu 5,
- $NINE$ se divide cu 3.

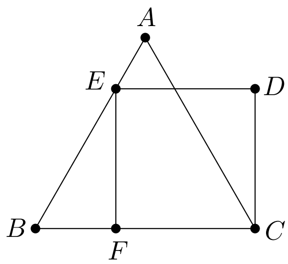
Determinați toate numerele posibile pentru $NINE$.

Rezultat. 3435

Soluție. Ținând cont de cifra unităților, obținem $R = 0$. Cum $FIVE$ se divide cu 5 și $R = 0$, obținem $E = 5$. Ținând cont de cifra miilor, obținem $O = 9$ și 1 în minte din adunarea cifrelor zecilor și, iar 1 din adunarea cifrelor miilor.Deci, $U + V$ trebuie să fie mai mare ca 10 și N cifră impară. Pe de altă parte, $U + V \leq 7 + 8 = 15$ deoarece cifra 9 a fost folosită. Se obține $N = 3$. Apoi, $U = 6$ (datorită divizibilității cu 4), $V = 7$ și $F = 1$.

Cum $NINE$ se divide cu 3, suma cifrelor $N + I + N + E = 3 + I + 3 + 5 = 11 + I$ trebuie să se dividă cu 3. Astfel, $I = 4$. De aceea, răspunsul este $NINE = 3435$ și relația devine $1960 + 1475 = 3435$.

Problema 19. Perimetrul pătratului din figură este 4. Care este perimetrul triunghiului echilateral?



Rezultat. $3 + \sqrt{3}$

Soluție.

Considerăm G intersecție dintre AC și DE. Să observăm că cele două triunghiuri dreptunghice BEF și GDC care au unghiurile interioare 30° și 60° sunt congruente, deoarece amândouă au o latură egală cu 1. Acum, un astfel de triunghi este jumătate dintr-un triunghi echilateral ce are lungimea laturii egală cu lungimea ipotenuzei. De aceea, $BE = 2BF$ și folosind teorema lui Pitagora $BE^2 = EF^2 + BF^2$. Ținând cont că $EF = 1$, obținem $BF = \sqrt{3}/3$. De aceea, lungimea laturii triunghiului echilateral ABC este $1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}$ și perimetrul său este $3 + \sqrt{3}$.

Problema 20. Fie a, b numere reale. Dacă $x^3 - ax^2 + 588x - b = 0$ are soluție reală triplă, care sunt valorile posibile pentru a?

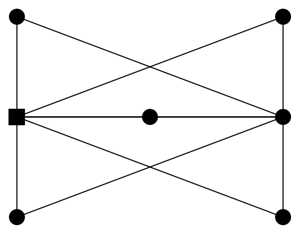
Rezultat. 42, -42

Soluție. Dacă r este soluție triplă, atunci

$$(x - r)^3 = x^3 - 3rx^2 + 3r^2x - r^3 = x^3 - ax^2 + 588x - b.$$

de unde $r = \pm 14$. Astfel, avem că $a = \pm 42$.

Problema 21. Simon este în excursie pe insule ce sunt legate prin poduri, așa cum apare în desen. El vrea să treacă peste fiecare pod. Deoarece îi place să economisească bani, el intenționează să treacă peste fiecare pod exact o dată. În câte moduri poate planifica trecerea lor dacă pleacă din insula sub formă de pătrat? Simon nu poate sări de pe un pod pe altul și poate să viziteze o insulă de mai multe ori.



Rezultat. 120

Soluție. Să observăm că insula pătrată și cea din dreapta din mijloc sunt două insule 'speciale': Toate podurile încep la una dintre ele, și din orice altă insulă există poduri spre acestea. Deci, întotdeauna vom merge dinspre o insulă specială spre cealaltă traversând o altă insulă. De aceea, tot ce avem de făcut este să ordonăm insulele care nu sunt speciale, lucru ce se poate realiza în $5! = 120$ moduri.

Problema 22. Câte perechi ordonate de numere naturale (m, n) există astfel încât cel mai mic multiplu comun al numerelor m și n să fie egal cu 2000?

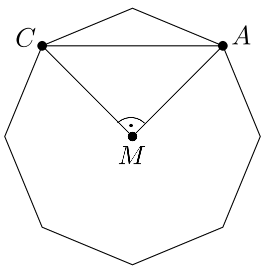
Rezultat. 63

Soluție. Distingem două cazuri: Prima dată,să presupunem că niciunul dintre numere nu este egal cu $2000 = 2^4 \cdot 5^3$. Atunci, unul dintre numere este egal cu to $2^4 \cdot 5^k$ pentru $k \in \{0, 1, 2\}$ și celălalt este $2^l \cdot 5^3$ pentru $l \in \{0, 1, 2, 3\}$, deci sunt 24 de perechi (numărând ambele ordonări). A doua oară, dacă unul dintre numere este 2000, atunci celălalt este un divizor de al lui 2000 și sunt $(4 + 1) \cdot (3 + 1) = 20$ de perechi, astfel că, ținând cont de ordine, obținem $2 \cdot 20 - 1 = 39$perechi; scădem perechea $(2000, 2000)$, care este numărată de douaă ori. În total sunt $24 + 39 = 63$ perechi.

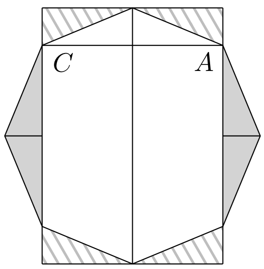
Problema 23. Fie $ABCDEFGH$ un octogon regulat cu $AC = 7\sqrt{2}$. Determinați aria sa.

Rezultat. $98\sqrt{2}$

Soluție. Fie M centrul circumscris octogonului. Cum $\angle AMC = \frac{2}{8} \cdot 360° = 90°$, raza cercului este 7 și diametrul 14.



Din reanjarea octogonului ca în figură, obținem că aria este egală cu produsul dintre AC și diametru, adică $14 \cdot 7\sqrt{2} = 98\sqrt{2}$.



Problema 24. Patru prieteni se decid să învețe limbi străine. Școala la care învață oferă cursuri de arabă, bengaleză, chineză și olandeză, și fiecare din cei patru dorește să învețe exact trei limbi. În câte moduri își pot alege cursurile astfel încât toți să participe la cel puțin un curs?

Rezultat. 232

Soluție. Să observăm că un triplet de cursuri poate fi urmat de o singură persoană în exact patru moduri. Deci sunt $4^4 = 256$ moduri ca cei patru să urmeze cursurile nerespectând condiția impusă.

Să numărăm cazurile în care toți cei patru nu au cursuri în comun. Singura posibilitate, pentru fiecare dintre cele patru limbi, este ca unul dintre cei patru să nu aleagă cursul. Deci sunt $4! = 24$ alegeri.

Astfel numărul de alegeri ce satisfac condiția dată este $256 - 24 = 232$.

Problema 25. Lui Abigail i s-a comunicat un număr natural n care nu are cifre de 0. Ea l-a înmulțit cu un alt număr ce are aceleași cifre dar în ordine inversă. Abigail a observat că rezultatul obținut este cu o mie mai mare decât produsul cifrelor numărului n. Determinați valorile posibile ale lui n.

Rezultat. 24, 42

Soluție. Evident, n are cel puțin două cifre. Dacă n are exact două cifre nenule a și b, obținem

$$(10a + b)(10b + a) = 1000 + ab$$

sau

$$a^2 + b^2 = 10(10 - ab).$$

Cum membrul drept trebuie să fie pozitiv, obținem $ab < 10$. Prin încercări, obținem că $\{a, b\} = \{2, 4\}$.

Dacă n are $k \geq 3$ cifre, atunci membrul stâng al egalității este cel puțin $(10^{k-1})^2$, în timp ce membrul drept este mai mic decât $1000 + 10^k$, deci n nu poate avea mai mult de două cifre.

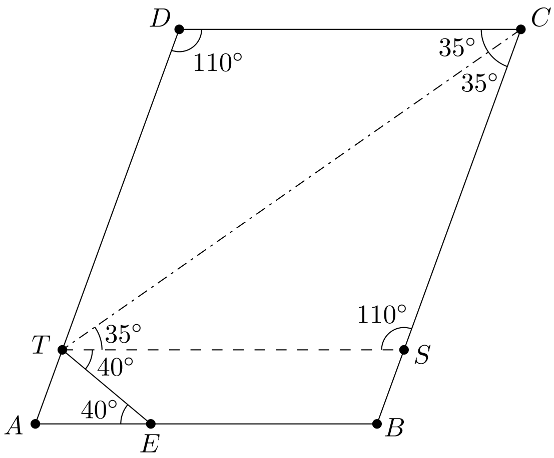
Problema 26. Fie $ABCD$ un paralelogram și fie T un punct pe segmentul AD astfel încât TC să fie bisectoarea unghiului $\angle BCD$. Fie E un punct pe segmentul AB astfel încât $\angle AET = 40°$. Dacă $\angle CTE = 75°$, care este măsura unghiului $\angle CDA$ (în grade)?

Rezultat. 110

Soluție. Fie S pe BC astfel încât TS este paralel cu AB. Atunci $\angle ETS = 40°$ și

$$\angle DCT = \angle STC = \angle CTE - \angle STE = 35°.$$

Deoarece CT este bisectoare unghiului $\angle DCB$, triunghiul CTS este isoscel, $\angle DCT = \angle TCS$ și $\angle DCB = 2 \cdot 35° = 70°$. Atunci $\angle CDA = 180° - \angle DCB = 110°$.



Problema 27. Două case de nobili se întâlnesc la un ospăț, fiecare fiind reprezentată de cel puțin un bărbat și cel puțin o femeie. Fiecare persoană care a participat a felicitat membrii casei din care nu face parte: Bărbații și-au strâns mâna, iar femeile, cât și o femeie cu un bărbat și-au făcut plecăciuni. La sfârșitul acestui ritual au fost 85 strângeri de mână și 162 de plecăciuni. Câte femei au fost prezente la ospăț? Vom număra o plecăciune când două persoane fac o plecăciune una alteia.

Rezultat. 10

Soluție. Fie m_1, m_2, w_1, w_2 numărul de bărbați și, respectiv, de femei din casele de nobili. Deoarece $m_1 m_2 = 85 = 5 \cdot 17$, observăm că $m_1 = 5$ și $m_2 = 17$ (posibilitatea ca unul dintre numere să fie 1 se poate exclude imediat). Mai mult, au fost în total $85 + 162 = 247$ de plecăciuni, și din

$$(m_1 + w_1)(m_2 + w_2) = 247 = 13 \cdot 19$$

obținem $m_1 + w_1 = 13$, $m_2 + w_2 = 19$ (alte cazuri fiind exceptate), adică $w_1 = 8$, $w_2 = 2$ și răspunsul este $8 + 2 = 10$.

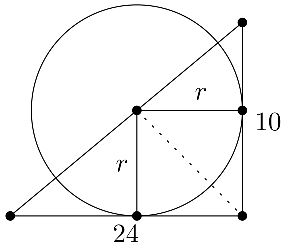
Problema 28. Se consideră un triunghi cu lungimile laturilor egale cu 10, 24, și 26. Fie c cercul cu centrul pe cea mai lungă latură și tangent celorlalte două. Aflați raza cercului c.

Rezultat. 120/17

Soluție. Din teorema lui Pitagora, obținem că triunghiul este dreptunghic. Segmentul ce unește vârful drept cu centrul cercului împarte triunghiul dreptunghic în două triunghiuri mai mici. Razele duse în punctele de tangență sunt înălțimi în aceste triunghiuri. Fie r raza cercului c. Vom calcula aria triunghiului dreptunghic în două moduri, folosind laturile date și triunghiurile mici :

$$S = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 10 = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot r + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot r,$$

care implică $r = 120/17$.



Problema 29. Margarita a venit la cazino cu 10 €. Aparatul de noroc funcționează astfel: Jucătorul introduce 1 € folosind orice tip de monede și cu probabilitatea p acesta câștigă premiul cel mare; altfel aparatul returnează 0.5 €. Ajutati-o pe Margarita să găsească cea mai mică probabilitate p astfel încât dacă ea decide să joace la acest aparat oricât demult dorește ori până când câștigă premiul cel mare, ea va avea cel puțin 50% șanse de câștig al marelui premiu.

Rezultat. $1 - \sqrt[19]{0.5}$

Soluție. Să observăm că Margarita poate pierde de cel mult 19 ori, deoarece după ce va cheltui ultimul său 1 € va mai avea doar 0.5 € , sumă ce este mai mică decât cea pe care aparatul o acceptă. Probabilitatea pentru fiecare pierdere este $1 - p$, de aceea probabilitatea ca să nu câștige marele premiu este $(1 - p)^{19}$. Pentru a vea cel puțin 50% șanse să câștige marele premiu, relația $(1 - p)^{19} \leq 0.5$ trebuie să aibă loc, care este echivalentă cu $p \geq 1 - \sqrt[19]{0.5}$ și $1 - \sqrt[19]{0.5}$ este cea mai mică valoare posibilă pentru p.

Problema 30. Găsiți toate numerele naturale de patru cifre $\overline{abcd}$ care sunt egale cu $a^a + b^b + c^c + d^d$. Cifrele nu pot fi zero.

Rezultat. 3435

Soluție. Cum $6^6 \geq 10000$, cifrele nu pot fi mai mari ca 5. Dacă toate cifrele ar fi 4, ecuația nu ar avea soluții, și dacă ar fi cel mult trei cifre de 4, numărul ar fi cel mult $3 \cdot 4^4 + 3^3 < 1000$. De aceea o cifră trebuie să fie 5. Deoarece $5^5 = 3125$, observăm că cifra 5 trebuie să apară exact o dată, în caz contrar, prima cifră a numărului ar trebui să fie mai mare ca 5. Cum $3000 < 5^5 < 5^5 + 3 \cdot 4^4 < 4000$, obținem că prima cifră este 3.

Acum știm că numărul căutat este cel puțin $5^5 + 3^3 + 2 \cdot 1^1 = 3154$, care nu verifică ecuația, ca și 3155. Următorul număr care nu conține cifre mai mari ca 5 estes $3211 > 5^5 + 3 \cdot 3^3$, de aceea una dintre cifre trebuie să fie 4. Nu mai poate fi încă un 4 deoarece atunci următoarea cifră ar depăși 5 și rezolvând și următoarele trei cazuri, concluzionăm că numărul căutat este 3435.

Problema 31. Câte cvintete de numere pare de două cifre există astfel încât în fiecare cvintet să apară toate cifrele și numerele să nu fie divizibile cu trei? Cvintetele care diferă doar prin ordinea numerelor se consideră identice.

Rezultat. 16

Soluție. Toate cele cinci numere trebuie să aibă ultima cifră pară. Pentru a satisface condiția de non-divizibilitate, numerele ce se termină cu 0 sau 6 trebuie să înceapă cu una dintre cifrele 1, 5, 7, cele ce se termină cu 2 sau 8 trebuie să înceapă cu una dintre cifrele 3, 5, 9, și cele ce se termină cu 4 trebuie să înceapă cu una dintre cifrele 1, 3, 7, 9. Dacă alegem ca numărul care se termină cu 4 să fie 14, atunci sunt două alegeri pentru cele ce se termină cu 0 și 6 (fie 50, 76, fie 56, 70), și respectiv, sunt două alegeri pentru cele ce se termină cu 2 și 8 (fie 32, 98, fie 38, 92), deci patru posibilități în total. Un argument similar se aplică pentru orice alegere a numărului ce se termină cu 4, și cum sunt patru cifre din care putem alege, numărul cvintetelor este $4 \cdot 4 = 16$.

Problema 32. Aflați toate numerele naturale n astfel încât

$$\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{35} \right\rfloor = 2019.$$

Notă: Expresia $\lfloor x \rfloor$ reprezintă partea întreagă a numărului x, adică cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x.

Rezultat. 5439

Soluție. Fie

$$f(n) = \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{35} \right\rfloor.$$

Evident, f nu este funcție descrescătoare. Mai mult, $f(n) - f(n-1) = 1$ dacă n este divizibil cu dintre numerele 5 sau 7, și $f(n) - f(n-1) = 3$ dacă n este divizibil cu 35; în orice altă situație $f(n) = f(n-1)$. Cum

$$f(n) \leq \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{35}\right) n = \frac{13}{35} n,$$

obținem

$$n \geq \frac{35}{13} \cdot 2019$$

de unde, $n \geq 5436$. $f(5436) = 2018$; Cel mai apropiat număr divizibil cu 5 este 5440 și cu 7 este 5439. $f(5439) = 2019$, $f(5440) = 2020$, și 5439 este singura soluție.

Problema 33. Pentru câte numere naturale n se pot găsi numerele naturale $x, y \leq 1\,000\,000$ (nu neapărat distincte) astfel încât

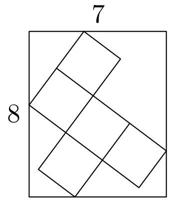
$$n = S(x) = S(y) = S(x+y),$$

unde $S(a)$ reprezintă suma cifrelor lui a?

Rezultat. 6

Soluție. Cum pentru orice număr natural a, $S(a)$ și a au același rest la împărțirea cu 9, avem că numerele n, x, y, și $x+y$ au același rest la împărțirea cu 9. Acest lucru implică că x și, respectiv n sunt multipli de 9. Dacă $n = 9m$ cu m număr natural, atunci pentru alegerea $x = y = 10^m - 1$ obținem egalitatea din enunț. Cea mai mare sumă a cifrelor pentru numere mai mici decât un milion este 54, de aceea există șase n: 9, 18, 27, 36, 45, și 54.

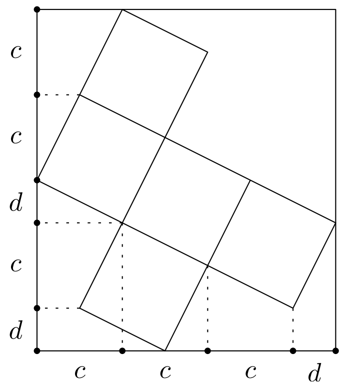
Problema 34. O piesă de joc formată din cinci pătrate de latură a se lipește pe un carton dreptunghiular cu dimensiunile 7×8 ca în figură:



Determinați a.

Rezultat. $\sqrt{5}$

Soluție. Fie c și d cea mai scurtă și cea mai lungă lungime a proiecțiilor laturilor pătratelor pe laturile dreptunghiului.



Atunci

$$\begin{aligned} 3c + 2d &= 8, \\ 3c + d &= 7, \end{aligned}$$

de unde $c = 2$ și $d = 1$. Folosind teorema lui Pitagora deducem

$$a = \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{5}.$$

Problema 35. Paul are o ciocolată dreptunghiulară format din trei coloane și cinci rânduri. În colțul de sus din stânga el a pus zahăr pentru a fi mai dulce. El mănâncă ciocolată în următorul mod: La fiecare mușcătură alege la întâmplare ori coloana din dreapta, ori rândul de jos, amândouă alegerile având aceeași probabilitate 1/2. El repetă acest pas până când mănâncă toată ciocolata. Care este probabilitatea ca la ultimul pas să mănânce colțul mai dulce?

Rezultat. 15/64

Soluție. Putem vedea procesul în felul următor: Paul alege un șir de C și R de lungime totală $(5-1)+(3-1)=6$, și conform lui, el mănâncă coloane sau rânduri din ciocolată. Sunt două posibilități: Ori șirul conține exact doi C (și patru R), caz în care pătratul mai dulce rămâne la final, sau numărul de C și R este cel puțin numărul de coloane și, respectiv, rânduri, care conduce la mâncarea întregii ciocolate. În ultimul caz, ultimul pas nu constă în mâncarea doar a pătratului dulce, nefiind destule coloane sau rânduri mâncate pentru a reduce ultima coloană sau ultimul rând la un singur pătrat.

Sunt 2^6 șiruri de C și R (de lungime 6) în total, din care $\binom{6}{2}$ conțin exact doi C, deci valoarea probabilității este

$$\frac{\binom{6}{2}}{2^6}=\frac{15}{64}.$$

Problema 36. Folosind toate cifrele $1,\ldots,9$, fiecare de câte două ori, Greg formează câteva perechi de numere prime distincte astfel încât suma tuturor numerelor prime să fie cea mai mică posibilă. Care este valoare sumei?

Rezultat. 477

Soluție. Nu există numere prime exceptând 2 și 5 ce se pot termina cu 5 sau o cifră pară, de aceea fiecare dintre cifrele

$$2,5,4,4,6,6,8,8$$

trebuie să fie prima cifră a numerelor scrise. Mai mult, cifrele rămase

$$2,5,1,1,3,3,7,7,9,9$$

trebuie să apară pe poziția unităților. De aceea, suma minimă ce se poate obține este:

$$10(2+5+4+4+6+6+8+8)+2+5+1+1+3+3+7+7+9+9=477.$$

Suma este obținută pentru următoarele numere prime:

$$2,5,29,53,41,47,61,67,83,89.$$

Problema 37. Tom și Jerry au polinoamele $T(x)=x^2+2x+10$ și $J(x)=x^2-8x+25$. Când fiecare calculează valoarea polinoamelor în numărul natural favorit t, j, ei obțin același rezultat, adică $T(t)=J(j)$. Aflați toate valorile posibile pentru $|t-j|$.

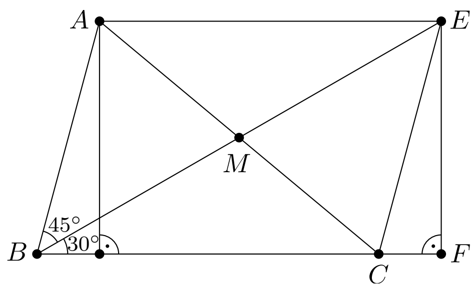
Rezultat. 1, 5

Soluție. Descompunând în factori $T(t)-J(j)=0$ obținem $(t+j-3)(t-j+5)=0$ și de aici $\{t,j\}=\{1,2\}$ sau $|t-j|=5$.

Problema 38. Înălțimea din vârful A a triunghiului ABC are aceeași lungime ca și mediana din vârful B. Se cunoaște măsura unghiului ABC de 75°. Determinați raportul $AB:BC$.

Rezultat. $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Soluție. Fie E simetricul lui B față de mijlocul M al laturii AC și F piciorul perpendicularei din E pe BC. Obținem $\sin(\angle EBC)=\frac{EF}{BE}=\frac{1}{2}$ și, deci $\angle EBC=30°$ (nu poate fi obtuz datorită celei de a doua condiții). Astfel $\angle ABM=\angle ABE=75°-30°=45°$.



Din teorema sinusurilor aplicată în triunghiurile ABM și CBM obținem

$$\frac{BM}{\sin(\angle BAC)}=\frac{AM}{\sin 45°}=\frac{AM}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

și

$$\frac{BM}{\sin(\angle BCA)}=\frac{CM}{\sin 30°}=\frac{AM}{\frac{1}{2}}.$$

Împărțind relațiile ($AM = CM$) și folosind teorema sinusurilor în triunghiul ABC avem

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\sin(\angle BCA)}{\sin(\angle BAC)} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Problema 39. Doi jucători scriu alternativ 0 și x într-un pătrat 3 pe 3. Unul dintre ei câștigă dacă pe o linie, sau coloană, sau diagonală apare simbolul său de trei ori. Jocul se termină dacă pătratul este complet scris cu 0 și x și nu a câștigat nimeni. Câte moduri diferite de umplere a pătratului cu 0 și x sunt posibile? Nu considerăm moduri diferite cele care se obțin dintr-o rotație sau citire în sens invers a pătratului. Orice jucător poate începe jocul.

Rezultat. 32

Soluție. Considerăm patru cazuri în funcție de simbolul din mijloc și simbolul care apare de cinci ori în pătrat. Dacă, în mijloc, este un x și sunt cinci de x în pătrat (denumim acest caz “x-x”) trebuie să mai scriem patru de x. Nu putem folosi o întreagă diagonală sau o întreagă “axă”. Avem un model (Figura 1) care nu este simetrică în raport cu o rotație sau axă de simetrie și, de aceea acest caz contribuie cu 8 modele diferite.

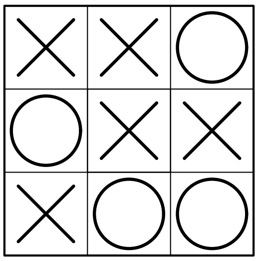


Figure 1

În cazul “x-0” trebuie să desenăm cinci de 0 în pătrat și x în mijloc. Nu putem folosi toate cele patru colțuri deoarece un jucător ar câștiga când am desena al cincilea simbol. Pe de altă parte, trebuie să punem cel puțin un 0 pe ambele diagonale, altfel x câștigă. Astfel, trebuie să desenăm exact trei de 0 sau exact doi de 0 în colțurile pătratului și în ambele cazuri rămâne câte un caz de a umple pătratul. Ambele situații sunt una dintre cele 4 rotații (ambele au axă de simetrie) ale următoarelor modele (Figura 2 and Figura 3).

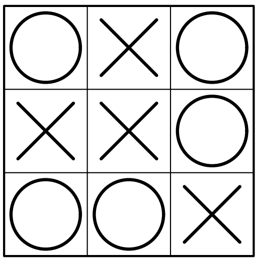


Figure 2

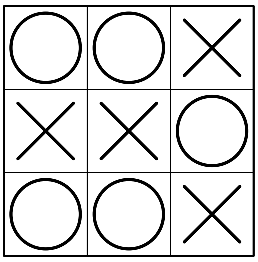


Figure 3

Cazurile “0-0” și “0-x” sunt analoage cu cele discutate și astfel, numărul total de umpleri este $2(8 + 4 + 4) = 32$.

Problema 40. Aflați cel mai mare număr natural a astfel încât să nu existe numere naturale b care satisfac

$$\frac{4}{3} < \frac{a}{b} < \frac{25}{18}.$$

Rezultat. 32

Soluție. Reciproc, obținem

$$0.72 < \frac{b}{a} < 0.75.$$

Intervalul dintre 0.72 și 0.75 are lungimea $0.03 > 1/34$, deci pentru orice $a \geq 34$ avem soluție. Pentru $a = 33$ există soluția $b = 24$ (obținând $b/a = 0.7272\ldots$). Pentru $a = 32$ nu există soluție deoarece $24/32 = 0.75$ și $1/32 > 0.03$.

Problema 41. La un turneu de ciclism cu distanța de 110 km de la Passau la Linz, Heiko și Eva trebuie să treacă peste trei dealuri. În timpul primului popas, Heiko, care este bun la aritmetică, spune: “Dacă înmulțim cele trei distanțe de la Passau la vârful fiecărui deal, obținem un multiplu de 2261.” După ce se gândește puțin, Eva răspunde: “Tot un multiplu de 2261 obținem și dacă măsurăm distanțele de la Linz.” După ce parcurg 80 km de la start, ei se opresc pentru un moment și Heiko afirmă: “Acum mai avem un singur deal în fața noastră înainte ca să ajungem la Linz.” Presupunând că toate distanțele sunt numere naturale exprimate în kilometri și sunt parcurse pe șosea, aflați distanțele de la Passau la fiecare vârf de deal.

Rezultat. 68, 76, 91

Soluție. Fie A, B, și C cele trei distanțe măsurate în km. Avem relațiile $2261 \mid ABC$ și $2261 \mid (110-A)(110-B)(110-C)$. Cum $2261 = 7 \cdot 323 = 7 \cdot 17 \cdot 19$ și $7 \cdot 17 = 119 > 110$ distanțele nu pot fi mai mult decât un factor prim al lui 2261.

Putem presupune că $7 \mid A$, $17 \mid B$, și $19 \mid C$. Pentru distanțele $110-A$, $110-B$ and $110-C$, obținem două cazuri $7 \mid (110-B)$ și $7 \mid (110-C)$ deoarece $7 \nmid (110-A)$. În prima situație, $7 \mid (110-B)$, obținem $19 \mid (110-A)$ și $19 \nmid (110-C)$, deci $17 \mid (110-C)$. În cazul $7 \mid (110-C)$ obținem $17 \mid (110-A)$ și $19 \mid (110-B)$.

Cum $\mathrm{GCD}(7,19) = 1$, singurul mod de descompunere a lui 110 ca $a \cdot 7 + b \cdot 19$ cu a, b numere naturale este $110 = 13 \cdot 7 + 1 \cdot 19$ (toate descompunerile sunt de forma $110 = (13+19k) \cdot 7 + (1-7k) \cdot 19$ pentru $k \in \mathbb{Z}$ și coeficienții sunt naturali doar pentru $k = 0$). În mod similar, avem descompunerile $110 = 4 \cdot 17 + 6 \cdot 7$ și $110 = 4 \cdot 19 + 2 \cdot 17$. Acestea conduc la două soluții

$$A = 13 \cdot 7 = 91, \quad B = 4 \cdot 17 = 68, \quad C = 4 \cdot 19 = 76$$

și

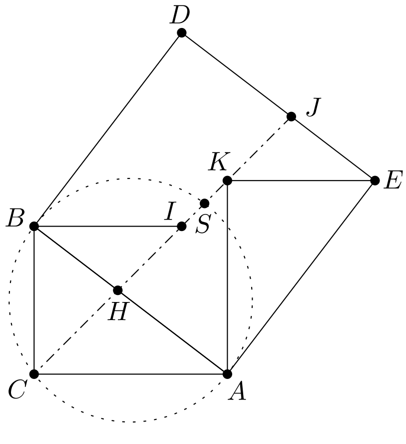
$$A = 6 \cdot 7 = 42, \quad B = 2 \cdot 17 = 34, \quad C = 19.$$

Remarca lui Heiko din timpul celei de al doilea popas indică faptul că al treilea vârf este la cel puțin 80 km depărtare de Passau. În consecinââ, distanțele sunt 68, 76 și 91.

Problema 42. Fie ABC un triunghi dreptunghic în C astfel încât $AC = 4 - \sqrt{3}$ și $BC = \sqrt{3}$. Fie D și E astfel încât $ABDE$ este un pătrat ce nu conține punctul C în interior, și J un punct pe DE astfel încât $\angle ACJ = 45°$. Fie K un punct pe CJ astfel încât $AK \parallel BC$. Care este aria triunghiului JKE?

Rezultat. $3\sqrt{3}/8$

Soluție. Observăm că $\angle EKA = 90°$; iar triunghiurile AEK și ABC sunt congruente, deoarece $AK = AC$, $AE = AB$, și $\angle EAK = \angle BAC$. Centrul S al pătratului $ABDE$ se află pe cercul circumscris triunghiului ABC deoarece ASB și ACB sunt unghiuri drepte. Deoarece $AS = BS$ unghiurile ACS și BCS sunt congruente. De aceea S se află pe bisectoarea CJ. Prin relexia triunghiului JKE față de S, E ajunge în B, J în H, care este punctul de intersecție dintre AB și CJ, și K ajunge în I, care se află pe CJ și satisface $\angle IBC = 90°$.



Triunghiul IBC este dreptunghic isoscel cu unghiul drept în B și are aria $(\sqrt{3})^2/2 = 3/2$. Folosind parateze drepte pentru aria unui triunghi, avem că

$$\frac{[IBC]}{[IBH]} = \frac{IC}{IH} = \frac{IH + HC}{IH} = 1 + \frac{HC}{IH}.$$

Triunghiurile ACH și BIH sunt asemenea, deci

$$\frac{HC}{IH} = \frac{AC}{IB} = \frac{AC}{BC}.$$

În concluzie,
$$[JKE] = [IBH] = [IBC] \cdot \frac{BC}{AC + BC} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Problema 43. Doi prizonieri au în fața lor două cutii. Ei știu că într-o cutie sunt două bile albe și una neagră, iar în alta o bilă albă și două negre; dar nu știu care este cutia care conține combinațiile specificate. Fiecare prizonier alege o cutie și extrage o bilă fără a o repune în cutie. Prizonierul care extrage bilă albă este eliberat, iar în caz contrar, executat. Dacă al doilea prizonier este martor la extragerea primului, care este probabilitatea de supraviețuire a acestuia înainte ca prima bilă să fie extrasă? Presupunem că primul prizonier alege o cutie la întâmplare.

Rezultat. 5/9

Soluție. Notăm cu c culoarea extrasă de primul prizonier și cu o cealaltă culoare. Probabilitatea de a extrage din cutia cu c, c, o este 2/3 și din cutia cu c, o, o este 1/3. Dacă al doilea prizonier alege aceeași cutie ca și primul, acesta va extrage culoarea c cu probabilitatea
$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3},$$
și culoarea o cu probabilitatea
$$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$
Dacă alege cealaltă cutie, extragerea culorii c are probabilitatea
$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9},$$
și culoarea o
$$1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

Dacă c este alb, al doilea prizonier va supraviețui dacă extrage c. Cum $\frac{4}{9} > \frac{1}{3}$, este indicat să extragă din cealaltă cutie, și va supraviețui cu probabilitatea $\frac{4}{9}$. Dacă c este negru, al doilea prizonier supraviețuiește dacă extrage o. Cum $\frac{2}{3} > \frac{5}{9}$, este indicat să aleagă aceeași cutie, și va supraviețui cu probabilitatea $\frac{2}{3}$. Evident c este alb cu probabilitatea $\frac{1}{2}$ și negru cu probabilitatea $\frac{1}{2}$, de aceea al doilea prizonier va supraviețui cu probabilitatea
$$\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{9}.$$

Problema 44. Care este cel mai mic număr natural n astfel încât printre orice n (nu neapărat distincte) numere reale din intervalul $[1, 2019]$, există trei care reprezintă lungimile laturilor unui triunghi nedegenerat?

Rezultat. 18

Soluție. Pentru $n < 18$ considerăm primii n termeni ai șirului lui Fibonacci dat prin relația $a_1 = a_2 = 1$, $a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597$. Evident, cel mai mare număr al oricărui triplet format din aceste numere este mai mare sau egal cu suma celorlalte două și de aceea un astfel de triplet nu poate forma un triunghi nedegenerat. Pentru $n = 18$, fie $x_1 \leq \cdots \leq x_{18}$ numerele alese. Dacă oricare trei dintre ele nu formează un triunghi nedegenerat, alegem $x_1, x_2 \geq 1$, $x_3 \geq x_1 + x_2 \geq 2, x_4 \geq x_3 + x_2 \geq 2 + 1 = 3, \ldots$ obținând la fiecare pas un termen din șirul lui Fibonacci terminând cu $x_{18} \geq 987 + 1597 > 2019$, ceea ce este imposibil. Numărul cerut este $n = 18$.

Problema 45. Notăm cu $\sigma(k)$ numărul tuturor divizorilor (pozitivi) ai numărului natural k. Aflați cel mai mic număr natural n astfel încât cel mai mare factor al lui $\sigma(n)$ și $\sigma(n^3)$ nu este putere a lui 2 (inclusiv 1).

Rezultat. $432 = 2^4 \cdot 3^3$

Soluție. Dacă
$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t}$$
este factorizarea lui n, atunci
$$\sigma(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_t + 1).$$
Condiția ca cel mai mare factor să nu putere a lui 2 este echivalentă cu faptul că există un număr impar q care divide $\sigma(n)$ și $\sigma(n^3)$. Cum
$$\sigma(n^3) = (3\alpha_1 + 1)(3\alpha_2 + 1) \cdots (3\alpha_t + 1),$$
acest număr nu se divide cu 3, și, de aceea cea mai mică valoare pentru q este 5. Mai mult, q nu poate divide $\alpha_i + 1$ și $3\alpha_i + 1$ în același timp, deoarece ar divide
$$3(\alpha_i + 1) - (3\alpha_i + 1) = 2.$$

Deci există numerele distincte $i, j \in \{1, \ldots, t\}$ astfel încât $q \mid \alpha_i + 1$ și $q \mid 3\alpha_j + 1$. Cum căutăm cel mai mic număr, putem presupune $t = 2$, $i = 1$, și $j = 2$.

Dacă $q = 5$, cele mai mici valori pentru α_1, α_2 sunt $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 3$, și considerând cele mai mici numere prime, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, obținem $n = 2^4 \cdot 3^3 = 432$.

Dacă $q \geq 7$, atunci $\alpha_1 \geq 6$ și $\alpha_2 \geq 2$, obținându-se

$$n \geq 2^6 \cdot 3^2 = 576 > 432,$$

arătând că432 este cea mai mică valoare pentru n.

Problema 46. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu unghiul drept $\angle ACB = 90°$, $AC = 15$, $BC = 20$. Fie D punctul de pe AB astfel încât $CD \perp AB$. Cercul t înscris în triunghiul ACD este tangent laturii CD în T. Un alt cerc c este tangent laturii CD în T, și tangent laturii BC. Notăm cele două intersecții ale cercului c cu latura AB cu X și Y. Care este lungimea segmentului XY?

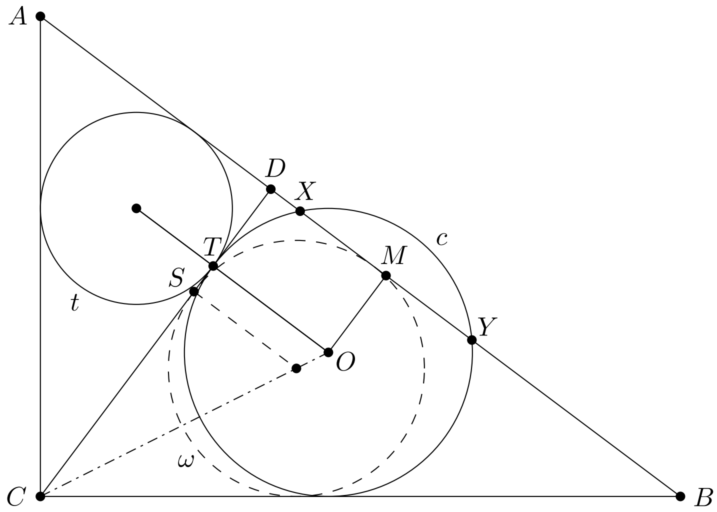
Rezultat. $3\sqrt{5}$

Soluție. Din teorema catetei obținem

$$AD = \frac{AC^2}{AB} = 9, \quad BD = \frac{BC^2}{AB} = 16, \quad CD = \sqrt{AD \cdot BD} = 12.$$

Raza cercului t (care este egală cu DT) se poate calcula ca raportul dintre aria triunghiului ACD și semiperimetrul său: Obținem $DT = 54/(36/2) = 3$. Cercul înscris în triunghiul BCD, notat cu ω, este tangent laturii CD în S. Raza sa este $DS = 4$. Omotetia cu centrul în C și raport $CT/CS = 9/8$ duce cercul ω în cercul c. Astfel, raza cercului c este $4 \cdot 9/8 = 9/2$. Fie M mijlocul segmentului XY și O centrul cercului c. Știm că $XO = 9/2$ și$OM = DT = 3$. Din teorema lui pitagora, obținem că

$$XY = 2 \cdot XM = 2\sqrt{\frac{9^2}{2^2} - 3^2} = 6\sqrt{\frac{9}{4} - 1} = 3\sqrt{5}.$$



Problema 47. Fiecare pătrățel al unei table de șah cu dimensiunile de 6×7 este colorat alb, verde, roșu sau albastru. Numim colorare *atractivă* dacă fiecare pătrățel din orice pătrat de 2×2 are culori diferite. Câte colorări atractive sunt?

Rezultat. 1128

Soluție. Din moment ce două pătrățele au colorări diferite, atunci, dacă sunt mai mult de două culori pe o linie există trei pătrățele consecutive colorate prin trei culori diferite. Un astfel de triplet va genera colorarea respectivelor trei coloane. Spre exemplu, tripletul $1-2-3$ obligă pătrățelele vecine de pe verticală să fie tripletul $3-4-1$ și aceste două triplete trebuie să alterneze până la umplerea coloanelor, conținând doar două culori. Analog pentru coloane în loc de linii. Astfel, nu se pot folosi în același timp mai mult de două culori pe o linie sau două culori pe o coloană.

Presupunem că tabla are 6 linii și 7 coloane. Să numărăm colorările folosind doar două culori în fiecare rând: alegem două culori pentru primul rând (atunci cuplul de culori pentru orice alt rând este determinat)și apoi alegem culoarea de început în fiecare din cele 6 rânduri. Obținem $\binom{4}{2} \cdot 2^6 = 6 \cdot 2^6$ colorări. Analog, numărul colorărilor folosind doar două culori pe fiecare coloană este $6 \cdot 2^7$. Trebuie să scădem numărul de colorări cu două culori pe fiecare coloană și pe fiecare linie. Cum o astfel de colorare este determinată de pătratul 2×2 din colțul stâng sus, există $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Răspunsul este $6 \cdot 2^6 + 6 \cdot 2^7 - 24 = 1128$.

Problema 48. O sută de copii sunt așezați în rând. Primul copil are 4 grame de ciocolată, al doilea are 8 grame de ciocolată și tot așa până la ultimul care are 400 grame de ciocolată. Primul copil oferă o treime din ciocolata sa celui de al doilea (deci al doilea are acum $\frac{28}{3}$ grame de ciocolată). Al doilea oferă o treime din ciocolata sa celui de al treilea și tot așa până când al 99-lea copil oferă o treime din ciocolata sa celui de al 100-lea copil. Câte grame de ciocolată va avea al 100-lea copil la final?

Rezultat. $597 + 3^{-99}$

Soluție. După primul pas, al doilea copil are $8 + 4/3$. La al doilea pas, al doilea copil oferă o treime din ciocolata sa celui de al treilea, care va avea atunci $12 + 8/3 + 4/3^2$ grame. După al treilea pas, copilul al patrulea va avea $16 + 12/3 + 8/3^2 + 4/3^3$ grame. Se observă că al 100-lea copil va avea

$$4\left(100 + \frac{99}{3^1} + \frac{98}{3^2} + \frac{97}{3^3} + \cdots + \frac{2}{3^{98}} + \frac{1}{3^{99}}\right).$$

Notăm

$$S = 100 + \frac{99}{3^1} + \frac{98}{3^2} + \frac{97}{3^3} + \cdots + \frac{2}{3^{98}} + \frac{1}{3^{99}}.$$

Atunci avem

$$\begin{aligned} S = \quad & 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{98}} + \frac{1}{3^{99}} + \\ & + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{98}} + \\ & \vdots \\ & + 1 + \frac{1}{3} + \\ & + 1. \end{aligned}$$

Folosind suma numerelor în progresie geometrică,

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} = \frac{1 - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right),$$

obținem

$$\begin{aligned} S &= \frac{3}{2}\left(100 - \left(\frac{1}{3^{100}} + \frac{1}{3^{99}} + \cdots + \frac{1}{3}\right)\right) \\ &= \frac{3}{2}\left(100 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3^{99}} + \frac{1}{3^{98}} + \cdots + 1\right)\right) \\ &= \frac{3}{2}\left(100 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{100}}\right)\right). \end{aligned}$$

În final

$$4S = 4 \cdot \frac{3}{2}\left(100 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{100}}\right)\right) = 600 - 3 + \frac{1}{3^{99}} = 597 + 3^{-99}.$$

Problema 49. Determinați toate numerele naturale $n \geq 3$ pentru care

$$\frac{(n-1)^{n-1} - n^2 + 2019 \cdot (n-1)}{(n-2)^2}$$

este număr natural.

Rezultat. 3, 4, 5, 6, 8, 14

Soluție. Dorim ca n să satisfacă $(n-2)^2 \mid (n-1)^{n-1} - n^2 + 2019 \cdot (n-1)$. Acest lucru nu este influențat de adunarea lui $(n-2)^2$ în membrul drept, obținând

$$(n-2)^2 \mid (n-1)^{n-1} + 2015 \cdot (n-1).$$

Cum $n-1$ și $n-2$ sunt prime între ele, putem să împărțim membrul drept prin $n-1$. Substituind $t = n-2$, obținem $t^2 \mid (t+1)^t + 2015$. Folosind binomul lui Newton, obținem

$$t^2 \mid t^t + \binom{t}{t-1} t^{t-1} + \cdots + \binom{t}{2} t^2 + \binom{t}{1} t + 1 + 2015,$$

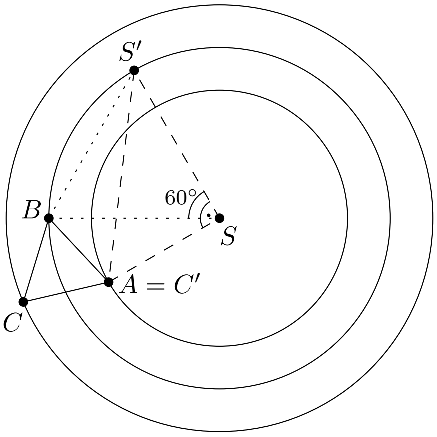
deci $t^2 \mid 2016$. Descompunerea în factori primi a lui 2016 este $2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, deci valorile 1, 2, 3, 4, 6, 12 sunt singurele variante pentru t. Înlocuind în $n = t + 2$ obținem rezultatele 3, 4, 5, 6, 8, 14.

Problema 50. Se consideră triunghiul echilateral ABC ce are vârfurile situate pe trei cercuri concentrice de raze 3, 4, și 5. Determinați toate lungimile posibile ale laturii triunghiului.

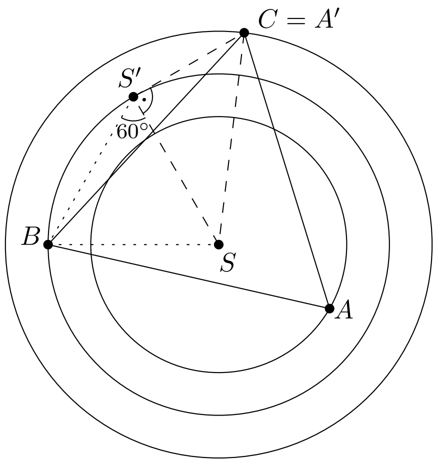
Rezultat. $\sqrt{25-12\sqrt{3}}$, $\sqrt{25+12\sqrt{3}}$

Soluție. Fie A pe cercul de rază 3, B pe cel de rază 4, C pe cel de rază 5, și S centrul cercurilor. Trebuie considerate două cazuri.

În primul caz, considerăm că S este în afara triunghiului ABC. Rotind C și S cu $60°$ în jurul lui B obținem punctele $C' = A$ și S'. Triunghiul SBS' este echilateral cu latura de 4, și $S'C' = SC = 5$. Triunghiul $SS'C'$ are laturile de 3, 4, 5, deci $\angle S'SC' = 90°$. Atunci $\angle BSA = \angle S'SC' - \angle S'SB = 30°$. Folosind teorema cosinusului în triunghiul BSA obținem $AB = \sqrt{25-12\sqrt{3}}$.



Dacă S este în interiorul triunghiului ABC, rotim A și S cu $60°$ în jurul lui B și obținem punctele $A' = C$ și S'. Triunghiul $SS'A'$ este dreptunghic cu $\angle SS'A' = 90°$. Atunci $\angle BSA = \angle BS'A' = \angle SS'A' + \angle SS'B = 150°$. Folosind teorema cosinusului în triunghiul BSA obținem $AB = \sqrt{25+12\sqrt{3}}$.



Problema 51. Șapte persoane stau pe scaune (egal distanțați) în jurul unei mese rotunde, pe care sunt desenate șapte săgeți astfel încât fiecare începe din dreptul unui scaun și este îndreptată spre un scaun (locul de început și sfârșit nu trebuie să fie neapărat distincte). La fiecare minut, oamenii își schimbă locurile în funcție de ce arată săgeata din dreptul lor, și masa se rotește în sensul acelor de ceas cu un loc. Care este numărul maxim de minute necesar oamenilor pentru a reveni la pozițiile inițiale?

Rezultat. 84

Soluție. Să observăm că după 7 pași oamenii își schimbă locurile între ei, însă masa ajunge în poziția inițială. De aceea, putem vedea că la fiecare al 7-lea minut oamenii și-au schimbat locurile ca într-o permutare. Numărul minim ce se poate aplica unei permutări pentru ca elementele sale să revină pe aceleași poziții poate fi cel mult 12: Acesta se obține pentru permutarea elementelor unei permutări ca

$$1 \to 2 \to 3 \to 1; \quad 4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 4.$$

În general, ordinul unei permutări este cel mai mic multiplu comun al lungimilor ciclurilor; se observă că 12 este ordinul maximal. Astfel obținem $7 \cdot 12 = 84$ minute necesare ca oamenii să revină la pozițiile inițiale.

Dacă săgețile sunt desenate pe masă astfel încât doar persoanele 1 și 4 își schimbă locurile, atunci după 7 minute, oamenii sunt permutați conform permutării

$$1 \to 2 \to 3 \to 1; \quad 4 \to 7 \to 6 \to 5 \to 4,$$

deci procedura durează 84 minute. Rămâne să observăm că oamenii nu se pot întoarce la locurile lor inițiale într-un timp mai scurt: La fiecare 7 minute locurile 1, 2, și 3 sunt ocupate de (posibil permutate) de ocupanții inițiali, dar în cele șase minute dinainte, cel puțin o persoană dintre acestea stă mai departe de aceste trei locuri.

Problema 52. Fie $a_1, a_2, a_3, \ldots$ un șir de numere reale pozitive. Începând cu al doilea termen a_2, fiecare număr este jumătate din suma dintre media aritmetică și media geometrică a celor doi vecini ai lui. Determinați a_{333} știind că $a_1 = \frac{2}{7}$ și $a_{11} = \frac{7}{2}$.

Notă: Media geometrică a două numere reale pozitive x și y este egală cu $\sqrt{xy}$.

Rezultat. 2016

Soluție. Condiția dată se scrie

$$a_k = \frac{\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2} + \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a_{k-1}} + \sqrt{a_{k+1}}\right)^2}{4}$$

pentru orice $k \geq 2$. Aceasta se poate rescrie ca

$$\sqrt{a_k} = \frac{\sqrt{a_{k-1}} + \sqrt{a_{k+1}}}{2}.$$

Astfel șirul $b_1, b_2, \ldots$ unde $b_k = \sqrt{a_k}$ este o progresie aritmetică; fie d rația progresiei. Țim că $b_1 = \sqrt{2/7}$ și $b_{11} = \sqrt{7/2}$, deci

$$d = \frac{\sqrt{7/2} - \sqrt{2/7}}{10} = \frac{1}{2\sqrt{14}}.$$

Obținem

$$b_{333} = b_1 + 332 \cdot d = \sqrt{\frac{2}{7}} + \frac{332}{2\sqrt{14}} = \frac{4 + 332}{2\sqrt{14}} = 12\sqrt{14}.$$

Atunci $a_{333} = b_{333}^2 = 2016$.

Problema 53. Adam are un dreptunghi cu perimetrul 444 ce are laturile de lungimi numerele naturale a, b satisfăcând $a > b$. El a încercat să îl acopere cu pătrate cu latura de lungime $a - b$ așezând primul pătrat în colțul din stânga sus și apoi urmând modelul unei rețele de pătrate cu axele paralele cu laturile dreptunghiului și originea în colțul de sus din partea stângă. La un moment dat (după ce cel puțin un pătrat a fost așezat) el s-a oprit deoarece nu mai putea suprapune întreaga suprafață a pătatului peste o parte interioară a dreptunghiului. Aria suprafeței dreptunghiului neacoperită de pătrate este 1296. Determinați suma tuturor posibilelor lungimi de laturi ale pătratelor folosite pentru acoperirea dreptunghiului.

Rezultat. 166

Soluție. Avem $a \equiv b \equiv r \pmod{a-b}$ unde $0 \leq r \leq a - b - 1$. Aria porțiunii neacoperite este $ra + rb - r^2 = -r^2 + 222r = 1296$, relație echivalentă cu $(r-6)(r-216) = 0$. Evident $a > r$ și $b > r$ deci obținem $r = 6$.

Dacă înlăturăm porțiunea neacoperită și notăm $x = a - r$, $y = b - r$, obținem un $x \times y$ dreptunghi acoperit de $(x-y) \times (x-y)$ pătrate (deoarece $x - y = a - b$) și $x + y = a + b - 2r = 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. $x - y$ trebuie să fie un divizor al lui x și y, deci și $x + y$. Alegem un divizor $d \mid 210$ și fixăm $x - y = d$. Folosind $x + y = 210$ rezolvăm pentru x și y:

$$x = \frac{210 + d}{2}, \quad y = \frac{210 - d}{2}.$$

Cum soluțiile trebuie să fie numere naturale (există cel puțin un pătrat cu latura de lungime $a - b = x - y$) și cum $x - y > 6$ (datorită maximalității de aproape acoperit), putem observa că d este soluție dacă și numai dacă este un divizor par al lui 210 și satisface $6 < d < 210$. Deci d este unul dintre numerele 10, 14, 30, 42, 70 a căror sumă este 166.

Problema 54. Se consideră punctul P interior triunghiului ABC. Notăm cu A', B', C' intersecțiile dreptelor AP, BP, CP cu BC, CA, AB. Presupunem că

$$A'P = B'P = C'P = 3$$

și

$$AP + BP + CP = 25.$$

Determinați $AP \cdot BP \cdot CP$.

Rezultat. 279

Soluție. Notăm aria triunghiului XYZ cu $[XYZ]$.

Fie

$$a = AP, \quad b = BP, \quad c = CP.$$

Atunci

$$\frac{[PBC]}{[ABC]} = \frac{PA'}{AA'} = \frac{3}{a+3}$$

și

$$\frac{[PCA]}{[ABC]} = \frac{3}{b+3}, \quad \frac{[PAB]}{[ABC]} = \frac{3}{c+3}.$$

Cum, $[PBC] + [PCA] + [PAB] = [ABC]$, obținem

$$\frac{3}{a+3} + \frac{3}{b+3} + \frac{3}{c+3} = 1,$$

care conduce la

$$54 + 9(a + b + c) = abc.$$

Rezultatul se obține prin înlocuirea în relație a sumei $a + b + c = 25$.

Problema 55. Patrusprezece puncte $A_1, \ldots, A_{14}$ au fost alese în această ordine pe cercul c în sensul acelor de ceasornic astfel încât oricare trei segmente cu extremitățile în aceste puncte să nu fie concurente în interiorul cercului c. Christine a desenat aceste segmente, dar observând că desenul a devenit neclar, s-a hotărât să șteargă toate laturile și diagonalele heptagoanelor $A_1A_3A_5A_7A_9A_{11}A_{13}$ și $A_2A_4A_6A_8A_{10}A_{12}A_{14}$. În câte regiuni împart segmentele rămase interiorul cercului c?

Rezultat. 295

Soluție. Considerăm că segmentele sunt adăugate desenul unul după celălalt: Este ușor de observat că atunci când un segment este adăugat, numărul total de regiuni crește cu 1 + câte segmente din cele deja desenate sunt intersectate de noul segment. De aceea, numărul de regiuni este egal cu

$$1 + \text{numărul de segmente} + \text{numărul de intersecții.}$$

Să denumim punctele $A_1, A_3, \ldots, A_{13}$ *impare* și pe cele rămase *pare*. Segmentele existente sunt cele ce unesc un punct impar cu unul par, adică $7 \cdot 7 = 49$ segmente.

Pentru a calcula numărul total de intersecții, să observăm că capetele segmentelor sunt pe cerc astfel încât punctele impare sunt unul lângă altul și similar pentru cele pare. Pe de altă parte, fiecare cvadruplu de puncte reprezintă o singură intersecție, deci va trebui să numărăm aceste cvadruple. Fie A_1 primul punct impar din cvadruplu; atunci împărțind punctele în șapte perechi $(A_2, A_3), (A_4, A_5), \ldots, (A_{14}, A_1)$, observăm că cele trei puncte rămase trebuie să fie în perechi distincte. Pe de altă parte, orice alegere a trei dintre aceste perechi generează un cvadruplu de puncte: Alegem punctul impar din prima pereche și punctele pare din celelalte două perechi. Cum sunt șapte posibilități de alegere pentru punctul impar, avem în total

$$7 \cdot \binom{7}{3} = 245$$

intersecții. Concluzionăm că cercul este împărțit în $1 + 49 + 245 = 295$ regiuni.

Problema 56. Determinați numărul de cvadruple (a, b, c, d) de numere naturale care satisfac

$$a + b + c + d = 505 \quad \text{și} \quad ab = cd.$$

Rezultat. 800

Soluție. Înmulțim prima relație cu a și folosind-o pe a doua, obținem $(a + c)(a + d) = 505a = 5 \cdot 101 \cdot a$, observând că 5 și 101 sunt numere prime. Cum ambele paranteze sunt mai mari ca a trebuie ca una să fie egală cu $5k$, și alta cu $101l$, unde $kl = a$. Alegând $a + c = 5k$ și $a + d = 101l$ pentru k, l fixați, satisfăcând $kl = a$, obținem $c = k(5 - l)$, $d = l(101 - k)$ și $b = 505 - a - d - c = (101 - k)(5 - l)$. Se poate verifica că cvadruplu

$$(a, b, c, d) = (kl, (101 - k)(5 - l), k(5 - l), l(101 - k))$$

satisface condiția $ab = cd$ și deci este o soluție a sistemului dat pentru orice $l = 1, 2, 3, 4$ și orice $k = 1, 2, \ldots, 100$. Toate cele 400 de soluții sunt diferite deoarece dacă două perechi (k_1, l_1) și (k_2, l_2) dau aceeași soluție menționată anterior, avem că $k_1l_1 = k_2l_2$ și $(5 - l_1)k_1 = (5 - l_2)k_2$ care implică $k_1 = k_2$ și $l_1 = l_2$. Analog, pentru cazul $a + c = 101l$ și $a + d = 5k$ obținem 400 de soluții diferite

$$(a, b, c, d) = (kl, (101 - k)(5 - l), l(101 - k), k(5 - l))$$

pentru orice $l = 1, 2, 3, 4$ și orice $k = 1, 2, \ldots, 100$. Nici o soluție din cazul doi nu coincide cu una din primul caz deoarece $5k = a + c = 101l$ nu are loc pentru orice k, l din domeniu. Avem $400 + 400 = 800$ soluții.