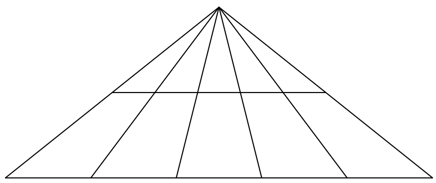
Задача 1. Три года назад Петя был в три раза младше мамы. Сейчас Петя в три раза младше папы. На сколько лет отличаются возраста Петиных родителей?

Ответ. 6

Решение. Обозначим возраст Пети через x. Тогда возраст Петиной мамы сейчас равен $3(x-3)+3 = 3x-6$. В то же время, Петиному папе $3x$ лет. Значит разница в возрасте между Петиными родителями равна шести годам.

Задача 2. Сколько треугольников изображено на картинке?

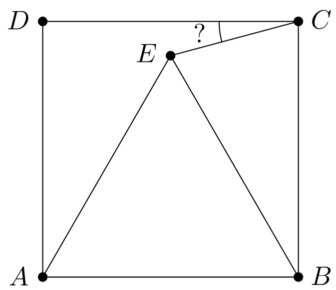


Ответ. 30

Решение. Для всех треугольников на картинке самая верхняя точка изображения является вершиной. Более того, у любого треугольника одна из сторон содержится в одном из двух параллельных горизонтальных отрезков. Таким образом, каждый треугольник однозначно задаётся выбором одного из этих двух отрезков и выбором двух различных точек на этом отрезке. Общее количество вариантов получается равным

$$2 \cdot (5+4+3+2+1) = 30.$$

Задача 3. Внутри квадрата $ABCD$ выбрана точка E такая, что ABE — равносторонний треугольник. Чему равна величина угла DCE в градусах?



Ответ. 15

Решение. Так как в правильном треугольнике все внутренние углы равны $60°$, получаем $\angle CBE = 90° - \angle EBA = 30°$. Так как $EB = AB = BC$, треугольник BCE является равнобедренным. Отсюда:

$$\angle ECB = \angle BEC = \tfrac{1}{2}(180° - \angle CBE) = 75°.$$

Наконец, величина искомого угла равна $\angle DCE = 90° - \angle ECB = 15°$.

Задача 4. Сандра является счастливой обладательницей мешка монет, на которых написаны натуральные числа. У Сандры есть одна монета с числом 1, две монеты с числом 2, три монеты с числом 3, $\ldots$, восемнадцать монет с числом 18 и девятнадцать монет с числом 19. Сандра достаёт из мешка монеты по одной, не видя написанные на них числа. Какое наименьшее число монет должна достать Сандра, чтобы среди них гарантированно нашлись десять монет с одним и тем же числом?

Ответ. 136

Решение. Докажем, что 135 монет может быть недостаточно. Действительно, если Сандра достала все монеты с числами меньше 10 и по девять монет с каждым из остальных чисел, то всего она достала $(1+2+\cdots+9)+9\cdot 10 = 135$ монет, но среди них нет десяти с одним и тем же числом.

Докажем, что 136 монет всегда хватит. Если Сандра достала 136 монет, то хотя бы на $136-(1+2+\ldots+9) = 91$ из них написано число большее девяти. Так как есть всего десять таких возможных чисел, по принципу Дирихле мы получаем, что хотя бы одно из чисел встретится не меньше десяти раз.

Задача 5. Гражданин Сахарный О.Н. купил большую коробку своих любимых конфет и хочет выдавать их соседским детям за хорошее поведение. Однако, перед тем, как дать конфеты первому ребёнку, он съел половину конфет в коробке сам. Из тех конфет, которые остались после выдачи первому ребёнку, он съел ещё половину. Выдав конфет второму ребёнку, он съел половину от оставшихся конфет, и отдал все оставшиеся после этого конфеты третьему ребенку. Сколько конфет было в коробке изначально, если известно, что каждый ребёнок получил ровно по три конфеты?

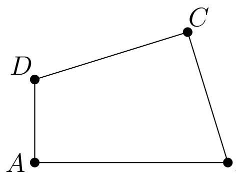
Ответ. 42

Решение. Обозначим изначальное количество конфет через n. Тогда процесс выдачи конфет может быть записан следующим уравнением:

$$\left(\left(\frac{n}{2}-3\right)\cdot\frac{1}{2}-3\right)\cdot\frac{1}{2}-3=0.$$

Решив уравнение, находим $n=42$.

Задача 6. Дан четырёхугольник $ABCD$ с прямыми углами A и C. Известно, что $BC=6$, $CD=8$ и $DA=2$. Найдите площадь $ABCD$.



Ответ. $24+4\sqrt{6}$

Решение. По теореме Пифагора получаем $BD=\sqrt{6^2+8^2}=10$. Применив теорему Пифагора ещё раз, находим

$$AB=\sqrt{BD^2-AD^2}=\sqrt{10^2-2^2}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}.$$

Значит площадь $ABCD$ равна

$$\frac{1}{2}(6\cdot 8+2\cdot 4\sqrt{6})=24+4\sqrt{6}.$$

Задача 7. Васин принтер имеет функции односторонней и двусторонней печати. Односторонняя печать занимает три секунды на страницу, двусторонняя — девять секунд на лист (две страницы). Вася хочет распечатать восемнадцатистраничную статью так, чтобы текст был напечатан на обеих сторонах листа. У него есть два варианта: распечатать все страницы с помощью двусторонней печати или распечатать только страницы с нечётными номерами, положить листы обратно в принтер и допечатать страницы с чётными номерами. Вася подсчитал, что оба варианта займут у него одно и то же количество времени. Сколько секунд требуется Васе, чтобы положить листы обратно в принтер?

Ответ. 27

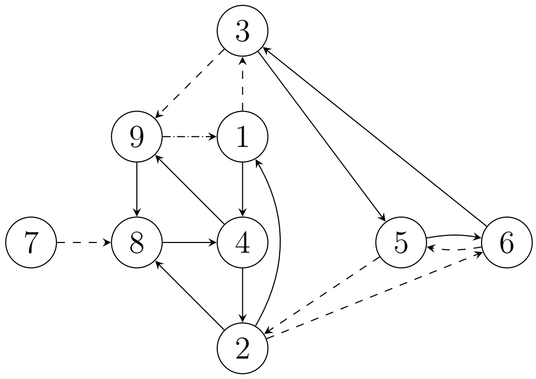
Решение. Всего Вася хочет распечатать девять листов бумаги. В таком случае двусторонняя печать заняла бы $9\cdot 9=81$ секунд. С другой стороны, общее время односторонней печати получается равным $2\cdot 3\cdot 9=54$ секундам. Значит Вася кладёт листы обратно в принтер за $81-54=27$ секунд.

Задача 8. Найдите все девятизначные числа A такие, что:

- каждая из цифр $1,\ldots,9$ входит в запись числа A ровно один раз;
- всякое двузначное число, образованное двумя соседними цифрами числа A (именно в том порядке, в каком они расположены в A), делится на 7 или на 13.

Ответ. 784913526

Решение. Построим диаграмму из цифр $1,\ldots,9$ так, что стрелка из цифры x ведет в цифру y тогда и только тогда, когда двузначное число $\overline{xy}$ делится на 7 или 13.

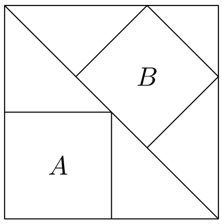


(Сплошная линия обозначает делимость на 7, пунктир — делимость на 13, точка-тире — делимость и на 7, и на 13.) Из диаграммы видно, что любое искомое число должно начинаться с 784. Если следующая цифра 9, то дальше непременно должны следовать 1, 3, 5, 2 и 6 именно в этом порядке. Таким образом, мы находим одно решение 784913526.

Если же следующая цифра после 784 — не 9, а 2, то возникают следующие два случая. Если продолжать с 1, то дальше будет или 9 и тупик, или 3, 5, 6 и тупик. Если продолжать с 6, то тупик получается или после 5, или после 3, 5, или после 3, 9.

Значит, подходящее число всего одно, и это 784913526.

Задача 9. Два квадрата расположены внутри большего квадрата так, как показано на рисунке. Найдите площадь квадрата A, если площадь квадрата B равна 48.



Ответ. 54

Решение. Треугольники, прилежащие к сторонам квадрата B, равнобедренны. Следовательно, сторона B, лежащая на диагонали большого квадрата, составляет одну треть ее длины. Значит, если s - длина стороны большого квадрата, то длина стороны B составляет $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot s$, а длина стороны A равна $\frac{1}{2} \cdot s$. Значит, отношение площадей вписанных квадратов равно

$$\frac{s^2}{4} : \frac{2 \cdot s^2}{9} = \frac{9}{8}$$

и площадь квадрата A составляет $48 \cdot \frac{9}{8} = 54$.

Задача 10. У Фионы есть два куба: первый с ребром 9 см, составленный из белых единичных кубиков (то есть кубиков с ребром 1 см), а второй с ребром 10 см, составленный из чёрных единичных кубиков. Из имеющихся единичных кубиков Фиона хочет построить куб с ребром 12 см. Какая минимальная площадь поверхности этого куба гарантированно будет чёрной?

Ответ. 0

Решение. У Фионы $9^3 = 729$ белых и $10^3 = 1000$ черных кубиков. Чтобы построить поверхность куба со стороной 12, требуется $12^3 - 10^3 = 1728 - 1000 = 728$ кубиков. То есть, она может построить куб со стороной 12, вся поверхность которого будет белой, и ответ к задаче 0.

Задача 11. Проведя контрольную, учитель математики пришёл к неутешительному выводу: ровно десять из его учеников не умеют умножать дроби, четырнадцать не умеют их складывать, семнадцать не умеют их вычитать. Более того, каждый школьник не обладал хотя бы одним из этих трёх умений, и нашлось шесть школьников, которые не умели ничего из перечисленного. Какое наибольшее количество учеников могло быть в классе?

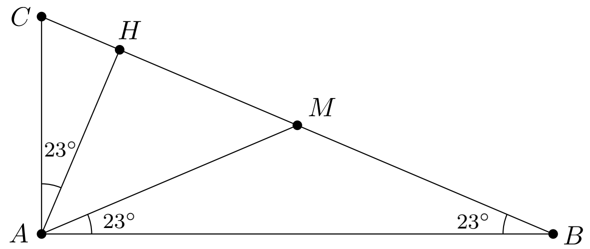
Ответ. 29

Решение. Рассмотрим класс, удовлетворяющий требованиям задачи. Предположим, что в нём есть ученик Глеб, которые не умеет ровно две вещи из трех. Превратим его в двух учеников Глеб А и Глеб Б, каждый из которых не умеет только одну из тех вещей, которые не умел Глеб. Получится класс большего размера, удовлетворяющий условиям задачи. Значит в классе наибольшего размера, удовлетворяющем условиям задачи, нет учеников, котороые бы не умели ровно две вещи. Просуммируем все «неумения» $10 + 14 + 17 = 41$. Шесть учеников, не умеющих ничего, посчитаны трижды, все остальные по одному разу. Значит, общее число учеников равно $41 - 2 \cdot 6 = 29$.

Задача 12. Один из углов прямоугольного треугольника равен $23°$. Найдите величину угла (в градусах) между медианой и высотой, проведёнными из вершины прямого угла.

Ответ. 44

Решение. Обозначим треугольник ABC, пусть $\angle BAC = 90°$ и $\angle CBA = 23°$. Обозначим основания медианы и высоты, опущенных из A, через M и H, соответственно.



Так как в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы, треугольник ABM равнобедренный. Значит $\angle BAM = 23°$. Так как треугольник AHC подобен треугольнику ABC, получаем $\angle HAC = 23°$. Наконец, $\angle MAH = 90° - 2 \cdot 23° = 44°$.

Задача 13. Натуральные числа a и b таковы, что $20a + 19b = 365$. Чему равно выражение $20b + 19a$?

Ответ. 376

Решение. Поскольку a и b положительны, то $a, b \leq 20$. Прибавив b к обеим частям исходного равенства, получим $20(a + b) = 365 + b$. Так как левая часть делится на 20, то и правая часть тоже делится на 20 и $365 < 365 + b \leq 385$. Значит $365 + b = 15$, откуда получаем $a = 4$. Наконец, $20b + 19a = 380 - a = 376$.

Задача 14. Правильный 2018-угольник имеет 2033135 диагоналей. На сколько больше диагоналей имеет правильный 2019-угольник? Сторона не считается диагональю.

Ответ. 2017

Решение. Заметим, что правильность многоугольника не влияет на количество диагоналей. Поэтому будем считать, что правильный 2019-угольник получен из правильного 2018-угольника добавлением новой вершины на середину одного из ребер. Новая вершина должна быть соединена с 2016 из оставшихся (кроме соседей), кроме того, её соседи должны быть соединены диагональю. Всего получается 2017 новых диагоналей.

Задача 15. Найдите все действительные числа x, удовлетворяющие равенству $(x^2 - 4x + 5)^{x^2+x-30} = 1$.

Ответ. 2, 5, -6

Решение. Для того, чтобы a^b было равно единице, требуется выполнение хотя бы одного из условий $a = 1$ и $b = 0$. В первом случае получаем уравнение $x^2 - 4x + 5 = 1$, которое можно переписать как $(x - 2)^2 = 0$, откуда $x = 2$. Во втором случае получаем уравнение $x^2 + x - 30 = (x - 5)(x + 6) = 0$ с корнями 5 и -6. Таким образом, решения уравнения: 2, 5, -6.

Задача 16. Сколькими способами можно написать в ряд числа 1, 2, 3, 4 (использовав каждое ровно один раз) так, чтобы при зачеркивании любого из чисел оставшаяся последовательность не была ни возрастающей, ни убывающей? Например, 1423 не подходит, так как при зачеркивании 4 получается возрастающая последовательность 123.

Ответ. 4

Решение. Предположим, что первая цифра равна 1. Цифра 4 должна идти второй, так как иначе можно получить возрастающую последовательность $1x4$. Число 1423 не подходит, так как можно получить последовательность 123. Число 1432 не подходит, так как можно получить последовательность 432. Значит, 1 не может быть первой цифрой, а в силу симметрии не может быть и последней. Аналогичное рассуждение показывает, что 4 не может быть ни первой, ни последней цифрой.

Рассматривая упорядочивания 14 и 41, получаем четыре варианта:

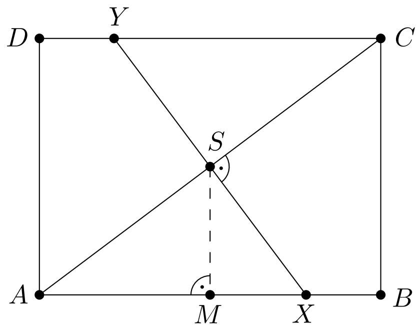
$$2143,\ 3142,\ 2413,\ 3412.$$

Несложно убедиться, что они подходят.

Задача 17. Дан прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8\,\text{см}$ и $BC = 6\,\text{см}$. Срединный перпендикуляр к AC пересекает стороны AB и CD в точках X и Y. Найдите длину XY (в сантиметрах).

Ответ. $\frac{15}{2}$

Решение. По теореме Пифагора получаем $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$. Обозначим середину AC через S. Тогда $AS = 5$.



Так как $\angle CAB = \angle SAX$ и $\angle XSA = \angle CBA = 90°$, треугольники ASX и ABC подобны. Значит $SX : AS = BC : AB$, откуда

$$SX = \frac{BC \cdot AS}{AB} = \frac{15}{4}.$$

Искомая длина равна $XY = 2 \cdot SX = \frac{15}{2}$.

Задача 18. В ребусе $FOUR + FIVE = NINE$ каждая буква соответствует цифре, при этом различные буквы соответствуют различным цифрам. Более того, известно что

- $FOUR$ делится на 4,
- $FIVE$ делится на 5,
- $NINE$ делится на 3.

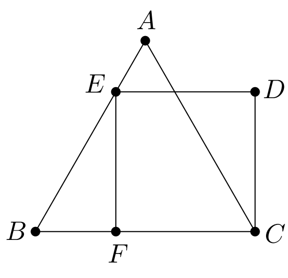
Чему может быть равно $NINE$ (найдите все варианты)?

Ответ. 3435

Решение. Так как $R + E$ заканчивается на E, получаем $R = 0$. Так как $FIVE$ делится на 5 и $R = 0$, получаем $E = 5$. Из разряда сотен, учитывая, что цифра 0 уже занята, получаем, что $O = 9$ и происходит перенос из разряда десятков в разряд сотен и из разряда сотен в разряд тысяч. Значит, $U + V$ больше десяти, и N является нечетной цифрой, отличной от единицы. Так как цифра 9 уже занята, $U + V \leq 7 + 8 = 15$. Так как 5 тоже занята, $N = 3$. Из делимости на 4 получаем $U = 6$. Значит, $V = 7$ и $F = 1$.

Так как число $NINE$ делится на 3, его сумма цифр $N + I + N + E = 3 + I + 3 + 5 = 11 + I$ должна делиться на 3. Из трех подходящих для I цифр 1, 4 и 7 только 4 всё ещё на занята. Таким образом, единственное решение ребуса $1960 + 1475 = 3435$, то есть $NINE = 3435$.

Задача 19. Даны правильный треугольник ABC и квадрат $CDEF$ такие, что E лежит на отрезке AB, и F лежит на отрезке BC. Известно, что периметр $CDEF$ равен 4. Чему равен периметр ABC?



Ответ. $3 + \sqrt{3}$

Решение. Обозначим точку пересечения AC и DE через G. Так как $CD = EF$, $\angle EFB = \angle CDG = 90^\circ$ и $\angle BEF = \angle DCG = 30^\circ$, треугольники BEF и GCD равны. В прямоугольном треугольнике с углами 30° и 60° меньшая сторона равна половине гипотенузы, а значит, $BE = 2BF$. По теореме Пифагора $BE^2 = EF^2 + BF^2$. Подставив $EF = 1$, находим $BF = \sqrt{3}/3$. Таким образом, сторона ABC равна $1 + \sqrt{3}/3$, а значит периметр равен $3 + \sqrt{3}$.

Задача 20. Даны два вещественных числа a и b. При каких значениях a уравнение $x^3 - ax^2 + 588x - b = 0$ может иметь вещественный корень кратности три?

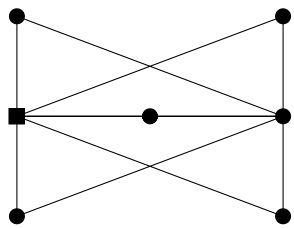
Ответ. 42, -42

Решение. Пусть r является искомым корнем кратности три, тогда

$$(x-r)^3 = x^3 - 3rx^2 + 3r^2x - r^3 = x^3 - ax^2 + 588x - b.$$

Сравнивая коэффициенты при степенях x, получаем $3r^2 = 588$, то есть $r = \pm 14$. Отсюда $a = 3r = \pm 42$.

Задача 21. Приехав в Венецию, Семён желает посетить острова, соединённые системой платных мостов, схема соединения изображена ниже. Из-за уникального вида на Адриатическое море с каждого моста наш турист хочет посетить их все. При этом для экономии средств он надеется пройти по каждому мосту ровно один раз. Сколькими способами Семён может спланировать своё пешеходное путешествие, если известно, что его путь начнётся с острова, обозначенного квадратом? Семён, к сожалению, не умеет перепрыгивать с одного моста на другой, находясь вне суши. Вместе с тем ему не запрещено посещать один и тот же остров несколько раз.



Ответ. 120

Решение. Заметим, что остров, обозначенный квадратом, и самый правый остров посередине (назовем их спецострова) обладают следующим отличительным свойством: во-первых, все мосты ведут к одному из них, а во-вторых, от каждого другого острова к ним ведет ровно два моста. Таким образом, любой путь между спецостровами всегда проходит через один из обычных островов. Значит, путешествие Семёна полностью задаётся порядком его посещения обычных островов, т. е. может быть совершено одним из $5! = 120$ способов.

Задача 22. Найдите количество упорядоченных пар натуральных чисел (m, n) с наименьшим общим кратным, равным 2000.

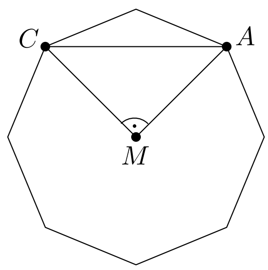
Ответ. 63

Решение. Рассмотрим два случая. Первый случай: ни одно из чисел не равняется $2000 = 2^4 \cdot 5^3$. Тогда одно из чисел обязательно равно $2^4 \cdot 5^k$ при $k \in \{0, 1, 2\}$, а другое — $2^l \cdot 5^3$ при $l \in \{0, 1, 2, 3\}$. С учетом двух вариантов упорядочения находим 24 пары таких чисел. Второй случай: одно из чисел равно 2000. Тогда другое число может быть любым из $(4+1) \cdot (3+1) = 20$ делителей числа 2000. С учетом порядка имеем $2 \cdot 20 - 1 = 39$ пар; мы вычитаем единицу из-за пары $(2000, 2000)$, посчитанной дважды. Суммарно получаем $24 + 39 = 63$ пары.

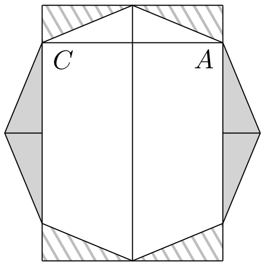
Задача 23. Найдите площадь правильного восьмиугольника $ABCDEFGH$, если дано, что $AC = 7\sqrt{2}$.

Ответ. $98\sqrt{2}$

Решение. Обозначим через M центр описанной вокруг восьмиугольника окружности. Поскольку $\angle AMC = \frac{2}{8} \cdot 360^\circ = 90^\circ$, радиус описанной окружности равен 7, а диаметр — 14.



Перекладыванием частей фигуры (см. рисунок ниже) получаем прямоугольник той же площади, что и наш восьмиугольник. Площадь прямоугольника равна произведению AC и диаметра окружности, т. е. $14 \cdot 7\sqrt{2} = 98\sqrt{2}$.



Задача 24. Четыре приятеля решили изучать иностранные языки. Они смогли найти курсы по изучению абхазского, бурятского, венгерского и грузинского языков. Из этих языков каждый из приятелей хочет выучить ровно три. Сколькими способами приятели могут выбрать курсы так, чтобы хотя бы один язык они учили все вместе?

Ответ. 232

Решение. Заметим, что для каждого из приятелей есть ровно 4 способа выбрать тройку посещаемых курсов, это эквивалентно выбору языка, который не будет изучаться. Итого имеем $4^4 = 256$ вариантов выбора тройки курсов для всех четырёх приятелей без учёта последнего условия задачи.

Теперь посчитаем количество выборов курсов, при которых приятели никакой язык не будут учить вместе. Последнее условие возможно, только если для каждого из языковых курсов есть в точности один человек, не посещающий его. Значит, таких выборов ровно $4! = 24$.

Отсюда заключаем, что количество способов выбора приятелями языковых курсов, удовлетворяющих условию задачи, равно $256 - 24 = 232$.

Задача 25. Оля загадала натуральное число n, в запись которого не входит ноль. Далее, Яло умножила n на число, состоящее из того же набора цифр, но записанных в обратном порядке. Девочки заметили, что это произведение ровно на тысячу больше, чем произведение всех цифр числа n. Найдите все возможные варианты числа n.

Ответ. 24, 42

Решение. Ясно, что запись числа n состоит хотя бы из двух цифр. Если n есть в точности двузначное число, т. е. $n = \overline{ab}$ для ненулевых цифр a и b, тогда условие задачи может быть выражено следующим образом:

$$(10a + b)(10b + a) = 1000 + ab$$

или

$$a^2 + b^2 = 10(10 - ab).$$

Поскольку в правой части равенства должно быть положительное число, получаем условие $ab < 10$. Небольшим перебором находим, что $a = 2$, $b = 4$ или $a = 4$, $b = 2$.

Предположим, что запись числа n состоит из $k \geq 3$ цифр. Тогда произведение n и числа, полученного из n инвертированием цифр, не меньше, чем $(10^{k-1})^2$, что превосходит $1000 + 10^k$. Приходим к противоречию.

Задача 26. В параллелограмме $ABCD$ на стороне AD выбрана такая внутренняя точка T, что TC — биссектриса $\angle BCD$. На стороне AB выбрана точка E так, что $\angle AET = 40°$. Найдите $\angle CDA$ (в градусах), если известно, что $\angle CTE = 75°$.

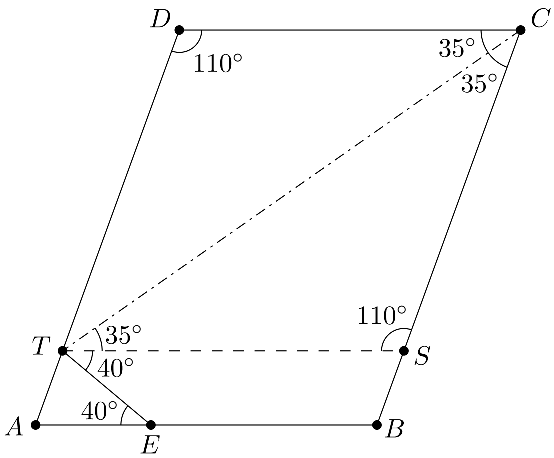
Ответ. 110

Решение. Выберем на стороне BC точку S таким образом, что отрезок TS параллелен AB. Тогда $\angle ETS = 40°$ и

$$\angle DCT = \angle STC = \angle CTE - \angle STE = 35°.$$

Поскольку CT является биссектрисой $\angle DCB$, треугольник CTS равнобедренный, $\angle DCT = \angle TCS$ и $\angle DCB =$

$2 \cdot 35° = 70°$. Значит, $\angle CDA = 180° - \angle DCB = 110°$.



Задача 27. Два дворянских рода встретились на совместном пиру. В каждом из родов есть хотя бы один мужчина и хотя бы одна женщина. Каждый член рода поздоровался с каждым членом другого рода. При этом когда здоровались двое мужчин — они жали друг другу руки, а когда здоровались две женщины либо один мужчина и одна женщина — они кланялись друг другу. Всего на пиру было совершено 85 рукопожатий и 162 поклона (мы считаем за один поклон ситуацию, в которой два человека поклонились друг другу). Сколько женщин присутствовало на пиру?

Ответ. 10

Решение. Пусть в родах m_1, m_2, w_1, w_2 мужчин и женщин соответственно. Так как $m_1 m_2 = 85 = 5 \cdot 17$, без ограничения общности можем считать, что $m_1 = 5$ and $m_2 = 17$ (легко показать, что ситуация, в которой в одном из родов ровно один мужчина, невозможна). Далее, всего приветствий было совершено $85 + 162 = 247$, и из того, что

$$(m_1 + w_1)(m_2 + w_2) = 247 = 13 \cdot 19,$$

мы получаем, что $m_1 + w_1 = 13$, $m_2 + w_2 = 19$ (остальные разбиения на делители опять можно легко исключить). Следовательно, $w_1 = 8$, $w_2 = 2$ и ответ к задаче $8 + 2 = 10$.

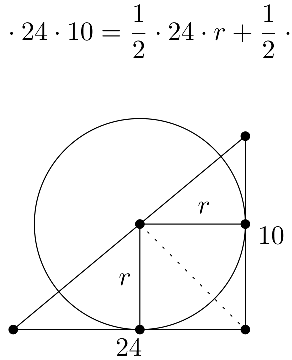
Задача 28. Рассмотрим треугольник со сторонами 10, 24 и 26. Пусть c — окружность, касающаяся двух меньших сторон треугольника, и центр которой расположен на третьей стороне этого же треугольника. Найдите радиус c.

Ответ. 120/17

Решение. Согласно теореме Пифагора, треугольник прямоугольный. Отрезок, соединяющий вершину прямого угла с центром c, разделяет исходный треугольник на два маленьких. Радиусы, опущенные к точкам касания c с катетами, перпендикулярны этим катетам, и, следовательно, являются высотами в маленьких треугольниках. Пусть r — длина радиуса. Посчитаем площадь большого треугольника двумя способами, использующими параметры большого треугольника и двух маленьких:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 10 = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot r + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot r,$$

откуда следует $r = 120/17$.



Задача 29. Маргарита пришла в казино с десятью тугриками. Игровой автомат «Честный» в казино работает следующим образом: игрок вставляет в автомат монеты общей стоимости один тугрик, после чего либо с вероятностью p игрок выигрывает джек-пот, либо получает обратно 0.5 тугрика. Маргарита решила играть с автоматом до тех пор, пока не выиграет джек-пот или пока у неё не останется меньше одного тугрика. Найдите наименьшую вероятность p такую, что вероятность выигрыша джек-пота будет хотя бы 0.5.

Ответ. $1-\sqrt[19]{0.5}$

Решение. Маргарита может проиграть автомату не более 19 раз подряд, так как, имея лишь полтугрика, сыграть ещё раз невозможно. Так как вероятность проигрыша равна $1-p$, вероятность 19 игр подряд без джек-пота равна $(1-p)^{19}$. Чтобы вероятность выиграть джек-пот была хотя бы 0.5, необходимо, чтобы $(1-p)^{19} \leq 0.5$. Это неравенство эквивалентно $p \geq 1-\sqrt[19]{0.5}$, а значит, $1-\sqrt[19]{0.5}$ и есть искомое наименьшее значение p.

Задача 30. Найдите все четырёхзначные натуральные числа $\overline{abcd}$, равные $a^a+b^b+c^c+d^d$. Все цифры отличны от нуля.

Ответ. 3435

Решение. Так как $6^6 \geq 10000$, все цифры не больше 5. С другой стороны, если бы все цифры были равны 4, то равенство не выполнялось бы, а если бы было не больше трёх цифр 4, то максимально возможное число могло бы быть $3\cdot 4^4+3^3 < 1000$. Следовательно, хотя бы одна из цифр равна 5. Так как $5^5 = 3125$, то цифра 5 встречается ровно один раз (иначе, первая цифра числа должна была бы быть больше 5). Так как $3000 < 5^5 < 5^5+3\cdot 4^4 < 4000$, первая цифра числа равна 3.

Итак, искомое число может быть равно, как минимум, $5^5+3^3+2\cdot 1^1 = 3154$, что не подходит (и также не подходит число 3155). Следующее число, не содержащее нули и цифры, большие 5, это $3211 > 5^5+3\cdot 3^3$, а значит, хотя бы одна из цифр должна быть равна 4. Цифра 4 может быть использована только один раз, иначе вторая цифра числа должна превосходить 5. Рассматривая три оставшихся случая, получаем, что число 3435 – единственное решение.

Задача 31. Сколько существует таких наборов из пяти двузначных чисел, что каждая из цифр от 0 до 9 встречается ровно один раз и каждое из чисел чётное, но не делится на 3? Наборы, отличающиеся только порядком чисел, считаются равными.

Ответ. 16

Решение. Все пять чисел должны заканчиваться на чётные цифры. Для того, чтобы избежать делимости на три, числа, заканчивающиеся на 0 или 6, должны начинаться с 1, 5 или 7; числа, заканчивающиеся на 2 или 8, должны начинаться с 3, 5 или 9; число, заканчивающееся на 4, должно начинаться с 1, 3, 7 или 9. Если число, заканчивающееся на 4, равно 14, то остаётся только две возможности для цифры десятков у чисел, заканчивающихся на 0 и 6 (либо 50 и 76, либо 56 и 70), и следовательно, только две возможности для цифры десятков у чисел, заканчивающихся на 2 и 8 (либо 32 и 98, либо 38 и 92), итого четыре варианта суммарно. Аналогичное рассуждение можно провести для остальных вариантов цифры десятков у числа, заканчивающегося на 4. Так как этих вариантов всего 4, то общее число подходящих наборов из пяти чисел равно $4\cdot 4 = 16$.

Задача 32. Найдите все натуральные числа n такие, что

$$\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{35} \right\rfloor = 2019.$$

Примечание: Выражение $\lfloor x \rfloor$ обозначает целую часть числа x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x.

Ответ. 5439

Решение. Пусть

$$f(n) = \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{35} \right\rfloor.$$

Видно, что f — неубывающая функция от переменной n. Далее, $f(n)-f(n-1) = 1$, если n делится ровно на одно из чисел 5 и 7, и $f(n)-f(n-1) = 3$, если n делится на 35; во всех остальных случаях верно $f(n) = f(n-1)$. Поскольку

$$f(n) \leq \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{35}\right)n = \frac{13}{35}n,$$

то мы получаем, что

$$n \geq \frac{35}{13}\cdot 2019$$

и, так как n — натуральное число, $n \geq 5436$. Далее, $f(5436) = 2018$; ближайшее большее число, делящееся на 5, это 5440, и ближайшее большее число, делящееся на 7, это 5439, при этом $f(5439) = 2019$, $f(5440) = 2020$. Следовательно, 5439 — единственное решение.

Задача 33. Сколько натуральных чисел n удовлетворяют следующему условию: найдутся натуральные $x, y \leq 1\,000\,000$ (не обязательно различные) такие, что

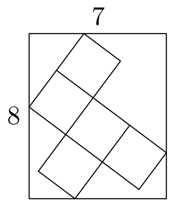
$$n = S(x) = S(y) = S(x + y),$$

где $S(a)$ обозначает сумму цифр числа a?

Ответ. 6

Решение. Поскольку целое число a даёт при делении на 9 тот же остаток, что и $S(a)$, заключаем, что n, x, y и $x+y$ дают одинаковый остаток при делении на 9. Отсюда x, а значит, и n делятся на 9. Заметим, что наибольшая сумма цифр числа, не превосходящего один миллион, равна 54. Поэтому n может принимать только какие-то из значений: 9, 18, 27, 36, 45, 54. Покажем, что все эти значения n удовлетворяют условиям задачи. Действительно, для $n = 9m$, $1 \leq m \leq 6$, достаточно выбрать $x = y = 10^m - 1$.

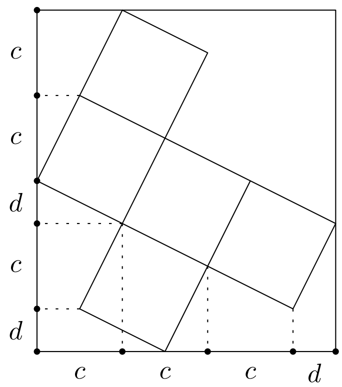
Задача 34. Пентамино, составленное из пяти квадратов со стороной a, вписано в прямоугольник размерами 7×8 (см. рисунок).



Найдите a.

Ответ. $\sqrt{5}$

Решение. Спроецируем стороны квадрата на стороны прямоугольника, обозначим через c и d соответственно величину более длинной и более короткой проекций.



Тогда

$$\begin{aligned} 3c + 2d &= 8, \\ 3c + d &= 7, \end{aligned}$$

значит, $c = 2$ и $d = 1$. По теореме Пифагора находим

$$a = \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{5}.$$

Задача 35. Паше подарили прямоугольную плитку шоколада, составленную из 5 рядов по 3 квадратных дольки. Он кладёт сахар на самую верхнюю левую дольку. Паша ест шоколад по следующему алгоритму (до тех пор, пока шоколад не кончится). На каждом шаге он случайным образом съедает или самый правый столбец, или самый нижний ряд, любой из этих вариантов он выбирает с вероятностью 1/2. С какой вероятностью Паша на последнем шаге съест ровно одну дольку, и это будет долька с сахаром?

Ответ. 15/64

Решение. Переформулируем действия Павла так: мальчик берёт последовательность, состоящую из букв С и Р, общей длины $(5-1)+(3-1) = 6$ и в соответствии с выбранной последовательностью он откусывает от шоколадки Столбец или Ряд. Есть два принципиально различных случая: либо последовательность содержит ровно две С (и четыре Р), и тогда в конце останется в точности сахарная долька, либо количество С или Р совпадает с числом столбцов или рядов соответственно, и тогда вся шоколадка будет съедена. В последнем варианте Паша своим последним укусом не сможет съесть только лишь одну сахарную дольку, так как перед этим не будет съедено необходимое количество столбцов и рядов для формирования единичной дольки.

Всего имеется 2^6 последовательностей С и Р длины 6, и $\binom{6}{2}$ из них содержат ровно две С. Значит, искомая вероятность равна
$$\frac{\binom{6}{2}}{2^6} = \frac{15}{64}.$$

Задача 36. Используя каждую из цифр $1, \ldots, 9$ дважды, Электроник выписывает несколько попарно различных простых чисел так, что их сумма является минимально возможной. Чему равно значение этой суммы?

Ответ. 477

Решение. Никакие простые числа, за исключением 2 и 5, не могут заканчиваться на 5 или чётную цифру. Следовательно, каждая из цифр
$$2, 5, 4, 4, 6, 6, 8, 8$$
появится в каком-то из чисел Электроника хотя бы в разряде десятков. Каждая из оставшихся цифр
$$2, 5, 1, 1, 3, 3, 7, 7, 9, 9$$
появится в каком-то из чисел Электроника хотя бы в разряде единиц. В итоге искомая сумма не меньше, чем
$$10(2+5+4+4+6+6+8+8)+2+5+1+1+3+3+7+7+9+9 = 477.$$
С другой стороны, это значение суммы достижимо на следующем наборе простых чисел:
$$2, 5, 29, 53, 41, 47, 61, 67, 83, 89.$$

Задача 37. У кота Бегемота и Коровьева есть по многочлену, $B(x) = x^2 + 2x + 10$ и $K(x) = x^2 - 8x + 25$. Каждый из них загадал натуральное число, b и k соответственно. Оказалось, что $B(b) = K(k)$. Найдите все возможные значения $|b - k|$.

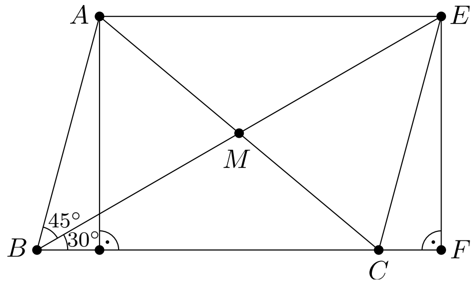
Ответ. 1, 5

Решение. Раскладывая левую часть равенства $B(b) - K(k) = 0$ на множители, получаем $(b+k-3)(b-k+5) = 0$. Отсюда либо $\{b, k\} = \{1, 2\}$, либо $|b - k| = 5$.

Задача 38. В треугольнике ABC высота, опущенная из вершины A на сторону BC или её продолжение, имеет ту же длину, что и медиана, проведённая из вершины B. Известно, что $\angle ABC = 75°$. Найдите отношение $AB : BC$.

Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Решение. Пусть E — точка, симметричная B относительно середины M стороны AC, а F есть перпендикулярная проекция E на прямую BC. Тогда первое условие влечёт $\sin(\angle EBC) = \frac{EF}{BE} = \frac{1}{2}$, и поэтому $\angle EBC = 30°$ (угол EBC не может быть тупым из-за второго условия задачи). Значит, $\angle ABM = \angle ABE = 75° - 30° = 45°$.



Из теоремы синусов, применённой в треугольниках ABM и CBM, получаем
$$\frac{BM}{\sin(\angle BAC)} = \frac{AM}{\sin 45°} = \frac{AM}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$
и
$$\frac{BM}{\sin(\angle BCA)} = \frac{CM}{\sin 30°} = \frac{AM}{\frac{1}{2}}.$$
Деля первое из этих равенств на второе и применяя теорему синусов в треугольнике ABC, находим
$$\frac{AB}{BC} = \frac{\sin(\angle BCA)}{\sin(\angle BAC)} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Задача 39. В игре крестики-нолики два игрока по очереди ставят на свободные клетки таблицы 3×3 свои знаки, один игрок — крестики, другой — нолики. Любой из игроков может начать игру. Игрок, выстроивший три своих фигуры в ряд по вертикали, горизонтали или диагонали, побеждает. Игра завершается вничью, если не осталось свободных мест в таблице и никто из игроков не победил. Сколько существует различных заполнений таблицы таких, что игра заканчивается вничью? Два заполнения ***не*** считаются одинаковыми, если одно из них можно получить из другого вращением или переворачиванием таблицы.

Ответ. 32

Решение. Рассмотрим четыре различных варианта заполнения таблицы в зависимости от того, какой знак стоит в центральной клетке и какой знак задействован пять раз. Пусть в обоих случаях был поставлен крестик (назовём этот вариант «крестик-крестик»), тогда для ничьей мы не можем ставить никакую пару крестиков на одну диагональ или на одну линию. Поэтому мы должны ставить знаки так, как показано на рис. 1. Это заполнение не симметрично ни относительно вращений, ни относительно осевой симметрии. Значит, получаем ровно 8 заполнений в этом варианте.

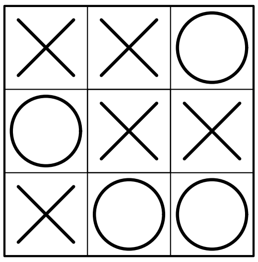


Figure 1

При варианте «крестик-нолик» нам нужно поставить пять ноликов в таблицу с центральным крестиком. Мы не можем поставить нолики во все четыре угла, иначе пятый нолик принесёт победу своему игроку. С другой стороны, на каждой диагонали должен быть хотя бы один нолик. Тем самым мы ставим в углы суммарно либо 2, либо 3 нолика. В каждом из случаев есть единственное заполнение таблицы (см. рис. 2 и рис. 3), причём оба заполнения не симметричны относительно 4 вращений, но обладают осевой симметрией.

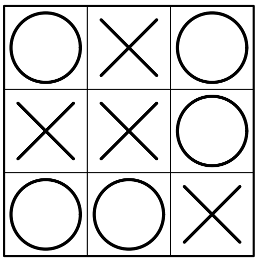


Figure 2

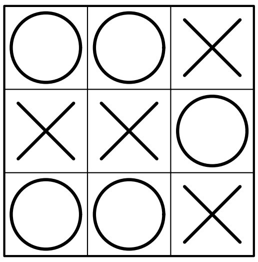


Figure 3

Варианты «нолик-нолик» и «нолик-крестик» аналогичны вариантам, рассмотренным выше. Общее количество заполнений таблицы находим как $2 \cdot (8 + 4 + 4) = 32$.

Задача 40. Найдите наибольшее натуральное число a такое, что никакое натуральное число b не удовлетворяет неравенству

$$\frac{4}{3} < \frac{a}{b} < \frac{25}{18}.$$

Ответ. 32

Решение. Перевернём дроби в неравенстве и получим, что

$$0.72 < \frac{b}{a} < 0.75.$$

Длина промежутка между 0.72 и 0.75 равна $0.03 > 1/34$. Отсюда следует, что для всех $a \geq 34$ решение существует. Для $a = 33$ существует решение $b = 24$ (при этом $b/a = 0.7272\ldots$). Для $a = 32$ решения не существует, так как $24/32 = 0.75$ и $1/32 > 0.03$.

Задача 41. Григорий и Иван совершают велопрогулку по маршруту Москва-Петушки длиной 110 км. В пути им нужно совершить три подъёма. Во время первого привала математически подкованный Иван заметил, что если перемножить три расстояния от Москвы до вершины каждого из подъёмов, получится число, кратное 2261. После некоторого раздумия Григорий добавил, что число, кратное 2261, получится и при перемножении трёх расстояний от Петушков до этих вершин. Через 80 км Григорий и Иван совершили второй привал, и Иван сообщил, что им осталось преодолеть только один подъём до прибытия в Петушки. Считая, что все упомянутые расстояния целые и измеряются в километрах, найдите расстояния от Москвы до каждой вершины.

Ответ. 68, 76, 91

Решение. Пусть A, B и C – расстояния от Москвы до вершин в километрах. Эти числа должны удовлетворять условиям $2261 \mid ABC$ и $2261 \mid (110-A)(110-B)(110-C)$. Поскольку $2261 = 7 \cdot 323 = 7 \cdot 17 \cdot 19$ и $7 \cdot 17 = 119 > 110$, то каждое из этих расстояний задействует не более одного простого множителя из разложения 2261.

Без ограничения общности будем считать, что $7 \mid A$, $17 \mid B$ и $19 \mid C$. Так как те же соображения верны для расстояний $110 - A$, $110 - B$ и $110 - C$, существуют два варианта: $7 \mid (110 - B)$ и $7 \mid (110 - C)$, поскольку $7 \nmid (110 - A)$. В случае $7 \mid (110 - B)$ имеем $19 \mid (110 - A)$, поскольку $19 \nmid (110 - C)$, и, наконец, $17 \mid (110 - C)$. В случае $7 \mid (110 - C)$ имеем $17 \mid (110 - A)$ и $19 \mid (110 - B)$ аналогично.

Так как НОД$(7, 19) = 1$, существует только один способ представить число 110 в виде $a \cdot 7 + b \cdot 19$, где a и b – неотрицательные целые числа: $110 = 13 \cdot 7 + 1 \cdot 19$ (все разложения имеют вид $110 = (13 + 19k) \cdot 7 + (1 - 7k) \cdot 19$ для $k \in \mathbb{Z}$, и коэффициенты являются неотрицательными только при $k = 0$). Аналогично, получаем разложения $110 = 4 \cdot 17 + 6 \cdot 7$ и $110 = 4 \cdot 19 + 2 \cdot 17$. Получаем два решения:

$$A = 13 \cdot 7 = 91, \quad B = 4 \cdot 17 = 68, \quad C = 4 \cdot 19 = 76$$

и

$$A = 6 \cdot 7 = 42, \quad B = 2 \cdot 17 = 34, \quad C = 19.$$

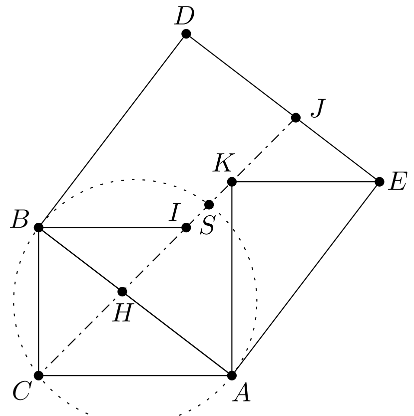
Замечание Ивана во время второй остановки говорит нам, что третья вершина находится на расстоянии как минимум 80 км от Москвы. Следовательно, остаётся только одно решение: 68, 76 и 91.

Задача 42. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C и сторонами $AC = 4 - \sqrt{3}$ и $BC = \sqrt{3}$. Отмечены точки D и E такие, что $ABDE$ является квадратом, не содержащим точку C внутри (но, возможно, на границе). На DE отмечена точка J такая, что $\angle ACJ = 45°$. На CJ отмечена точка K такая, что $AK \parallel BC$. Найдите площадь треугольника JKE.

Ответ. $\frac{3\sqrt{3}}{8}$

Решение.

Заметим, что $\angle EKA = 90°$; более того, треугольники AEK и ABC равны, поскольку $AK = AC$, $AE = AB$ и $\angle EAK = \angle BAC$. Далее, центр S квадрата $ABDE$ лежит на описанной окружности треугольника ABC, так как ASB и ACB – прямые углы. Поскольку $AS = BS$, соответствующие вписанные углы ACS и BCS также равны. Следовательно, S лежит на биссектрисе CJ. Отразим треугольник JKE относительно S; точка E перейдёт в точку B; точка J перейдёт в точку H, являющуюся пересечением AB и CJ; точка K перейдёт в точку I, лежащую на CJ и такую, что $\angle IBC = 90°$.



Получаем, что IBC – равнобедренный прямоугольный треугольник с прямым углом B, и его площадь равна $(\sqrt{3})^2/2 = 3/2$. Обозначая квадратными скобками площади треугольников, получаем, что

$$\frac{[IBC]}{[IBH]} = \frac{IC}{IH} = \frac{IH + HC}{IH} = 1 + \frac{HC}{IH}.$$

Далее, треугольники ACH и BIH подобны с коэффициентом подобия

$$\frac{HC}{IH} = \frac{AC}{IB} = \frac{AC}{BC}.$$

Получаем, что

$$[JKE] = [IBH] = [IBC] \cdot \frac{BC}{AC + BC} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Задача 43. Перед двумя заключёнными стоят две коробки. Заключённым известно, что в одной коробке находятся два белых и один чёрный шарик, а в другой коробке – один белый и два чёрных шарика; однако, им неизвестно, какая из коробок – какая. Заключённые по очереди должны выбрать коробку и не глядя вытащить шарик из неё (шарики не возвращаются после этого в коробку). Если заключённый вытаскивает белый шарик, то он будет отпущен на свободу, в ином случае будет казнён. Второй заключённый видит, какую коробку первый заключённый выбрал и какой шарик он достал. Чему равна вероятность освобождения второго заключённого, если он действует оптимально, а первый заключённый выбирает коробку случайным образом?

Ответ. 5/9

Решение. Обозначим за c цвет шарика, который вытащил первый заключённый, а за o – второй цвет. Тогда вероятность того, что он выбрал коробку с набором цветов c, c, o, равна $2/3$, а вероятность выбора коробки с набором цветов c, o, o равна $1/3$. Если второй заключённый выбирает ту же коробку, что и первый, то он вытащит шарик цвета c с вероятностью

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3},$$

и цвета o с вероятностью

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Если же он выбирает другую коробку, то он вытащит шарик цвета c с вероятностью

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9},$$

и цвета o с вероятностью

$$1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

Если c соответствует белому цвету, то второй выживет, если достанет цвет c. Поскольку $\frac{4}{9} > \frac{1}{3}$, то второму более выгодно выбрать другую коробку, и тогда вероятность его спасения равна $\frac{4}{9}$.

Если c соответствует чёрному цвету, то второй выживет, если достанет цвет o.

Поскольку $\frac{2}{3} > \frac{5}{9}$, то второму более выгодно выбрать ту же коробку, и вероятность его спасения равна $\frac{2}{3}$. Очевидно, что c – белый с вероятностью $\frac{1}{2}$ и чёрный с вероятностью $\frac{1}{2}$, и следовательно, второй заключённый может спастись с вероятностью

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{9}.$$

Задача 44. Найдите наименьшее натуральное число n такое, что среди любых n (не обязательно различных) действительных чисел, лежащих в отрезке $[1, 2019]$, найдутся три числа, соответствующие длинам сторон некоторого невырожденного треугольника.

Ответ. 18

Решение. Для $n < 18$ рассмотрим первые n членов последовательности Фибоначчи, заданной соотношениями $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597.$$

Видно, что в любой тройке из этих чисел наибольшее из них больше либо равно сумме двух других, а значит, эти числа не могут соответствовать длинам сторон никакого невырожденного треугольника. Для $n = 18$, пусть $x_1 \leq \cdots \leq x_{18}$ – выбранные числа. Если никакие три из них не соответствуют никакому невырожденному треугольнику, то

$$x_1, x_2 \geq 1, \quad x_3 \geq x_1 + x_2 \geq 2, \quad x_4 \geq x_3 + x_2 \geq 2 + 1 = 3, \quad \ldots$$

и на каждом шаге мы получаем член вышеупомянутой последовательности Фибоначчи. Аналогично, $x_{18} \geq 987 + 1597 > 2019$, что невозможно в условиях задачи. Искомое число $n = 18$.

Задача 45. Будем обозначать сумму всех положительных делителей натурального числа k через $\sigma(k)$. Найдите наименьшее n такое, что наибольший общий делитель чисел $\sigma(n)$ и $\sigma(n^3)$ не является степенью двойки. Единица считается степенью двойки.

Ответ. $432 = 2^4 \cdot 3^3$

Решение. Напомним, что если число n раскладывается на простые как

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t},$$

то

$$\sigma(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_t + 1).$$

Утверждение о том, что НОД не является делителем двойки, можно переформулировать так: существует нечетное простое число q, делящее $\sigma(n)$ и $\sigma(n^3)$. Так как

$$\sigma(n^3) = (3\alpha_1 + 1)(3\alpha_2 + 1) \cdots (3\alpha_t + 1),$$

это число никогда не делится на три. Значит $q \geqslant 5$. Если бы q являлось делителем $\alpha_i + 1$ и $3\alpha_i + 1$, то оно также делило бы

$$3(\alpha_i + 1) - (3\alpha_i + 1) = 2,$$

что невозможно. Значит существуют различные $i, j \in \{1, \dots, t\}$ такие, что q делит $\alpha_i + 1$ и $3\alpha_j + 1$. Так как мы ищем наименшее число, рассмотрим случай $t = 2$, $i = 1$ и $j = 2$.

Если $q = 5$, то наименьшие возможные значения для α_1 и α_2 равны 4 и 3, соответственно. Взяв наименьшие возможные простые $p_1 = 2$ и $p_2 = 3$, получаем $n = 2^4 \cdot 3^3 = 432$.

Если $q \geq 7$, то $\alpha_1 \geq 6$ и $\alpha_2 \geq 2$, а значит,

$$n \geq 2^6 \cdot 3^2 = 576 > 432.$$

Таким образом, 432 действительно является наименьшим возможным значением n.

Задача 46. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle ACB = 90°$, $AC = 15$ и $BC = 20$. На прямой AB отмечена точка D такая, что $CD \perp AB$. Вписанная окружность t треугольника ACD касается CD в точке T. Окружность c также касается CD в точке T и касается отрезка BC. Обозначим точки пересечения прямой AB с окружностью c через X и Y. Найдите длину XY.

Ответ. $3\sqrt{5}$

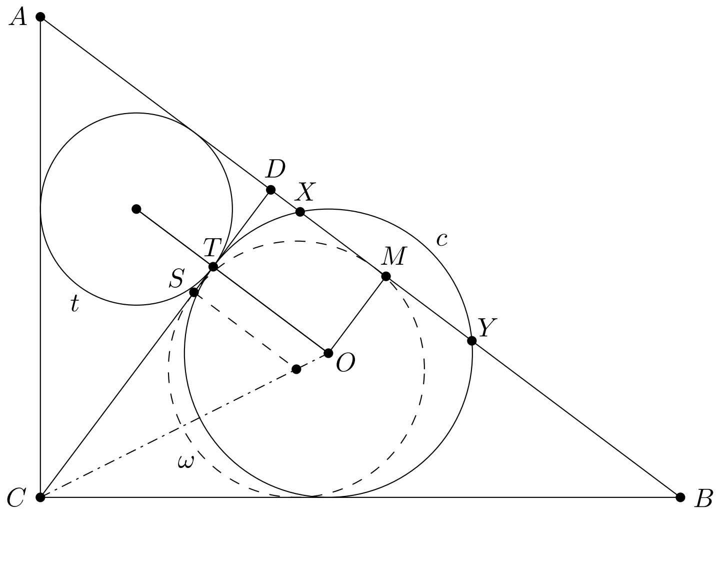
Решение.

По свойствам высоты в прямоугольном треугольнике

$$AD = \frac{AC^2}{AB} = 9, \quad BD = \frac{BC^2}{AB} = 16, \quad CD = \sqrt{AD \cdot BD} = 12.$$

Так как t – вписанная окружность, то её радиус (равный DT) может быть вычислен как частное площади треугольника ACD и его полупериметра: $DT = 54/(36/2) = 3$. Обозначим за ω окружность, вписанную в треугольник BCD. Пусть она касается прямой CD в точке S. Аналогично, её радиус равен $DS = 4$. Гомотетия с центром C и коэффициентом $CT/CS = 9/8$ переводит окружность ω в окружность c. Таким образом, радиус окружности c равен $4 \cdot 9/8 = 9/2$. Пусть M – середина отрезка XY и O – центр окружности c. Поскольку $XO = 9/2$ и $OM = DT = 3$, то по теореме Пифагора получаем

$$XY = 2 \cdot XM = 2\sqrt{\frac{9^2}{2^2} - 3^2} = 6\sqrt{\frac{9}{4} - 1} = 3\sqrt{5}.$$



Задача 47. Каждая клетка доски размера 6×7 покрашена в белый, зелёный, красный или синий цвет. Будем называть такую раскраску *привлекательной*, если четыре клетки любого квадрата размера 2×2 покрашены в разные цвета. Сколько существует привлекательных раскрасок?

Ответ. 1128

Решение. Начнём с двух наблюдений:

- Так как цвета любых двух соседних клеток различны, если в какой-то строке присутствует более двух цветов, то в этой строке найдутся три клетки подряд, окрашенные в различные цвета.
- Такая тройка однозначно задаёт раскраску трёх соответствующих столбцов (например, под и над тройкой $1-2-3$ обязательно должна идти тройка $3-4-1$). Более того, в каждом из этих трёх столбцов будет всего по два цвета.

То же самое верно для столбцов. Таким образом, не может получиться так, что в какой-то строке больше двух цветов и в каком-то столбце больше двух цветов.

Вычислим количество раскрасок, в которых в каждой строке только два цвета. Необходимо и достаточно выбрать пару цветов для первой строки (пары цветов для остальных строк тогда определяются автоматически) и цвет первой клетки в каждой из шести строк. Получается $C_4^2 \cdot 2^6 = 6 \cdot 2^6$ раскрасок. Аналогично, количество раскрасок, в которых в каждом столбце два цвета, равно $6 \cdot 2^7$. Если мы сложим полученные количества, то раскраски, использующие по два цвета по всех строках и столбцах, будут посчитаны дважды. Каждая такая раскраска однозначно определяется цветами верхнего левого квадрата 2×2, то есть всего есть $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ таких раскрасок.

В итоге получаем $6 \cdot 2^6 + 6 \cdot 2^7 - 24 = 1128$ раскрасок.

Задача 48. Казачью сотню построили в ряд. Первому казаку выдали 4 грамма пороха, второму — 8 граммов пороха, …, сотому казаку дали 400 граммов пороха. Первый казак передаёт второму одну треть своего пороха, т. е. второй казак получает $4/3$ грамма пороха. Далее второй казак передаёт треть своего пороха (т.е. $\frac{1}{3}(8+\frac{4}{3})$) третьему, и так до тех пор, пока 99-й казак не передаст сотому треть своего пороха. Сколько граммов пороха окажется у сотого казака в конце?

Ответ. $597 + 3^{-99}$

Решение. Далее все массы даны в граммах. После первой передачи у второго казака $8 + 4/3$ пороха. После второй передачи у третьего казака окажется $12 + 8/3 + 4/3^2$ пороха, а после третьей — у четвёртого казака будет $16 + 12/3 + 8/3^2 + 4/3^3$ пороха. Легко заметить, что в конце концов сотый казак получит

$$4\left(100 + \frac{99}{3^1} + \frac{98}{3^2} + \frac{97}{3^3} + \cdots + \frac{2}{3^{98}} + \frac{1}{3^{99}}\right)$$

граммов пороха. Обозначим

$$S = 100 + \frac{99}{3^1} + \frac{98}{3^2} + \frac{97}{3^3} + \cdots + \frac{2}{3^{98}} + \frac{1}{3^{99}}.$$

Представим сумму S в следующем виде:

$$\begin{aligned} S = \quad & 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{98}} + \frac{1}{3^{99}} \\ & + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{98}} \\ & \quad \vdots \\ & + 1 + \frac{1}{3} \\ & + 1. \end{aligned}$$

Применяя формулу суммы геометрической прогрессии

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} = \frac{1 - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right),$$

выражаем

$$\begin{aligned} S &= \frac{3}{2}\left(100 - \left(\frac{1}{3^{100}} + \frac{1}{3^{99}} + \cdots + \frac{1}{3}\right)\right) \\ &= \frac{3}{2}\left(100 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3^{99}} + \frac{1}{3^{98}} + \cdots + 1\right)\right) \\ &= \frac{3}{2}\left(100 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{100}}\right)\right). \end{aligned}$$

Окончательно находим количество пороха, которое получит сотый казак, как

$$4S = 4 \cdot \frac{3}{2}\left(100 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{100}}\right)\right) = 600 - 3 + \frac{1}{3^{99}} = 597 + 3^{-99}.$$

Задача 49. Найдите все натуральные числа $n \geq 3$, при которых выражение

$$\frac{(n-1)^{n-1} - n^2 + 2019 \cdot (n-1)}{(n-2)^2}$$

является целым числом.

Ответ. 3, 4, 5, 6, 8, 14

Решение. Мы хотим, чтобы число n удовлетворяло условию $(n-2)^2 \mid (n-1)^{n-1} - n^2 + 2019 \cdot (n-1)$. Если мы добавим $(n-2)^2$ к правой части, то делимость не изменится, а мы сможем избавиться от слагаемого n^2, так как $n^2 - 4n + 4 - n^2 = -4(n-1)$. Получаем эквивалентное условие

$$(n-2)^2 \mid (n-1)^{n-1} + 2015 \cdot (n-1).$$

Так как $n-1$ и $n-2$ являются взаимно простыми, можно разделить правую часть условия на $n-1$. Сделаем замену $t = n-2$. Тогда $t^2 \mid (t+1)^t + 2015$. При помощи бинома Ньютона получаем

$$t^2 \mid t^t + \binom{t}{t-1} t^{t-1} + \cdots + \binom{t}{2} t^2 + \binom{t}{1} t + 1 + 2015,$$

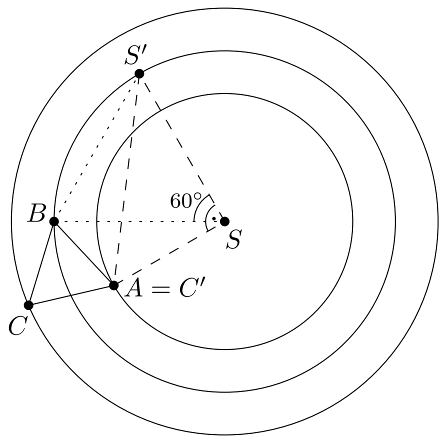
а значит, достаточным условием является $t^2 \mid 2016$. Разложением числа 2016 на простые множители является $2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, и, следовательно, числа 1, 2, 3, 4, 6, 12 являются единственно возможными значениями t. Сделав обратную замену $n = t+2$, получаем, что искомые числа – 3, 4, 5, 6, 8, 14.

Задача 50. Даны три концентрические окружности с радиусами 3, 4 и 5. Рассмотрим правильный треугольник ABC такой, что на каждой из этих окружностей лежит ровно одна вершина этого треугольника. Найдите все возможные значения длины стороны треугольника ABC.

Ответ. $\sqrt{25 - 12\sqrt{3}}$, $\sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$

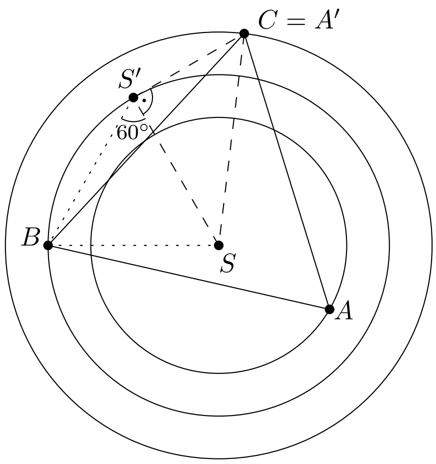
Решение. Пусть вершина A лежит на окружности с радиусом 3, вершина B – на окружности с радиусом 4, вершина C – на окружности с радиусом 5, и S – общий центр всех окружностей. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть центр S расположен вне треугольника ABC. Повернув точки C и S на $60°$ относительно точки B, мы получим точки $C' = A$ и S'. Треугольник SBS' – равносторонний с длиной стороны 4, и $S'C' = SC = 5$. Стороны треугольника $SS'C'$ имеют длины 3, 4 и 5, и значит, $\angle S'SC' = 90°$. Следовательно, $\angle BSA = \angle S'SC' - \angle S'SB = 30°$. Применяя теорему косинусов к треугольнику BSA, получаем $AB = \sqrt{25 - 12\sqrt{3}}$.



Случай 2. Если центр S расположен внутри треугольника ABC, то мы можем повернуть точки A и S на $60°$ относительно точки B и получить точки $A' = C$ и S'. Аналогично, треугольник $SS'A'$ – правильный с прямым углом $\angle SS'A' = 90°$. Следовательно, $\angle BSA = \angle BS'A' = \angle SS'A' + \angle SS'B = 150°$. Применяя теорему косинусов

к треугольнику BSA, получаем второе решение $AB = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$.



Задача 51. За круглым столом на равном расстоянии друг от друга сидят семь рыцарей короля Артура. На столе нарисовано несколько стрелок таким образом, что на каждое посадочное место указывает ровно одна стрелка, и из каждого посадочного места ведёт ровно одна стрелка. Каждую минуту каждый из рыцарей пересаживается на место, на которое указывает стрелка, ведущая от его места. После этого стол (вместе с нарисованными на нём стрелками) поворачивается по часовой стрелке на одну седьмую полного оборота. Какое наибольшее число минут могло пройти между началом этого увлекательного действа и тем моментом, когда все рыцари окажутся на своих начальных местах?

Ответ. 84

Решение. Заметим, что каждые семь минут стол принимает своё изначальное положение. Таким образом, если мы будем рассматривать только каждую седьмую минуту, будет казаться, что к людям применяется одна и та же перестановка. Наименьшее число раз, которое нужно применить перестановку на семи элементах, чтобы вернуться в изначальное положение (т.н. *порядок* перестановки), не превосходит 12, так как порядок любой перестановки равен НОКу длин циклов, в которые перестановка распадается. Это максимальное значение достигается на перестановках типа

$$1 \to 2 \to 3 \to 1; \quad 4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 4.$$

Таким образом, потребуется не более $7 \cdot 12 = 84$ минут, чтобы все люди вернулись на свои места.

Построим пример на 84 минуты. Пусть исходно стрелки на столе нарисованы так, что первый и четвертый рыцари меняются местами, а остальные остаются на своих местах. Тогда по истечении семи минут рыцари будут пересажены следующим образом:

$$1 \to 2 \to 3 \to 1; \quad 4 \to 7 \to 6 \to 5 \to 4,$$

Значит, если мы будем рассматривать только каждую седьмую минуту, то раньше чем через 84 минуты рыцари на свои места не вернутся. Осталось показать, что рыцари не могут вернуться на свои места когда-то между $7k$ и $7k + 7$ минутами. Действительно, каждую седьмую минуту первый, второй и третий рыцари оказываются на местах с номерами 1, 2 и 3 (в некотором порядке), а в течение последующих шести минут хотя бы кто-то один из них не сидит ни на одном из этих мест.

Задача 52. Рассмотрим последовательность положительных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ такую, что каждый элемент последовательности, начиная со второго, равен половине суммы среднего арифметического и среднего геометрического соседей. Найдите a_{333}, если известно, что $a_1 = \frac{2}{7}$ и $a_{11} = \frac{7}{2}$. Среднее геометрическое положительных чисел x и y определяется как $\sqrt{xy}$.

Ответ. 2016

Решение. Условие можно переписать в виде

$$a_k = \frac{\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2} + \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a_{k-1}} + \sqrt{a_{k+1}}\right)^2}{4}$$

для любого $k \geq 2$. Так как все члены последовательности положительные, то мы можем переписать последнее выражение как

$$\sqrt{a_k} = \frac{\sqrt{a_{k-1}} + \sqrt{a_{k+1}}}{2}.$$

Отсюда следует, что последовательность $b_1, b_2, \ldots$, где $b_k = \sqrt{a_k}$, является арифметической; пусть d – её разность. Поскольку $b_1 = \sqrt{2/7}$ и $b_{11} = \sqrt{7/2}$, то

$$d = \frac{\sqrt{7/2} - \sqrt{2/7}}{10} = \frac{1}{2\sqrt{14}}.$$

Получаем, что

$$b_{333} = b_1 + 332 \cdot d = \sqrt{\frac{2}{7}} + \frac{332}{2\sqrt{14}} = \frac{4 + 332}{2\sqrt{14}} = 12\sqrt{14}.$$

Следовательно, $a_{333} = b_{333}^2 = 2016$.

Задача 53. Пол Васиной кухни имеет форму прямоугольника с периметром 444 и сторонами a и b, где a и b — натуральные числа такие, что $a > b$. Вася начинает укладывать пол кафелем, причём каждая плитка имеет форму квадрата со стороной $a - b$. Он кладёт первую плитку в дальний правый угол кухни, остальные плитки укладывает так, чтобы получалась прямоугольная сетка со сторонами, параллельными сторонам кухни, и началом координат в дальнем правом углу. После того, как он положил несколько плиток (хотя бы одну), оказалось, что больше плиток не помещается, а непокрытая часть пола имеет площадь 1296. Рассмотрим все возможные размеры Васиной кухни, для которых возможна такая ситуация, и для каждого размера запишем сторону одной кафельной плитки. Найдите сумму записанных чисел.

Ответ. 166

Решение. Нам известно, что $a \equiv b \equiv r \pmod{a-b}$, где $0 \le r \le a - b - 1$. Тогда непокрытая часть пола имеет площадь $ra + rb - r^2 = -r^2 + 222r = 1296$. Последнее равенство можно переписать в виде $(r-6)(r-216) = 0$. Так как $a > r$ и $b > r$, получаем $r = 6$.

Пусть $x = a - r$ и $y = b - r$. Тогда покрытая часть пола представляет собой прямоугольник $x \times y$ составленный из квадратов $(x-y) \times (x-y)$ (так как $x - y = a - b$). Кроме того, $x + y = a + b - 2r = 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Так как $x - y$ делит x и y, оно делит и $x + y$. Рассмотрим какой-нибудь делитель числа 210, назовём его d и положим $x - y = d$. Используя $x + y = 210$, мы можем выразить x и y через d:

$$x = \frac{210 + d}{2}, \quad y = \frac{210 - d}{2}.$$

Так как x и y должны быть натуральными и $x - y > 6$ (так как нельзя положить ещё плитки), d даёт решение тогда и только тогда, когда оно является чётным делителем 210 и удовлетворяет неравенству $6 < d < 210$. Стало быть, $d \in \{10, 14, 30, 42, 70\}$. Сумма этих чисел равна 166.

Задача 54. Рассмотрим точку P внутри треугольника ABC. Обозначим через A', B', C' точки пересечения прямых AP, BP, CP с прямыми BC, CA, AB, соответственно. Известно что

$$A'P = B'P = C'P = 3$$

и

$$AP + BP + CP = 25.$$

Найдите $AP \cdot BP \cdot CP$.

Ответ. 279

Решение. Обозначим площадь треугольника XYZ как $[XYZ]$.

Пусть

$$a = AP, \quad b = BP, \quad c = CP.$$

Тогда

$$\frac{[PBC]}{[ABC]} = \frac{PA'}{AA'} = \frac{3}{a+3}$$

и, аналогично,

$$\frac{[PCA]}{[ABC]} = \frac{3}{b+3}, \quad \frac{[PAB]}{[ABC]} = \frac{3}{c+3}.$$

Поскольку $[PBC] + [PCA] + [PAB] = [ABC]$, то

$$\frac{3}{a+3} + \frac{3}{b+3} + \frac{3}{c+3} = 1.$$

После приведения к общему знаменателю и приведения подобных получаем, что

$$54 + 9(a + b + c) = abc.$$

Зная, что $a + b + c = 25$, получаем ответ $abc = 279$.

Задача 55. На окружности c отмечено четырнадцать точек $A_1, \ldots, A_{14}$ (точки расположены именно в этом порядке, если идти против часовой стрелки). Известно, что не существует трёх различных отрезков с концами в отмеченных точках, которые бы пересекались в одной точке внутри окружности c. Вера нарисовала все отрезки с концами в отмеченных точках. Заметив, что картинка получилась слишком загромождённой, она стёрла все диагонали и все стороны семиугольников $A_1A_3A_5A_7A_9A_{11}A_{13}$ и $A_2A_4A_6A_8A_{10}A_{12}A_{14}$. На сколько частей делят оставшиеся отрезки круг, ограниченный окружностью c?

Ответ. 295

Решение. Будем проводить отрезки один за другим. При проведении каждого нового отрезка количество частей увеличивается на 1 + количество пересечений отрезка с уже проведенными. Значит, общее количество частей будет равно

$$1 + \text{количество отрезков} + \text{количество пересечений отрезков.}$$

Будем называть точки $A_1, A_3, \ldots, A_{13}$ нечётными, а остальные — чётными. Нарисованные отрезки — это в точности все отрезки с одним концом в чётной точке и одним концом в нечётной. Стало быть, количество отрезков равно $7 \cdot 7 = 49$.

Для подсчёта числа пересечений заметим, что концы пересекающихся отрезков расположены на окружности так, что нечётные точки являются соседними (и чётные, соответственно, тоже). С другой стороны, каждая такая четвёрка даёт нам ровно одну точку пересечения, значит, нам достаточно подсчитать такие четвёрки. Упорядочим точки против хода часовой стрелки и будем без ограничения общности считать, что A_1 является первой нечётной точкой в четвёрке. Разделим все точки на семь пар $(A_2, A_3), (A_4, A_5), \ldots, (A_{14}, A_1)$ и заметим, что оставшеся три точки в четвёрке должны быть из разных пар. С другой стороны, каждый выбор трёх пар даёт ровно одну подходящую четвёрку: мы берем нечётную точку из пары с наименьшим номером и чётные из двух оставшихся. Так как первая нечётная точка может быть выбрана семью способами, получаем, что общее число пересечений равно

$$7 \cdot C_7^3 = 245.$$

Значит, круг поделен на $1 + 49 + 245 = 295$ частей.

Задача 56. Найдите количество упорядоченных четвёрок натуральных чисел (a, b, c, d) таких, что

$$a + b + c + d = 505 \quad \text{и} \quad ab = cd.$$

Ответ. 800

Решение. Заметим, что

$$(a + c)(a + d) = a^2 + ad + ac + cd = a^2 + ad + ac + ab = a(a + b + c + d) = 505a = 5 \cdot 101 \cdot a.$$

Так как каждая из скобок $a + c$ и $a + d$ больше a, и числа 5 и 101 просты, одно из выражений $a + c$ и $a + d$ должно иметь вид $5k$, а другое — $101l$, где $a = kl$. Пусть $a + c = 5k$ и $a + d = 101l$. Так как $a = kl$, получаем $c = k(5 - l)$, $d = l(101 - k)$ и $b = 505 - a - d - c = (101 - k)(5 - l)$. Вычисление показывает, что четвёрка

$$(a, b, c, d) = (kl, (101 - k)(5 - l), k(5 - l), l(101 - k))$$

удовлетворяет условию $ab = cd$, а значит, является подходящей при выборе любых $l = 1, 2, 3, 4$ и $k = 1, 2, \ldots, 100$. Все эти 400 четвёрок различны, так как если две пары (k_1, l_1) и (k_2, l_2) дают одну и ту же четвёрку, то $k_1l_1 = k_2l_2$ и $(5 - l_1)k_1 = (5 - l_2)k_2$, а значит, $k_1 = k_2$ и $l_1 = l_2$.

Аналогичным образом, в случае $a + c = 101l$ and $a + d = 5k$ получается 400 попарно различных четвёрок

$$(a, b, c, d) = (kl, (101 - k)(5 - l), l(101 - k), k(5 - l))$$

при $l = 1, 2, 3, 4$ и $k = 1, 2, \ldots, 100$. Никакие две четвёрки из разных групп не совпадают, так как $5k = a + c = 101l$ не выполнено ни для каких из рассматриваемых k и l. Таким образом, получается всего $400 + 400 = 800$ четвёрок.