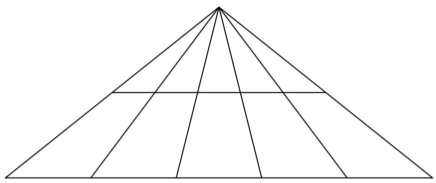
Úloha 1. Pred tromi rokmi bol vek Punťovej mamy trikrát väčší ako vek Punťa. Teraz je vek Punťovho otca trikrát väčší ako Punťov. Aký je rozdiel veku Punťových rodičov?

Výsledok. 6

Riešenie. Označme x súčasný Punťov vek. Potom terajší vek Punťovej mamy je $3(x-3)+3=3x-6$ a terajší vek jeho otca $3x$. Rozdiel teda činí 6 rokov.

Úloha 2. Koľko trojuholníkov je na obrázku?

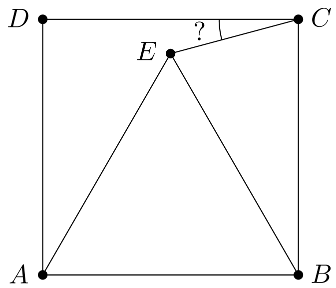


Výsledok. 30

Riešenie. Všetky trojuholníky na obrázku majú v najvyššom bode spoločný vrchol. Ďalej, jedna strana každého trojuholníka musí ležať na jednej z dvoch rovnobežných čiar. Každý trojuholník je teda určený výberom jednej z dvoch horizontálnych čiar a dvoma rôznymi bodmi na tejto čiare. Keďže na každej horizontálnej čiare je po šesť bodov, dokopy máme

$$2\cdot\binom{6}{2}=2\cdot\frac{6\cdot5}{1\cdot2}=30.$$

Úloha 3. Bod E leží vnútri štvorca $ABCD$ tak, že ABE je rovnostranný trojuholník. Aká je veľkosť uhla DCE v stupňoch?



Výsledok. 15

Riešenie. Keďže v rovnostrannom trojuholníku má každý uhol veľkosť 60°, máme $|\sphericalangle CBE|=90^\circ-|\sphericalangle EBA|=30^\circ$. Keďže $|EB|=|AB|=|BC|$, trojuholník CBE je rovnoramenný a teda

$$|\sphericalangle ECB|=|\sphericalangle BEC|=\tfrac{1}{2}(180^\circ-|\sphericalangle CBE|)=75^\circ.$$

Napokon určíme veľkosť uhla $|\sphericalangle DCE|=90^\circ-|\sphericalangle ECB|=15^\circ$.

Úloha 4. Trpaslík Mojo schováva veľký poklad v tmavej miestnosti, obsahujúci niekoľko označených mincí. Mince majú následovné označenie: jedna minca má označenie 1, dve mince označenie 2, $\ldots$, osemnásť mincí má označenie 18 a devätnásť mincí 19. Mojo vyberá mincu po minci bez toho, aby bol schopný prečítať ich nápis. Aké je minimálne množstvo mincí, ktoré musí vybrať, aby si Mojo bol istý, že vybral aspoň desať mincí s rovnakým značením?

Výsledok. 136

Riešenie. Ak by Mojo vybral všetky mince, ktorých je menej ako 10 a po deväť mincí z každej, ktorých je aspoň desať, tak by zobral celkovo $(1+2+\cdots+9)+9\cdot10=135$ mincí. Preto 135 mincí stačiť nebude.

Avšak ak Mojo zoberie 136 mincí tak aspoň 91 mincí musí mať označenie väčšie ako 9. Je zrejmé, že jedna z desiatich hodnôt mincí je zastúpená aspoň 10 krát. Preto je minimum 136.

Úloha 5. Marek kúpil veľkú škatuľu jeho obľúbených cukríkov na Halloween, aby ich rozdal deťom. Avšak nakoľko sú to jeho obľúbené cukríky, tak zjedol polovicu ešte pred tým, ako prišlo prvé dieťa. Prvé dieťa si zobralo niekoľko cukríkov a odišlo. Potom Marek zjedol polovicu z toho, čo ostalo, kým prišlo druhé dieťa. To si tiež zobralo niekoľko cukríkov a odišlo. No a Marek zase zjedol polovicu zostávajúcich cukríkov. Potom prišlo tretie dieťa a zobralo zvyšné cukríky. Ak každé dieťa zobralo presne tri cukríky, koľko cukríkov mal Marek pôvodne?

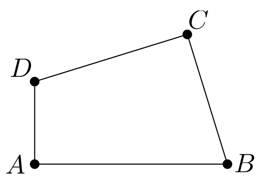
Výsledok. 42

Riešenie. Ak n je počet cukríkov v originálnom balení tak môžme zapísať rozdávanie cukríkov následovne

$$\left(\left(\frac{n}{2}-3\right)\cdot\frac{1}{2}-3\right)\cdot\frac{1}{2}-3=0.$$

Vyriešením dostaneme $n=42$.

Úloha 6. Majme štvoruholník $ABCD$ s pravými uhlami pri vrcholoch A a C. Ďalej poznáme dĺžky týchto strán: $|BC|=6$, $|CD|=8$ a $|DA|=2$. Aký je obsah štvoruholníka $ABCD$?



Výsledok. $24+\sqrt{96}=24+2\sqrt{24}=24+4\sqrt{6}$

Riešenie. Štvoruholník si rozdelímu uhlopriečkou BD na dva pravouhlé trojuholníky. z Pytagorovej vety v trojuholníku BCD dostávame, že $|BD|=\sqrt{6^2+8^3}=10$. Podobne z Pytagorovej vety v trojuholníku ABD máme, že

$$|AB|=\sqrt{|BD|^2-|AD|^2}=\sqrt{10^2-2^2}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}.$$

Obsah štvoruholníka vypočítame ako súčet obsahov trojuholníkov BCD a ABD a teda

$$\frac{1}{2}(6\cdot 8)+\frac{1}{2}(2\cdot 4\sqrt{6})=24+4\sqrt{6}.$$

Úloha 7. Kancelárska tlačiareň vie tlačiť buď na jednu, alebo na obe strany papiera. Jednostranné tlačenie trvá tri sekundy na stranu, kým obojstranné trvá deväť sekúnd na list papiera. Katka chce vytlačiť článok dlhý osemnásť strán. Môže ho buď vytlačiť celý obojstranne, alebo vytlačiť nepárne strany, vložiť papiere späť do tlačiarne a vytlačiť párne strany. Rýchlo si uvedomila, že oba prístupy zaberú rovnako veľa času. Koľko sekúnd Katke zaberie vloženie strán naspäť do tlačiarne?

Výsledok. 27

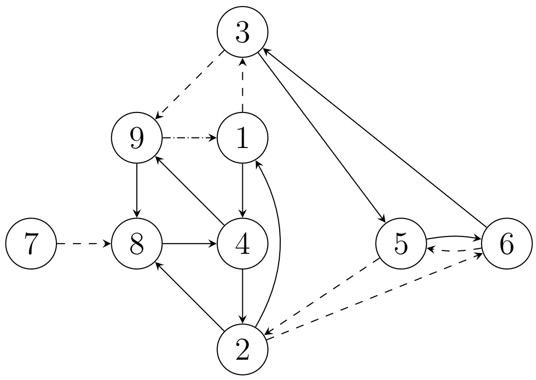
Riešenie. Katka chce tlačiť na deväť listov papiera. Obojstranná tlač zaberie $9\cdot 9=81$ sekúnd. To je teda aj celkový čas jednostranného tlačenia spolu s vkladaním papiera späť do tlačiarne. Iba jednostranné tlačenie zaberie $2\cdot 3\cdot 9=54$ sekúnd, teda na vkladanie Katka potrebuje $81-54=27$ sekúnd.

Úloha 8. Nájdite všetky 9-ciferné čísla N spĺňajúce nasledujúce podmienky:

- N obsahuje každú cifru $1,\ldots,9$ práve raz.
- Každé dvojciferné číslo tvorené dvomi po sebe idúcimi ciframi N je deliteľné 7 alebo 13.

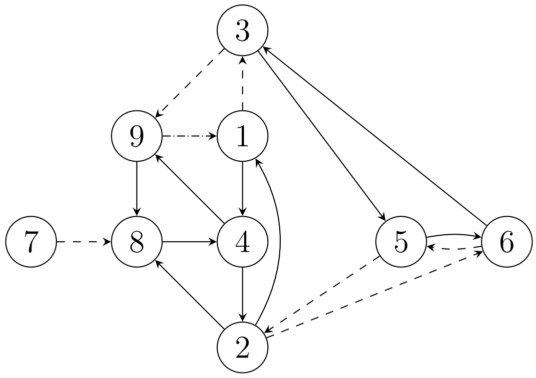
Výsledok. 784913526

Riešenie. Usporiadajme cifry $1,\ldots 9$ do diagramu, kde šípka z x do y znamená, že dvojciferné číslo $\overline{xy}$ je deliteľné 7 alebo 13.

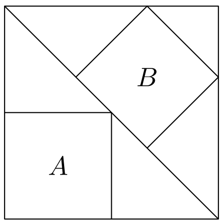


Plná šípka reprezentuje deliteľnosť 7, čiarkovaná deliteľnosť 13 a bodkočiarkovaná (iba jedna, z 9 do 1) deliteľnosť 7 aj 13. Z diagramu je ľahko viditeľné, že začínajúcim číslom musí byť 7 nasledovaná 8 a 4. Ak po 4 nasleduje 9, musia byť ďalšími ciframi 1, 3 a 5 a posledné dve cifry musia (a môžu) byť 2 a 6. Práve sme poskladali riešenie 784913526.

Ak po 4 nenasleduje 9 ale 2, po 7842 máme na výber dve možnosti. Buď pokračujeme 1 a následne 3, čo nás dovedie do slepej uličky, lebo už nemáme možnosť použiť naraz cifry 5 aj 9. Alebo pokračujeme 6 a natrafíme na rovnaký problém po sérii 784263 (alebo sa zamotáme už pri 784265). Riešenie je preto iba jedno.



Úloha 9. Vo vnútri väčšieho štvorca sú uložené dva menšie štvorce tak, ako je na obrázku. Nájdite obsah štvorca A, ak obsah štvorca B je 48.



Výsledok. 54

Riešenie. Keďže trojuholníky priľahlé ku stranám štvorca B sú rovnoramenné, tak strana štvorca B ležiaca na uhlopriečke je presne tretina tejto uhlopriečky. Teda, ak si označíme stranu veľkého štvorca ako s, tak strana štvorca B je $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot s$ a strana štvorca A je $\frac{1}{2} \cdot s$. z toho vyjadríme pomer obsahov vnútorných štvorcov ako

$$\frac{s^2}{4} : \frac{2 \cdot s^2}{9} = \frac{9}{8}.$$

Obsah štvorca A je $48 \cdot \frac{9}{8} = 54$.

Úloha 10. Kika má dve kocky. Prvá má hranu dĺžky 9 cm a skladá sa z bielych kociek s hranou dĺžky 1 cm. Druhá má hranu dĺžky 10 cm a skladá sa z čiernych kociek s hranou 1 cm. Kika rozložila obe kocky a poskladala z malých kociek veľkú kocku s hranou 12 cm. Najmenej koľko cm^2 povrchu tejto novej kocky musí byť čiernych?

Výsledok. 0

Riešenie. Kika má $9^3 = 729$ malých bielych kociek a $10^3 = 1000$ čiernych. Na poskladanie kocky s hranou dlhou 12 cm potrebuje $12^3 = 1728$ malých kociek, pričom $10^3 = 1000$ z nich je vnútri a ostatné majú aspoň 1 stenou na povrchu veľkej kocky. Týchto vonkajších kociek je $12^3 - 10^3 = 1728 - 1000 = 728$, čo je menej ako počet malých bielych kociek. Máme preto dosť malých bielych kociek na poskladanie povrchu veľkej kocky so stranou 12 cm a vieme ho spraviť celý bielu. Výsledok je teda 0.

Úloha 11. Učiteľ ohodnotil písomky z matematiky a zistil, že presne desať jeho žiakov nevie násobiť zlomky, štrnásť z nich nevie zlomky sčítavať a sedemnásť nedokáže odstrániť odmocninu z menovateľa. Ukázalo sa, že každý zo študentov neovláda aspoň jednu z týchto troch operácií a presne šiesti neovládajú ani jednu z týchto operácií. Koľko najviac študentov má učiteľ v triede?

Výsledok. 29

Riešenie. Aby sme zistili presný počet študentov v triede, potrebujeme ešte informáciu o počte žiakov, ktorí neovládajú presne dve z týchto operácií pre každú dvojicu z troch operácií dokopy. Avšak, je pomerne zrejmé, že maximálny počet žiakov dosiahme, ak nebudeme žiakov, ktorí neovládajú presne dve operácie. V tom prípade je počet študentov

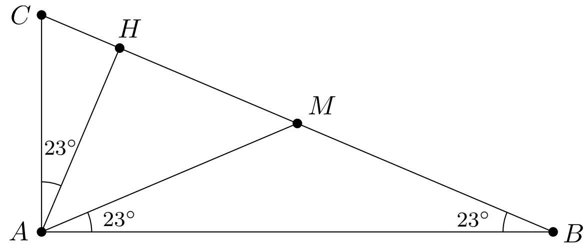
$$10 + 14 + 17 - 2 \cdot 6 = 29.$$

Musíme dvakrát odčítať počet študentov bez všetkých operáciií, keďže pri spočítavaní všetkých troch skupín sme ich zarátali trikrát.

Úloha 12. Jeden z uhlov pravouhlého trojuholníka má veľkosť 23°. Nájdi veľkosť uhla (v stupňoch) medzi ťažnicou a výškou, ktoré vychádzajú z pravého uhla trojuholníka.

Výsledok. 44

Riešenie. Označme si pravouhlý trojuholník ako ABC s pravým uhlom pri vrchole A. Spojme bod A so stredom M strany BC, čím dostaneme ťažnicu. Ďalej pridajme výšku z vrchola A s pätou výšky H.



Z Tálesovej vety vieme, že vrcholy trojuholníka ABC, ležia na kružnici so stredom M. Bez ujmy na všeobecnosti, nech $|\sphericalangle CBA| = 23°$. Nakoľko je trojuholník ABM rovnoramenný, tak aj $|\sphericalangle BAM| = 23°$. Taktiež, trojuholník AHC je podobný trojuholníku BAC podľa vety *uu*. Z toho dostávame, že $|\sphericalangle HAC| = 23°$. Nakoniec dopočítame, že $|\sphericalangle MAH| = 90° - 2 \cdot 23° = 44°$, čo je uhol, ktorý sme potrebovali zistiť.

Úloha 13. Kladné celé čísla a a b spĺňajú rovnosť $20a + 19b = 365$. Nájdite hodnotu výrazu $20b + 19a$.

Výsledok. 376

Riešenie. Zjavne a, $b \leq 20$. Pričítaním b k obom stranám uvedenej rovnosti dostaneme $20(a + b) = 365 + b$. Ľavá strana je deliteľná 20, takže pravá tiež. Jediné riešenie je $b = 15$ a pravá strana má hodnotu 380. Z rovnosti dopočítame $a = 4$ a hľadaným číslom je $20b + 19a = 376$.

Úloha 14. Pravidelný mnohouholník, ktorý má 2018 vrcholov, má 2 033 135 uhlopriečok. O koľko viac uhlopriečok je v pravidelnom mnohouholníku s 2019 vrcholmi?

Poznámka: Strany mnohouholníka nerátame medzi uhlopriečky.

Výsledok. 2017

Riešenie. Pravidelnosť mnohouholníkov tu nehrá žiadnu rolu. Môžeme si predstaviť, že 2019-uholník je možné vyrobiť z 2018-uholníka tým, že nejakú stranu rozdelíme novým vrcholom. Tento nový vrchol vytvára 2016 nových uhlopriečok s 2016 jeho nesusediacimi vrcholmi. Okrem toho, jedna nová uhlopriečka vznikne spojením susedov nového vrchola. Takže počet uhlopriečok celokm narastie o 2017.

Úloha 15. Nájdite všetky reálne korene rovnice $(x^2 - 4x + 5)^{x^2+x-30} = 1$.

Výsledok. 2, 5, −6

Riešenie. Keďže $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 \geq 1$ tak základ je vždy kladné reálne číslo. Rovnica je splnená práve vtedy, keď je základ 1 alebo exponent je 0. V prvom prípade, $x^2 - 4x + 5 = 1$ sa dá inak zapísať ako $(x - 2)^2 = 0$, čoho riešenie je len $x = 2$. V druhom prípade, $x^2 + x - 30 = (x - 5)(x + 6) = 0$ má dve riešenia $x = 5$ a $x = -6$. Dokopy má teda táto rovnica tri riešenia.

Úloha 16. Koľko existuje takých permutácií čísel 1, 2, 3, 4, že ak vymažeme ktorékoľvek z nich, vzniknutá postupnosť čísel nie je ani rastúca, ani klesajúca? Poznámka: *Permutácia* je postupnosť obsahujúca každé zadané číslo práve raz.

Výsledok. 4

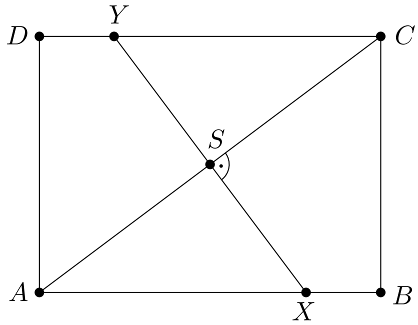
Riešenie. Povedzme, že 1 je prvé číslo. Aby platila podmienka, že postupnosť nie je rastúca, permutácia by musela byť $(1, 4, 3, 2)$. Vymazanie 1 by ale vytvorilo klesajúcu postupnosť, a to by už nespĺňalo zadanie úlohy. Z toho vyplýva, že 1 nesmie byť prvá a podľa symetrie ani posledná. Podobne, 4 nesmie byť ani prvé, ani posledné číslo. To znamená, že 4 a 1 musia byť v strede, buď v poradí $(1, 4)$, alebo $(4, 1)$. Potom nám ešte ostali dve čísla 2 a 3, ktoré môžu byť na začiatku alebo na konci. Dostávame tieto štyri permutácie:

$$(2, 1, 4, 3),\ (3, 1, 4, 2),\ (2, 4, 1, 3),\ (3, 4, 1, 2).$$

Úloha 17. Nech $ABCD$ je obdĺžnik so stranami $|AB| = 8\,\mathrm{cm}$ a $|BC| = 6\,\mathrm{cm}$. Ďalej nech X a Y sú postupne priesečníky osi uhlopriečky AC so stranami AB a CD. Aká je dĺžka úsečky XY (v centimetroch)?

Výsledok. $\frac{15}{2}$

Riešenie. Z Pytagorovej vety dostaneme, že $|AC| = \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$. Označme si S priesečník uhlopriečky AC a jej osi. S je zjavne stred uhlopriečky, teda $|AS| = 5$.



Keďže $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle SAX|$ a $|\sphericalangle XSA| = |\sphericalangle CBA| = 90°$, tak trojuholníky ASX a ABC sú podobné s pomerom podobnosti $|SX| : |AS| = |BC| : |AB|$, z čoho máme

$$SX = \frac{|BC| \cdot |AS|}{|AB|} = \frac{15}{4}.$$

Nakoniec dopočítame dĺžku, ktorú potrebujeme zistiť: $|XY| = 2 \cdot |SX| = \frac{15}{2}$.

Úloha 18. Každé z písmen E, F, I, N, O, R, U, V reprezentuje nejakú cifru od 0 po 9 a žiadne dve písmená nereprezentujú rovnakú cifru. Z týchto cifier je poskladaná rovnica $FOUR + FIVE = NINE$. Ďalej ešte platí:

- $FOUR$ je deliteľné štyrmi,
- $FIVE$ je deliteľné piatimi,
- $NINE$ je deliteľné tromi.

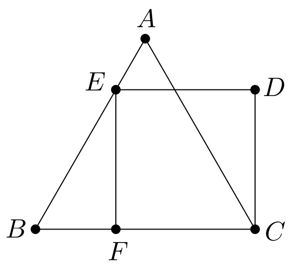
Nájdite všetky štvorciferné čísla, ktoré môže reprezentovať $NINE$.

Výsledok. 3435

Riešenie. Na prvý pohľad vidno, že $R = 0$, keďže na konci slov $FIVE$ a $NINE$ je rovnaká cifra. Jedine výber $R = 0$ ju pri súčte nezmení. Keďže $FIVE$ je deliteľné 5 musí byť E buď 0 alebo 5. Keďže 0 je už použitá, vieme že $E = 5$. Pozrime sa na cifry na mieste stoviek. Dve z nich sú I a sú na opačných stranách rovnice. Nula je už obsadená, takže jediný spôsob ako dosiahnuť rovnosť je, že $O = 9$ a k súčtu dostaneme extra jednotku zo súčtu cifier na mieste desiatok, teda $U + V \geq 10$. Navyše takto dostaneme do súčtu cifier na mieste tisícok extra jednotku, takže N musí byť nepárne a väčšie ako 1. Na druhej strane $U + V \leq 15$, lebo cifra 9 už je obsadená. Aj cifra 5 už je obsadená, takže $N = 3$. Ľahko dopočítame, že $U = 6$ (pomôžeme si deliteľnosťou 4), $V = 7$ a $F = 1$.

Keďže $NINE$ je deliteľné 3, ciferný súčet $N + I + N + E = 3 + I + 3 + 5 = 11 + I$ musí byť tak isto deliteľný 3. Ostala nám už iba jediná vhodná cifra a tou je 4. Riešenie je tak $FOUR = 1960$, $FIVE = 1475$ a $NINE = 3435$. Rovnica potom vyzerá takto: $1960 + 1475 = 3435$.

Úloha 19. Ak je obvod štvorca na obrázku 4, aký je obvod väčšieho rovnostranného trojuholníka na obrázku?



Výsledok. $3 + \sqrt{3}$

Riešenie. Najprv si uvedomme, že dva pravouhlé trojuholníky ktoré majú vnútorné uhly 30°, 60°, a 90° sú zhodné, keďže oba majú dlhšiu odvesnu zhodnú so stranou štvorca dĺžky 1. Takýto pravouhlý trojuholník tvorí polovicu rovnostranného trojuholníka, pričom prepona pravouhlého trojuholníka a strana rovnostranného trojuholníka sa zhodujú. Ak si označíme kratšiu odvesnu ako x, tak prepona je dĺžky $2x$ a máme z Pytagorovej vety: $(2x)^2 = x^2 + 1^2$. Z toho vypočítame $x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Preto je strana rovnostranného trojuholníka dlhá $1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}$ a obvod je $3 + \sqrt{3}$.

Úloha 20. Nech a, b sú reálne čísla. Ak viete, že $x^3 - ax^2 + 588x - b = 0$ má trojnásobný reálny koreň, aké hodnoty môže nadobúdať a?

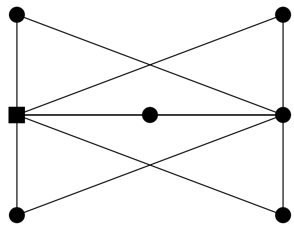
Výsledok. 42, -42

Riešenie. Ak k je trojnásobným koreňom, tak

$$(x-k)^3 = x^3 - 3kx^2 + 3k^2x - k^3 = x^3 - ax^2 + 588x - b.$$

Porovnaním koeficientov pri mocnine x^1 dostaneme $3k^2 = 588$, teda $k = \pm 14$. Preto $a = 3k = \pm 42$.

Úloha 21. Mišo je na výlete po lietajúcich ostrovoch, ktoré sú pospájané mostami ako na diagrame. Každý most ponúka unikátny výhľad, preto chce Mišo prejsť po každom moste. Za prejdenie mosta sa platí poplatok, takže chce prejsť každým mostom práve raz. Koľkými spôsobmi si môže naplánovať cestu, ak začína na ostrove označenom štvorcom? Každý ostrov môže navštíviť koľkokrát chce, ale nemôže prechádzať z mosta na most mimo ostrovov.



Výsledok. 120

Riešenie. Nazvime štartovný ostrov a ostrov vpravo v strede *veľký*. Každý most spája jeden veľký a jeden *malý* ostrov. Malé ostrovy majú po dva mosty, do každého veľkého ostrova jeden. Pri prechádzaní po mostoch tak vždy ideme z jedného veľkého ostrova do druhého cez nejaký malý ostrov. Možností ako prejsť všetkými mostami je toľko, koľko je poradí v akých sa dá prejsť malými ostrovmi. Malých ostrovov je 5, vieme ich prechádzať v ľubovoľnom poradí, takže dohromady to je $5! = 120$ možností.

Úloha 22. Koľko usporiadaných dvojíc prirodzených čísel (m, n) je takých, že ich najmenším spoločným násobkom je 2000?

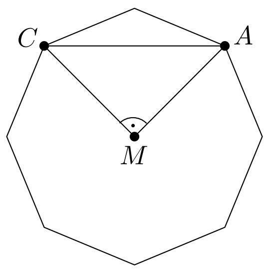
Výsledok. 63

Riešenie. Rozlišujme dva prípady: v prvom predpokladajme, že ani jedno z čísel nie je $2000 = 2^4 \cdot 5^3$. To znamená, že jedno z nich sa dá zapísať ako $a = 2^4 \cdot 5^k$, kde $k \in \{0, 1, 2\}$, a druhé sa dá zapísať ako $b = 2^l \cdot 5^3$, kde $l \in \{0, 1, 2, 3\}$. Každý takýto pár môže byť v dvoch poradiach: (a, b) alebo (b, a). To je dokopy 24 možností pre tento prvý prípad. V druhom prípade bude jedno z čísel presne 2000 a druhé tak môže byť ľubovoľný deliteľ 2000, takže máme $(4+1) \cdot (3+1) = 20$ možností. Zase môžeme mať dve poradia týchto čísel, avšak pár $(2000, 2000)$ je rovnaký aj po zámene poradia, preto jednu možnosť odpočítame. Tento druhý prípad nám tak dáva $2 \cdot 20 - 1 = 39$ dvojíc. Dokopy to je $24 + 39 = 63$ usporiadaných dvojíc.

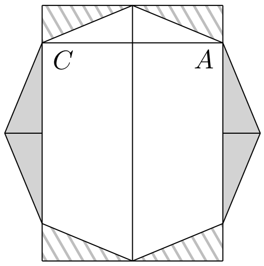
Úloha 23. Nech $ABCDEFGH$ je pravidelný osemuholník, kde $|AC| = 7\sqrt{2}$. Vypočítajte jeho obsah.

Výsledok. $98\sqrt{2}$

Riešenie. Povedzme, že M je stredom kružnice opísanej danému osemuholníku. Keďže $|\sphericalangle AMC| = \frac{2}{8} \cdot 360° = 90°$, polomer kružnice musí byť 7 a priemer 14.



Ak si časti osemuholníka presunieme tak, ako je to znázornené na obrázku nižšie, vieme obsah vypočítať vynásobením dĺžky $|AC|$ a priemeru. Takže obsah tohto osemuholníka je $14 \cdot 7\sqrt{2} = 98\sqrt{2}$.



Úloha 24. Štyria kamaráti sa rozhodli, že sa naučia nové jazyky. Miestna jazyková škola ponúka kurzy Arabčiny, Belgičtiny, Čínštiny a Dánčiny. Každý z kamarátov sa chce naučiť presne tri jazyky. Koľkými spôsobmi si môžu vybrať kurzy tak, aby aspoň jeden kurz absolvovali všetci štyria?

Výsledok. 232

Riešenie. Najprv si všimnime, že tri jazyky vieme priradiť jednej osobe štyrmi spôsobmi, čo je rovnako veľa spôsobov, ako priradiť jeden jazyk, ktorý neabsolvuje. Preto je $4^4 = 256$ možností ako priradiť tri jazyky štyrom osobám, bez extra podmienky.

Teraz spočítajme tie možnosti, kedy kamaráti nemajú žiaden spoločný kurz. To docielime tak, že každému kamarátovi priradíme unikátny kurz, na ktorý nechodí. To vieme spraviť $4! = 24$ možnosťami.

Preto počet spôsobov, ktorými si môžu vybrať kurzy, je $256 - 24 = 232$.

Úloha 25. Ákos zobral svoje obľúbené prirodzené číslo n pozostávajúce iba z nenulových cifier. Ákos potom zobral číslo m, ktoré postavil z čísla n tak, že ho napísal odzadu. Tieto dve čísla vynásobil a všimol si, že výsledok bol o tisíc viac ako ciferný súčin jeho obľúbeného čísla. Nájdite všetky možnosti Ákosovho obľúbeného čísla.

Výsledok. 24, 42

Riešenie. Jednoducho si všimneme, že číslo n musí byť aspoň dvojciferné. Ak je n dvojciferné tak má cifry a a b, a vieme tvrdenie zapísať ako

$$(10a + b)(10b + a) = 1000 + ab$$

alebo tiež

$$a^2 + b^2 = 10(10 - ab).$$

Keďže pravá strana musí byť kladná tak $ab < 10$. Potom už máme zopár možností, po ktorých overení nám výjde a, b sú 2 a 4 v nejakom poradí. Nakoniec, ak n má $k \geq 3$ cifier, tak ľavá strana rovnice je aspoň $(10^{k-1})^2$ a pravá strana rovnice je menšia ako $1000 + 10^k$. Preto n nemôže mať viac ako dve cifry.

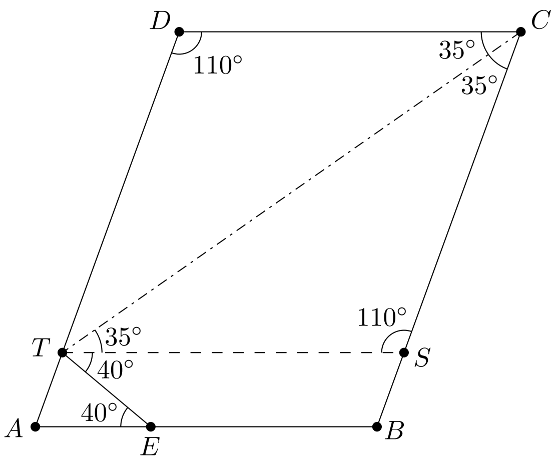
Úloha 26. Je daný rovnobežník $ABCD$. Bod T leží na strane AD tak, že polopriamka CT je osou uhla BCD. Bod E leží na strane AB tak, že $|\sphericalangle AET| = 40°$. Ak $|\sphericalangle CTE| = 75°$, aká je veľkosť uhla CDA v stupňoch?

Výsledok. 110

Riešenie. Nech bod S leží na strane BC tak, že TS je rovnobežná s AB. Potom $|\sphericalangle STE| = |\sphericalangle AET| = 40°$ a

$$|\sphericalangle TCD| = |\sphericalangle CTS| = |\sphericalangle CTE| - |\sphericalangle STE| = 35°.$$

Keďže CT je os uhla BCD, $|\sphericalangle TCD| = |\sphericalangle SCT|$ a $|\sphericalangle BCD| = 2 \cdot 35° = 70°$. Z toho vyplýva $|\sphericalangle CDA| = 180° - |\sphericalangle BCD| = 110°$.



Úloha 27. Dva veľké šľachtické rody sa stretli na hostine. Každý rod bol reprezentovaný aspoň jedným mužom a aspoň jednou ženou. Každý člen jedného rodu sa zvítal s každým členom druhého rodu. Dvaja muži sa vítajú podaním ruky, dve ženy poklonou a muž so ženou tiež poklonou. Počas celého uvítania napočítal dvorný šašo dohromady 85 podaní rúk a 162 poklôn. Koľko žien bolo na hostine? Poklonu dvoch ľudí pri vítaní rátame ako jednu poklonu.

Výsledok. 10

Riešenie. Nech m_1, m_2, w_1, w_2 sú postupne počty mužov a žien oboch rodov. Keďže $m_1 m_2 = 85 = 5 \cdot 17$, ľahko zistíme, že počet mužov je (BUNV) $m_1 = 5$ a $m_2 = 17$. (Možnosť, kde jeden rod má iba jedného muža, ľahko vylúčime.) Dohromady bolo uvítaní $85 + 162 = 247$, takže z

$$(m_1 + w_1)(m_2 + w_2) = 247 = 13 \cdot 19$$

dostaneme, že $m_1 + w_1 = 13$, $m_2 + w_2 = 19$ (opäť, druhá možnosť sa skúškou ľahko vylúči), takže výsledok je $w_1 + w_2 = 8 + 2 = 10$.

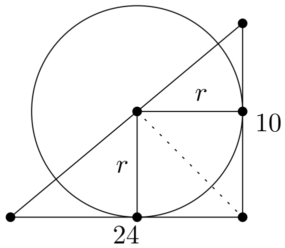
Úloha 28. Majme trojuholník so stranami dĺžky 10, 24, a 26. Nech k je kružnica so stredom na najdlhšej strane, ktorá sa dotýka dvoch kratších strán trojuholníka. Aký je polomer kružnice k?

Výsledok. 120/17

Riešenie. Z Pytagorovej vety vieme, že zadaný trojuholník je pravouhlý. Úsečka spájajúca vrchol s pravým uhlom a stred kružnice rozdeľuje pôvodný trojuholník na dva trojuholníky. Polomery k dotykovým bodom sú kolmé na odvesny trojuholníka, teda sú výškami v dvoch menších trojuholníkoch. Nech r je polomer kružnice k. Vypočítame obsah pôvodného trojuholníka dvoma spôsobmi – ako obsah celého trojuholníka a ako súčet obsahov dvoch menších trojuholníkov:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 10 = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot r + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot r.$$

Z toho vyplýva, že polomer $r = 120/17$.



Úloha 29. Čečília prišla do kasína s 10 €. V kasíne našla herný automat, ktorý pracuje nasledovne: Hráč vhodí čiastku 1 € v hocijakých minciach a s pravdepodobnosťou p vyhrá jackpot; inak automat vráti 0,50 €. Pomôžte Čečílii nájsť najmenšiu takú pravdepodobnosť p, že ak sa rozhodne hrať na tomto automate tak dlho, ako je možné, alebo do výhry jackpotu, tak bude mať celkovú šancu na výhru jackpotu aspoň 50%.

Výsledok. $1 - \sqrt[19]{0{,}5}$

Riešenie. Všimnime si, že Čečília môže hrať na automate neúspešne najviac 19 krát, pretože po vhodení posledného eura dostane naspäť 0,50 €, čo nebude stačiť na ďalšiu hru. Pravdepodobnosť, že každý pokus je neúspešný, je preto $(1-p)^{19}$. Ak má byť pravdepodobnosť na výhru jackpotu aspoň 50% tak musí $(1-p)^{19} \leq 0{,}5$, čo je ekvivalentné s $p \geq 1 - \sqrt[19]{0{,}5}$, a teda $1 - \sqrt[19]{0{,}5}$ je najmenšia možná hodnota p.

Úloha 30. Nájdite všetky štvorciferné kladné celé čísla $\overline{abcd}$, ktoré majú hodnotu $a^a + b^b + c^c + d^d$. Žiadna cifra nemôže byť nulová.

Výsledok. 3435

Riešenie. Keďže $6^6 \geq 10000$, žiadna cifra nemôže byť väčšia ako 5. Ak nepoužijeme cifru 5, tak buď použijeme štyri štvorky, ktoré nespĺňajú podmienku, alebo je súčet najviac $3 \cdot 4^4 + 3^3 < 1000$. Preto musíme použiť aspoň jednu päťku. Keďže $5^5 = 3125$, nemôžeme použiť viac ako jednu päťku, inak je prvá cifra súčtu viac ako 5. S jednou päťkou dostaneme súčet medzi $3000 < 5^5 < 5^5 + 3 \cdot 4^4 < 4000$, takže prvou cifrou musí byť 3.

Momentálne vieme, že hodnota hľadaného čísla je aspoň $5^5 + 3^3 + 2 \cdot 1^1 = 3154$, čo nie je riešením. Ďalšie číslo z cifier od 1 po 5 je 3155, čo tiež nie je riešenie, a ešte ďalšie je až $3211 > 5^5 + 3 \cdot 3^3$. Z poslednej nerovnosti vidíme, že hľadané číslo obsahuje cifru 4. Identifikovali sme už tri cifry zo štyroch. Odskúšaním posledných štyroch možností nájdeme jediné riešenie 3435.

Úloha 31. Koľko existuje pätíc dvojciferných čísel takých, že každá cifra od 0 do 9 je v pätici použitá práve raz a každé dvojciferné číslo v nej je párne a nedeliteľné 3? Pätice, ktoré sa líšia iba poradím čísel, sú považované za rovnaké.

Výsledok. 16

Riešenie. Všetkých päť dvojciferných čísel musí končiť párnou cifrou. Aby sme spĺňali nedeliteľnosť 3, čísla končiace 0 alebo 6 musia začínať 1, 5 alebo 7. Čísla končiace 2 alebo 8 musia začínať 3, 5 alebo 9. Číslo končiace 4 môže začínať 1, 3, 7 alebo 9.

Keď vyberieme pre 4 začínajúcu cifru 1, tak nám ostanú dve možnosti prvých cifier pre 0 a 6 (buď 50, 76, alebo 56, 70) a následne nám ostanú dve prvé cifry k 2 a 8 (buď 32, 98, alebo 38, 92), čo sú dohromady 4 možnosti. Analogicky vieme postupovať ak zvolíme ku 4 inú začiatočnú cifru. Keďže môžeme ku 4 vybrať štyri možné cifry, máme dohromady $4 \cdot 4 = 16$ pätíc.

Úloha 32. Nájdite všetky prirodzené čísla n také, že

$$\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{35} \right\rfloor = 2019.$$

Výraz $\lfloor x \rfloor$ znamená dolnú celú časť x, čiže najväčšie celé číslo, ktoré neprevyšuje x.

Výsledok. 5439

Riešenie. Označme

$$f(n) = \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{35} \right\rfloor .$$

Zrejme f je neklesajúca funkcia. Ďalej $f(n) - f(n-1) = 1$ ak n je deliteľné práve jedným z čísel 5 alebo 7 a $f(n) - f(n-1) = 3$ ak n je deliteľné číslom 35; v každom inom prípade $f(n) = f(n-1)$. Keďže

$$f(n) \leq \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{35} \right) n = \frac{13}{35} n,$$

môžeme riešenie ohraničiť

$$n \geq \frac{35}{13} \cdot 2019$$

Keďže n je prirodzené číslo, musí platiť $n \geq 5436$. Ďalej $f(5436) = 2018$. Najbližšie väčšie číslo deliteľné piatimi je 5440 a najbližšie väčšie číslo deliteľné siedmimi je 5439. Podľa predošlého bude $f(5439) = 2019$ a $f(5440) = 2020$, čiže jediné riešenie je 5439.

Úloha 33. Pre koľko kladných celých čísel n vieme nájsť kladné celé čísla $x, y \leq 1\,000\,000$ (nie nutne rôzne) také, že

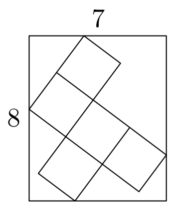
$$n = S(x) = S(y) = S(x+y),$$

kde $S(a)$ označuje ciferný súčet čísla a?

Výsledok. 6

Riešenie. Keďže pre ľubovoľné kladné celé číslo a majú čísla a a $S(a)$ rovnaký zvyšok po delení číslom 9, tak musia mať čísla n, x, y a $x+y$ rovnaký zvyšok po delení číslom 9. Z tohto vyplýva, že x, a teda aj n musia byť deliteľné číslom 9. Ak $n = 9m$ pre nejaké kladné celé číslo m, tak dosadením $x = y = 10^m - 1$ dostávame rovnosť zo zadania. Najväčší ciferný súčet pre čísla menšie ako milión je 54, teda máme týchto šesť možností pre n: 9, 18, 27, 36, 45 a 54.

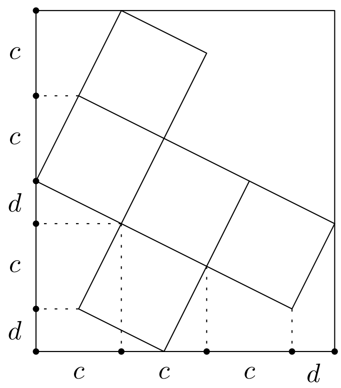
Úloha 34. Kus skladačky zložený z piatich štvorcov so stranou dĺžky a je vpísaný do obdĺžnika s rozmermi 7×8 ako na obrázku:



Určte veľkosť a.

Výsledok. $\sqrt{5}$

Riešenie. Označme c, d postupne dĺžky dlhšej a kratšej projekcie strany štvorca na stranu obdĺžnika.



Potom

$$3c + 2d = 8,$$
$$3c + d = 7,$$

čo má riešenie $c = 2$ a $d = 1$. Z Pytagorovej vety dopočítame

$$a = \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{5}.$$

Úloha 35. Jožo má obdĺžnikovú čokoládu s 5×3 dielikmi. Na ľavý horný dielik si pridal cukor, aby bol tento dielik ešte sladší. Jožo je čokoládu v krokoch, a to takto: V každom kroku si náhodne vyberie, či zje stĺpec, ktorý je úplne napravo, alebo či zje najspodnejší riadok, pričom obe tieto možnosti si vyberie s pravdepodobnosťou $1/2$. Takéto kroky opakuje, až kým nezje celú čokoládu. Aká je pravdepodobnosť, že v poslednom kroku zje iba osladený dielik?

Výsledok. $15/64$

Riešenie. Nech má čokoláda päť riadkov a tri stĺpce. Na proces jedenia čokolády sa môžeme pozerať takto: Jožo si vyberie postupnosť S-iek a R-iek s celkovou dĺžkou $(5-1)+(3-1)=6$ a na základe tejto postupnosti je stĺpce a riadky čokolády. Máme dve možnosti: buď postupnosť obsahuje práve dve S-ká (a štyri R-ká) a v tomto prípade po jedení podľa postupnosti krokov zostane len osladený dielik alebo počet S-iek, resp. R-iek je aspoň počet stĺpcov, resp. riadkov, pričom po jedení podľa takejto postupnosti je celá čokoláda zjedená. V druhom prípade posledný krok nemôže byť zjedenie len osladeného dielika, keďže v tomto prípade nie je dostatok stĺpcov alebo riadkov zjedených na to aby zostal v poslednom riadku alebo stĺpci len jeden dielik.

Celkovo existuje 2^6 postupností S-iek a R-iek (dĺžky 6). Z týchto postupností $\binom{6}{2}$ obsahuje presne dve S-ká. Z toho vypočítame, že hľadaná pravdepodobnosť je

$$\frac{\binom{6}{2}}{2^6} = \frac{15}{64}.$$

Úloha 36. Použijúc každú cifru $1, \ldots, 9$ práve dvakrát, Jožo vytvoril niekoľko navzájom rôznych prvočísel tak, že ich súčet bol najmenší možný. Aká bola hodnota súčtu?

Výsledok. 477

Riešenie. Žiadne prvočíslo okrem 2 a 5 sa nesmie končiť číslicou 5 ani párnym číslom, takže každá z číslic

$$2,\ 5,\ 4,\ 4,\ 6,\ 6,\ 8,\ 8$$

sa musí objaviť na pozícii desiatok v niektorom Jožovom prvočísle. Ďalej, ostávajúce číslice

$$2,\ 5,\ 1,\ 1,\ 3,\ 3,\ 7,\ 7,\ 9,\ 9$$

sa musia objaviť na pozícii jednotiek v niektorom Jožovom prvočísle. Súčet je teda najmenej

$$10(2+5+4+4+6+6+8+8)+2+5+1+1+3+3+7+7+9+9=477.$$

Tento súčet možno dosiahnuť napríklad prvočíslami:

$$2,\ 5,\ 29,\ 53,\ 41,\ 47,\ 61,\ 67,\ 83,\ 89.$$

Úloha 37. Janko a Kikina majú dva polynómy $J(x) = x^2 + 2x + 10$ a $K(x) = x^2 - 8x + 25$. Každý si do nich dosadil svoje obľúbené kladné celé číslo j a k a dostali rovnakú hodnotu, resp. $J(j) = K(k)$. Nájdite všetky možné hodnoty $|j - k|$.

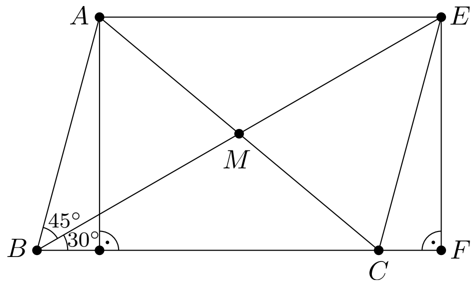
Výsledok. 1, 5

Riešenie. Ľavú stranu rovnice $J(j) - K(k) = 0$ možno rozložiť na $(j + k - 3)(j - k + 5) = 0$. Teda z ľavej zátvorky buď $\{j, k\} = \{1, 2\}$ alebo z pravej $|j - k| = 5$.

Úloha 38. Výška na stranu a v trojuholníku ABC má rovnakú dĺžku ako ťažnica na stranu b. Navyše vieme, že uhol ABC má veľkosť 75°. Nájdite pomer $|AB| : |BC|$.

Výsledok. $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Riešenie. Prenesme bod B v stredovej súmernosti cez stred M úsečky AC a nazvime ho E. Označme F kolmý priemet bodu E na priamku BC. Potom v pravouhlom trojuholníku EFC platí $\sin(\sphericalangle EBC) = \frac{|EF|}{|BE|} = \frac{1}{2}$, čiže $|\sphericalangle EBC| = 30°$ (vieme, že to nemôže byť 150°, lebo $\sphericalangle ABC$ má veľkosť iba 75°). Čiže $|\sphericalangle ABM| = |\sphericalangle ABE| = 75° - 30° = 45°$.



Zo sínusovej vety v trojuholníkoch ABM a CBM potom môžeme vyjadriť:

$$\frac{|BM|}{\sin(\sphericalangle BAC)} = \frac{|AM|}{\sin 45°} = \frac{|AM|}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

a

$$\frac{|BM|}{\sin(\sphericalangle BCA)} = \frac{|CM|}{\sin 30°} = \frac{|AM|}{\frac{1}{2}}.$$

Podelením týchto rovností (všimnime si že $|AM| = |CM|$) a zo sínusovej vety v trojuholníku ABC dostávame:

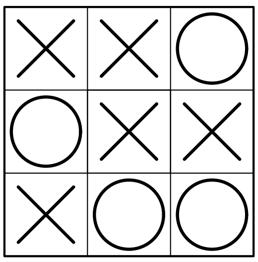
$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{\sin(\sphericalangle BCA)}{\sin(\sphericalangle BAC)} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Úloha 39. Piškvorky. Je to hra pre dvoch hráčov, kde jeden používa symboly koliesok a druhý krížiky, ktoré potom striedavo umiestňujú do tabuľky s rozmermi 3×3. Jeden z hráčov vyhráva, ak sú tri jeho symboly uložené v rovnakom riadku, stĺpci alebo na tej istej diagonále. Hra končí remízou, ak je celá tabuľka zaplnená a žiadny z hráčov nevyhral. Koľko rôznych rozložení symbolov v tabuľke môže nastať pri remíze? Rozloženia, líšiace sa otočením alebo obrátením tabuľky, považujeme za rozdielne. Hociktorý z hráčov môže začínať hru.

Výsledok. 32

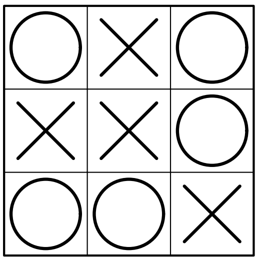
Riešenie. Poznáme štyri rozdielne prípady podľa symbolu v strede tabuľky a symbolu, ktorý je v tabuľke 5-krát.

V strede je krížik a v tabuľke je dokopy 5 krížikov (nazvime si tento prípad „Krížik-krížik“). Znamená to, že okrem stredného políčka musíme pridať ešte ďalšie 4 krížiky do tabuľky tak, aby sme nepoužili žiadnu celú diagonálu, stĺpec ani riadok. Dostaneme vzor (Obrázok 1), ktorý nie je symetrický podľa žiadnej osi ani podľa otočenia. Tým pádom, tento vzor vytvára $4 + 4 = 8$ rôznych rozložení pri remíze.

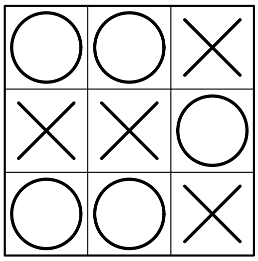


Obrázok 1

V prípade „Krížik-koliesko“ potrebujeme položiť 5 koliesok do tabuľky s krížikom v strede. Nemôžeme použiť všetky štyri rohy, keďže stred nie je dostupný a piate koliesko by tak privodilo výhru. Na druhej strane, potrebujeme mať aspoň jedno koliesko na každej diagonále, v opačnom prípade by vyhrali krížiky. Preto dáme kolieska buď presne do troch rohov alebo do dvoch. Pri obdivoch týchto možnostiach máme presne určené, kam dáme zvyšné kolieska, aby sa hra skončila remízou (Obrázky 2 a 3). Oba prípady sú nesúmerné podľa otočenia, ale sú súmerné podľa nejakej osi, preto existujú 4 možnosti otočenia pre každý z týchto dvoch prípadov.



Obrázok 2



Obrázok 3

Prípady „Koliesko-koliesko“ a „Koliesko-krížik“ vychádzajú z prípadov „Krížik-krížik“ a „Krížik-koliesko“ s tým rozdielom, že v strede je teraz koliesko, nie krížik, čo znamená, že dokopy je možností 2-krát toľko, čiže $2(8+4+4) = 32$.

Úloha 40. Nájdite najväčšie kladné celé číslo a také, že žiadne kladné celé číslo b nespĺňa podmienku:

$$\frac{4}{3} < \frac{a}{b} < \frac{25}{18}.$$

Výsledok. 32

Riešenie. Urobme prevrátené hodnoty všetkých zlomkov. Spolu s touto operáciou musíme otočiť znamienka nerovností:

$$0{,}75 = \frac{3}{4} > \frac{b}{a} > \frac{18}{25} = 0{,}72.$$

Veľkosť intervalu medzi 0,72 a 0,75 je $0{,}03 > 1/34$, takže pre všetky $a \geq 34$ existuje riešenie. Pre $a = 33$ je riešenie $b = 24$ $(24/33 = 0{,}\overline{72})$. Pre $a = 32$ neexistuje riešenie, keďže $24/32 = 0{,}75$ a $1/32 > 0{,}03$.

Úloha 41. Na cyklovýlete dĺžky 110 km z Brezna do Popradu museli Adam a Jerry prekonať tri kopce. Na začiatku Adam, zdatný v rátaní spamäti, povedal: „Ak vynásobíme tri vzdialenosti z Brezna ku jednotlivým kopcom, dostaneme násobok čísla 2 261.“ Po chvíľke Jerry odvetila: „Násobok čísla 2 261 by sme dostali aj vtedy, keby sme vzdialenosti merali z Popradu.“ Po 80 km od začiatku si urobili prestávku a Adam povedal: „Pred Popradom nás čaká už iba jeden kopec.“ Ak sú všetky vzdialenosti v kilometroch celé čísla, nájdite vzdialenosti vrcholov všetkých troch kopcov od Brezna.

Výsledok. 68, 76, 91

Riešenie. Označme si A, B, C vzdialenosti jednotlivých kopcov od Brezna merané v km, nie nutne v poradí, v akom sú na trase. Tieto čísla musia spĺňať $2\,261 \mid ABC$ a $2\,261 \mid (110-A)(110-B)(110-C)$. Keďže $2\,261 = 7\cdot 323 = 7\cdot 17\cdot 19$ a $7 \cdot 17 = 119 > 110$, žiadna zo vzdialeností nemôže mať v prvočíselnom rozklade viac ako jedného z deliteľov 2 261. Podobnú úvahu možno použiť aj na vzdialenosti $(110-A), (110-B), (110-C)$.

Bez ujmy na všeobecnosti, položme $7 \mid A$, $17 \mid B$, $19 \mid C$. Potom $7 \nmid (110-A), 17 \nmid (110-B)$ a $19 \nmid (110-C)$. Buď musí $7 \mid (110-B)$ alebo $7 \mid (110-C)$, keďže $7 \nmid (110-A)$. V prvom prípade, $7 \mid (110-B)$, musí platiť $19 \mid (110-A)$, keďže $19 \nmid (110-C)$ a následne $17 \mid (110-C)$. V druhom prípade $7 \mid (110-C)$, $17 \mid (110-A)$ a $19 \mid (110-B)$.

Jediný spôsob ako rozložiť 110 ako $a \cdot 7 + b \cdot 19$, kde a, b sú celé nezáporné čísla je $110 = 13 \cdot 7 + 1 \cdot 19$. (Všetky rozklady majú tvar $110 = (13+19k)\cdot 7 + (1-7k)\cdot 19$ pre $k \in \mathbb{Z}$, oba koeficienty sú nezáporné iba pre $k = 0$.) Podobne môžeme zistiť, že $110 = 4 \cdot 17 + 6 \cdot 7$ a $110 = 4 \cdot 19 + 2 \cdot 17$. To vedie k dvom riešeniam:

$$A = 13 \cdot 7 = 91, \quad B = 4 \cdot 17 = 68, \quad C = 4 \cdot 19 = 76$$

a

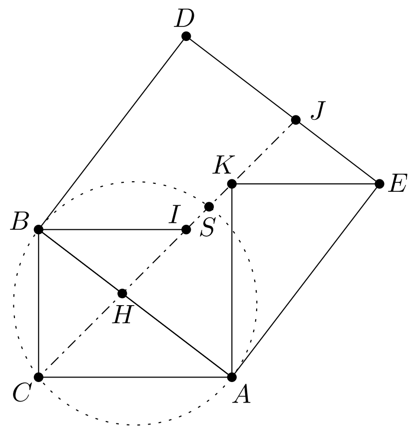
$$A = 6 \cdot 7 = 42, \quad B = 2 \cdot 17 = 34, \quad C = 19.$$

Na základe Adamovej poznámky, že posledný kopec je od Brezna vzdialený viac ako 80 km môžeme druhú možnosť vylúčiť. Jediným riešením sú potom vzdialenosti kopcov 68, 76 a 91 km.

Úloha 42. Nech ABC je pravouhlý trojuholník s pravým uhlom pri vrchole C taký, že $|AC| = 4-\sqrt{3}$ a $|BC| = \sqrt{3}$. Ďalej nech D a E sú také body, že $ABDE$ je štvorec, v ktorom nie je bod C. Nech J je bod na úsečke DE taký, že $|\sphericalangle ACJ| = 45°$. Napokon si ešte označme K bod na úsečke CJ taký, že $AK \parallel BC$. Aký je obsah trojuholníka JKE?

Výsledok. $3\sqrt{3}/8$

Riešenie. Najprv si uvedomme, že $|\sphericalangle EKA| = 90°$; v skutočnosti sú trojuholníky AEK a ABC zhodné, keďže $|AK| = |AC|$, $|AE| = |AB|$ a $|\sphericalangle EAK| = |\sphericalangle BAC|$. Ďalej, stred S štvorca $ABDE$ leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC, pretože ASB a ACB sú pravé uhly. Keďže $|AS| = |BS|$, tak prislúchajúce vnútorné uhly ACS a BCS sú tiež zhodné. Teda S leží na osi CJ uhla ACB. Zobrazme si trojuholník JKE cez bod S; potom bod E sa zobrazí na bod B, J sa zobrazí na H, čo je priesečník úsečiek AB a CJ a K sa zobrazí na I, pričom I leží na úsečke CJ a spĺňa $|\sphericalangle IBC| = 90°$.



Pozrime sa na pravouhlý trojuholník IBC s pravým uhlom pri vrchole B. Jeho obsah je $(\sqrt{3})^2/2 = 3/2$. Keď obsah trojuholníka budeme označovať hranatými zátvorkami, tak môžeme vyjadriť

$$\frac{[IBC]}{[IBH]} = \frac{|IC|}{|IH|} = \frac{|IH| + |HC|}{|IH|} = 1 + \frac{|HC|}{|IH|}.$$

Ďalej, trojuholníky ACH a BIH sú zjavne podobné s koeficientom podobnosti

$$\frac{|HC|}{|IH|} = \frac{|AC|}{|IB|} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

Z toho dostávame, že

$$[JKE] = [IBH] = [IBC] \cdot \frac{|BC|}{|AC| + |BC|} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Úloha 43. Dvaja väzni stoja pred dvomi krabicami. Vedia, že v jednej krabici sú dve biele a jedna čierna guľôčka a v druhej krabici sú dve čierne a jedna biela guľôčka. Nevedia však, ktorá krabica je ktorá. Každý väzeň si musí zvoliť krabicu a vybrať z nej náhodnú guľôčku, ktorú už naspäť do krabice nevráti. Ak si vytiahne bielu, pustia ho na slobodu, inak je popravený. Druhý väzeň vidí prvého zvoliť si krabicu a aj to, akú guľôčku vytiahol. Ak druhý väzeň postupuje optimálne, aká bola jeho šanca dostať sa na slobodu ešte pred tým, ako uvidel, akú guľôčku si prvý väzeň vytiahol? Predpokladáme, že prvý väzeň si volí krabicu náhodne.

Výsledok. 5/9

Riešenie. Označme c farbu guľôčky vytiahnutej prvým väzňom a o farbu druhej vytiahnutej. Pravdepodobnosť, že prvý väzeň ťahal z krabice s guľôčkami farby c, c, o je $\frac{2}{3}$ a pravdepodobnosť, že ťahal z krabice s guľôčkami farby c, o, o, je $1/3$.

Ak si druhý väzeň zvolí rovnakú krabicu ako prvý, tak si vytiahne guľôčku farby c s pravdepodobnosťou

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3},$$

a guľôčku farby o s pravdepodobnosťou

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Ak by si vybral inú krabicu ako prvý väzeň, tak si vytiahne guľôčku farby c s pravdepodobnosťou

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9},$$

a guľôčku farby o s pravdepodobnosťou
$$1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

Pokiaľ je c biela, druhý väzeň sa dostane na slobodu ak si tiež vytiahne c. Keďže $\frac{4}{9} > \frac{1}{3}$, je preňho lepšie ak si vyberie inú krabicu ako prvý väzeň a dostane sa na slobodu s pravdepodobnosťou $\frac{4}{9}$.

Pokiaľ je c čierna, potrebuje si vytiahnuť inú guľôčku ako prvý väzeň. Keďže $\frac{2}{3} > \frac{5}{9}$, je preňho lepšie si zvoliť rovnakú krabicu ako prvý väzeň a dostane sa na slobodu s pravdepodobnosťou $\frac{2}{3}$.

Je zjavné, že c je biela s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ a čierna s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$. Druhý väzeň sa vie dostať na slobodu s pravdepodobnosťou
$$\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{9}.$$

Úloha 44. Aké je najmenšie kladné celé číslo n také, že spomedzi n (nie nutne rôznych) reálnych čísel z intervalu $\langle 1, 2019\rangle$ musia existovať tri čísla, ktoré môžu byť dĺžkami strán trojuholníka?

Výsledok. 18

Riešenie. Pre $n < 18$ si zoberme prvých n členov Fibonacciho postupnosti definovanej takto: $a_1 = a_2 = 1$ a $a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$. Sú to čísla: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597. Zjavne najväčšie číslo z ľubovoľnej vytvorenej trojice je väčšie alebo prinajmenšom rovné súčtu zvyšných dvoch čísel trojice a teda žiadna trojica nemôže reprezentovať strany trojuholníka. Pre $n = 18$ si označme vybrané čísla $x_1 \leq \cdots \leq x_{18}$. Ak žiadna trojica z nich netvorí strany trojuholníka dostávame $x_1, x_2 \geq 1$, $x_3 \geq x_1 + x_2 \geq 2, x_4 \geq x_3 + x_2 \geq 2 + 1 = 3, \ldots,$ pričom v každej nerovnosti dostávame za spodné ohraničenie práve číslo z Fibonacciho postupnosti. Skončíme pri $x_{18} \geq 987 + 1597 > 2019$, čo je spor a tým, že $x_{18} \in \langle 1, 2019\rangle$. Preto hľadané číslo n je 18.

Úloha 45. Nech $\sigma(k)$ označuje počet všetkých kladných deliteľov čísla k. Nájdite najmenšie kladné celé číslo n také, že najväčší spoločný deliteľ čísel $\sigma(n)$ a $\sigma(n^3)$ nie je mocnina dvojky (vrátane $2^0 = 1$).

Výsledok. $432 = 2^4 \cdot 3^3$

Riešenie. Číslo n zapíšeme v tvare prvočíselného rozkladu
$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t}.$$

O funkcií $\sigma(n)$ potom vieme, že platí
$$\sigma(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_t + 1).$$

Podmienka, že najväčší spoločný deliteľ nie je mocnina dvojky je ekvivalentná s tým, že existuje nepárne prvočíslo q, ktoré delí aj $\sigma(n)$, aj $\sigma(n^3)$. Keďže
$$\sigma(n^3) = (3\alpha_1 + 1)(3\alpha_2 + 1) \cdots (3\alpha_t + 1),$$

tak toto číslo nikdy nie je deliteľné 3, preto najmenšia možná hodnota q môže byť 5. Ďalej si všimneme, že q nemôže deliť zároveň $\alpha_i + 1$ a $3\alpha_i + 1$, pretože potom by muselo deliť aj
$$3(\alpha_i + 1) - (3\alpha_i + 1) = 2.$$

Preto môžme uvažovať rôzne $i,\ j \in \{1, \ldots, t\}$ také, že $q \mid \alpha_i + 1$ a $q \mid 3\alpha_j + 1$. Keďže hľadáme najmenšie možné n, tak môžme uvažovať, že $t = 2$, $i = 1$ a $j = 2$.

Ak $q = 5$ tak najmenšie možné hodnoty pre α_1, α_2 sú $\alpha_1 = 4$ a $\alpha_2 = 3$. Zoberme potom najmenšie možné prvočísla, ktoré umocníme na nájdené alfy a to sú $p_1 = 2$ a $p_2 = 3$. Preto $n = 2^4 \cdot 3^3 = 432$.

Ak $q \geq 7$, tak $\alpha_1 \geq 6$ a $\alpha_2 \geq 2$, z čoho dostaneme, že
$$n \geq 2^6 \cdot 3^2 = 576 > 432,$$

pričom sme ukázali, že 432 je naozaj najmenšia možná hodnota n.

Úloha 46. Majme pravouhlý trojuholník ABC, v ktorom $|\sphericalangle ACB| = 90°$, $|AC| = 15$ a $|BC| = 20$. Nech D je bod na úsečke ABtaký, že $CD \perp AB$. Kružnica t, ktorá je vpísaná trojuholníku ACD, sa dotýka strany CD v bode T. Ďalšia kružnica c sa taktiež dotýka strany CD v bode T a ešte sa dotýka aj strany BC. Označme si dva priesečníky kružnice c so stranou AB ako X a Y. Aká je dĺžka úsečky XY?

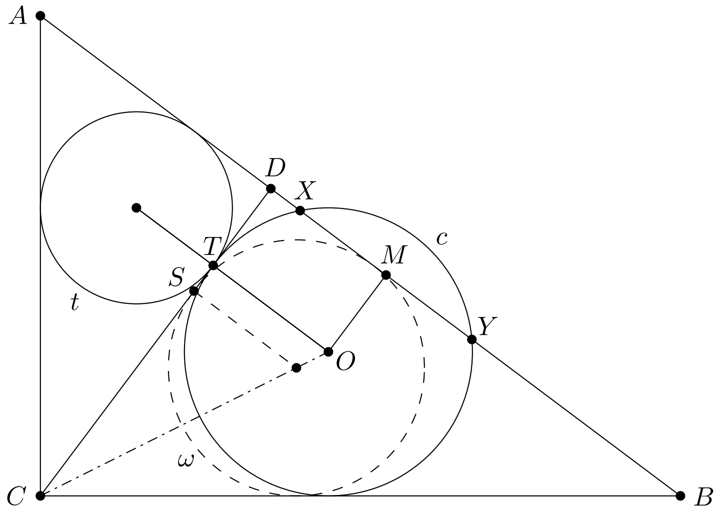
Výsledok. $3\sqrt{5}$

Riešenie. Použitím Euklidových viet vypočítame

$$|AD| = \frac{|AC|^2}{|AB|} = 9, \quad |BD| = \frac{|BC|^2}{|AB|} = 16, \quad |CD| = \sqrt{|AD| \cdot BD} = 12.$$

Polomer kružnice t, čo je aj dĺžka úsečky DT, môžeme vypočítať pomocou dobre známeho vzťahu. Vydelíme obsah trojuholníka ACD polovicou obvodu a dostaneme $|DT| = 58/(36/2) = 3$. Označme si kružnicu vpísanú do trojuholníka BCD ako ω. Nech sa dotýka úsečky CD v bode S. Podobne vieme vypočítať aj polomer kružnice ω a to je $|DS| = 4$. Rovnoľahlosť so stredom v bode C a koeficientom $|CT|/|CS| = 9/8$ zobrazí kružnicu ω na kružnicu c. Teda polomer kružnice c je $4 \cdot 9/8 = 9/2$. Nech M je stred úsečky XY a O je stred kružnice c. Vieme, že $|XO| = 9/2$ a $|OM| = |DT| = 3$. Z toho dostávame použitím Pytagorovej vety, že

$$|XY| = 2 \cdot |XM| = 2\sqrt{\frac{9^2}{2^2} - 3^2} = 6\sqrt{\frac{9}{4} - 1} = 3\sqrt{5}.$$



Úloha 47. Každé políčko šachovnice s rozmermi 6×7 je zafarbené na bielo, zeleno, červeno alebo modro. Zafarbenie šachovnice nazývame *krásnym*, ak štyri políčka v ľubovoľnom štvorci rozmerov 2×2 majú rôzne farby. Koľko rôznych krásnych zafarbení existuje?

Výsledok. 1128

Riešenie. Farby dvoch susediacich políčok sú nutne rôzne. Ak máme v jednom riadku použité viac ako dve farby, tak v ňom musíme mať tri po sebe idúce políčka zafarbené tromi rôznymi farbami. Táto trojica políčok presne určuje zafarbenie prislúchajúcich troch stĺpcov. Napríklad, keď máme trojicu políčok zafarbenú farbami $1-2-3$, tak tri susediace políčka pod (alebo nad) týmito tromi políčkami musia byť zafarbené $3-4-1$. Pokračujúc nadol (nahor) určíme celé stĺpce, v ktorých pôvodná trojica políčok je. Vidíme, že každý z týchto stĺpcov je zafarbený iba dvomi farbami. Navyše stĺpec susediaci so stĺpcom zafarbeným dvomi farbami je možné zafarbiť tiež iba dvomi farbami. Rovnakú úvahu vieme zopakovať keď zameníme riadky a stĺpce, nemôžeme mať teda v jednom ofarbení šachovnice aj viac ako dve farby v nejakom riadku, aj viac ako dve farby v nejakom stĺpci.

Šachovnica má 6 riadkov a 7 stĺpcov. Vypočítajme počet zafarbení, ktoré majú v každom riadku iba dve farby. Vyberieme dve farby pre prvý riadok (potom dvojica farieb pre každý riadok je jednoznačne určená) a potom si zvolíme farbu prvého políčka v každom zo 6 riadkov. Takto získame $\binom{4}{2} \cdot 2^6 = 6 \cdot 2^6$ zafarbení. Počet zafarbení, ktoré majú v každom stĺpci len dve farby je analogicky $6 \cdot 2^7$. Ešte musíme odpočítať počet zafarbení, ktoré majú dve farby v každom riadku a taktiež v každom stĺpci (pretože sme ich započítali raz v každom z prípadov, teda spolu dvakrát). Také zafarbenie je jednoznačne určené zafarbením horného ľavého štvorčeka 2×2. Takýchto zafarbení je $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Počet zafarbení šachovnice je $6 \cdot 2^6 + 6 \cdot 2^7 - 24 = 1128$.

Úloha 48. Sto detí stojí v rade. Prvé dieťa má 4 gramy čokolády, druhé má 8, tretie 12 a tak ďalej, až sté dieťa má 400 gramov čokolády. Prvé dieťa dá tretinu svojej čokolády dieťaťu za ním (takže druhé dieťa má teraz $\frac{28}{3}$ gramov čokolády). Druhé dieťa dá potom jednu tretinu nového množstva tretiemu atď. až nakoniec deväťdesiate deviate dieťa dá tretinu poslednému, stému. Koľko gramov čokolády bude mať nakoniec sté dieťa?

Výsledok. $597 + 3^{-99}$

Riešenie. Všetky váhy sú v gramoch. Po prvom kroku má druhé dieťa $8+4/3$. V druhom kroku dá jednu tretinu svojej čokolády tretiemu dieťaťu, ktoré má potom $12 + 8/3 + 4/3^2$. Po treťom kroku má štvrté dieťa $4(4 + 3/3 + 2/3^2 + 1/3^3)$ gramov čokolády. Z toho je už asi celkom zrejmé, že sté dieťa má na konci

$$4\left(100 + \frac{99}{3^1} + \frac{98}{3^2} + \frac{97}{3^3} + \cdots + \frac{2}{3^{98}} + \frac{1}{3^{99}}\right).$$

Označíme vnútro zátvorky:

$$S = 100 + \frac{99}{3^1} + \frac{98}{3^2} + \frac{97}{3^3} + \cdots + \frac{2}{3^{98}} + \frac{1}{3^{99}}.$$

Inak zapísané

$$\begin{aligned} S = \quad & 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{98}} + \frac{1}{3^{99}} + \\ & + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{98}} + \\ & \vdots \\ & + 1 + \frac{1}{3} + \\ & + 1. \end{aligned}$$

Každý riadok vieme vyčísliť ako súčet prvkov geometrickej postupnosti

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} = \frac{1 - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right);$$

dostaneme

$$\begin{aligned} S &= \frac{3}{2}\left(100 - \left(\frac{1}{3^{100}} + \frac{1}{3^{99}} + \cdots + \frac{1}{3}\right)\right) \\ &= \frac{3}{2}\left(100 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3^{99}} + \frac{1}{3^{98}} + \cdots + 1\right)\right) \\ &= \frac{3}{2}\left(100 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{100}}\right)\right). \end{aligned}$$

Aby sme sa dostali späť ku pôvodnému zadaniu vynásobíme súčet štyrmi

$$4S = 4 \cdot \frac{3}{2}\left(100 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{100}}\right)\right) = 600 - 3 + \frac{1}{3^{99}} = 597 + 3^{-99}.$$

Úloha 49. Nájdite všetky celé čísla $n \geq 3$, pre ktoré je výraz

$$\frac{(n-1)^{n-1} - n^2 + 2019 \cdot (n-1)}{(n-2)^2}$$

tiež celé číslo.

Výsledok. 3, 4, 5, 6, 8, 14

Riešenie. Hľadáme také n, ktoré spĺňa $(n-2)^2 \mid (n-1)^{n-1} - n^2 + 2019 \cdot (n-1)$. Môžeme pridať $(n-2)^2$ na pravú stranu, to nám túto podmienku neovplyvní a zbavíme sa tak člena n^2, keďže $n^2 - 4n + 4 - n^2 = -4(n-1)$. Takto dostaneme ekvivalentnú podmienku

$$(n-2)^2 \mid (n-1)^{n-1} + 2015 \cdot (n-1).$$

Keďže $n-1$ a $n-2$ sú nesúdeliteľné, môžeme pravú stranu vydeliť $n-1$. Ďalej použijeme substitúciu $t = n-2$. Potom $t^2 \mid (t+1)^t + 2015$. Nakoniec použijeme binomickú vetu a dostaneme

$$t^2 \mid t^t + \binom{t}{t-1}t^{t-1} + \cdots + \binom{t}{2}t^2 + \binom{t}{1}t + 1 + 2015.$$

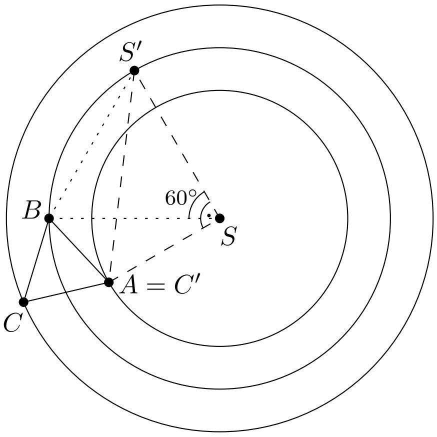
Takže stačí, aby platilo $t^2 \mid 2016$. Rozklad 2016 na prvočísla je $2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, takže hodnoty 1, 2, 3, 4, 6 a 12 sú jediné vyhovujúce pre t. Spätné dosadenie do substitúcie $n = t + 2$ vedie k riešeniam 3, 4, 5, 6, 8, 14.

Úloha 50. Nech ABC je rovnostranný trojuholník s každým vrcholom na inej z troch sústredných kružníc s polomermi 3, 4 a 5. Nájdite všetky možné dĺžky strán trojuholníka.

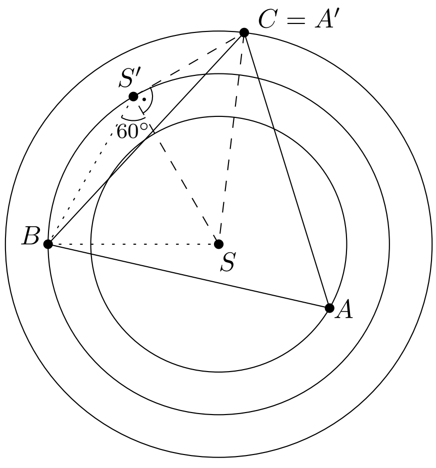
Výsledok. $\sqrt{25-12\sqrt{3}}$, $\sqrt{25+12\sqrt{3}}$

Riešenie. Nech vrchol A je na kružnici s polomerom 3, vrchol B na kružnici s polomerom 4 a vrchol C s polomerom 5 a nech S je stred kružníc. Môžu nastať dva prípady:

Najprv predpokladajme, že S leží mimo trojuholníka ABC. Otáčaním C a S okolo bodu B o $60°$ dostaneme body $C' \equiv A$ a S'. Trojuholník SBS' je rovnostranný so stranou dĺžky 4, a $|S'C'| = |SC| = 5$. Trojuholník $SS'C'$ má strany dĺžky 3, 4 a 5, a teda je pravouhlý, kde $|\sphericalangle S'SC'| = 90°$. Teraz jednoducho vyjadríme $|\sphericalangle BSA| = |\sphericalangle S'SC'| - |\sphericalangle S'SB| = 30°$. Použitím kosínusovej vety pre trojuholník BSA získame $|AB| = \sqrt{25-12\sqrt{3}}$.



Ak S leží vnútri trojuholníka ABC, môžeme rotovať A a S okolo bodu B o $60°$ a dostaneme body $A' \equiv C$ a S'. Obdobne, trojuholník $SS'A'$ je pravouhlý, kde $|\sphericalangle S'SA'| = 90°$. Preto $|\sphericalangle BSA| = |\sphericalangle BS'A'| = |\sphericalangle SS'A'| + |\sphericalangle SS'B| = 150°$. Použitím kosínusovej vety pre trojuholník BSA dostaneme druhé riešenie $|AB| = \sqrt{25+12\sqrt{3}}$.



Úloha 51. Okolo okrúhleho stola sedí rovnomerne sedem ľudí. Na stole je nakreslených sedem šípok tak, že z každého miesta jedna vychádza a na každé miesto smeruje jedna (začiatočný a koncový bod šípky nemusia byť nutne rôzne). Každú minútu ľudia menia miesta: zdvihnú sa z miesta, kde sedia, a sadnú si na miesto, kde končí šípka vychádzajúca z ich miesta, a potom sa stôl otočí v smere hodinových ručičiek o jedno miesto. Aký je najväčší možný počet minút, ktorý uplynie, kým nebudú všetci súčasne na svojich pôvodných miestach po prvýkrát od začiatku?

Výsledok. 84

Riešenie. Najprv ukážeme, že potrebný čas nemôže byť väčší ako 84 minút, a potom ukážeme, že existujú také šípky, pre ktoré sa 84 minút nadobúda. Všimnime si, že každých 7 minút sa stôl otočí do pôvodnej polohy. Ak sa teda pozeráme iba na každú siedmu minútu, ľudia sa presádzajú tak ako pri obyčajnej permutácii. V najhoršom možnom prípade sa každý dostane na svoje miesto po dvanástich permutáciách (najmenší počet aplikácie permutácie siedmych prvkov, kým sa všetky nevrátia na pôvodné miesto (tzv. *rád* permutácie) nemôže vyť väčší ako 12), napríklad

$$1 \to 2 \to 3 \to 1; \quad 4 \to 7 \to 6 \to 5 \to 4.$$

Vo všeobecnosti je rád permutácie najmenší spoločný násobok dĺžky cyklov v rozklade ako vyššie. Ľahko sa možno presvedčiť, že 12 je vskutku najvyšší možný rád. Keďže na stôl sme sa pozerali iba každých sedem minút, v najhoršom prípade bude trvať $7 \cdot 12 = 84$ minút, kým sa všetci vrátia na svoje miesta.

Pokiaľ nakreslíme šípky tak, že na začiatku si miesta vymenia iba prvý a štvrtý človek, po siedmych minútach budú ľudia ozaj preskupení podľa permutácie

$$1 \to 2 \to 3 \to 1; \quad 4 \to 7 \to 6 \to 5 \to 4,$$

ostáva už iba ukázať, že do pôvodného poradia nevrátia skôr: Každú siedmu minútu budú sedadlá 1, 2 a 3 obsadené svojimi pôvodnými užívateľmi (možno v inom poradí), ale zvyšných šesť minút bude aspoň jeden z nich sedieť ďaleko od týchto miest, čiže do pôvodného poradia sa nedostanú.

Úloha 52. Nech $a_1, a_2, a_3 \dots$ je postupnosť kladných reálnych čísel. Od člena a_2 platí, že každý ďalší člen je polovicou súčtu aritmetického a geometrického priemeru jeho susedných členov. Nájdite a_{333}, ak navyše viete, že $a_1 = \frac{2}{7}$ a $a_{11} = \frac{7}{2}$.

Poznámka: Geometrický priemer kladných realných čísel x a y je $\sqrt{xy}$.

Výsledok. 2016

Riešenie. Podmienku vieme zapísať ako

$$a_k = \frac{\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2} + \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a_{k-1}} + \sqrt{a_{k+1}}\right)^2}{4},$$

pre všetky $k \geq 2$. Keďže členy postupnosti sú kladné, tak to môžme prepísať

$$\sqrt{a_k} = \frac{\sqrt{a_{k-1}} + \sqrt{a_{k+1}}}{2}.$$

Zvoľme si teraz postupnosť $b_1, b_2, \dots$, kde $b_k = \sqrt{a_k}$ a všimnime si, že je aritmetická. Označme d rozdiel dvoch po sebe idúcich členov postupnosti. Ďalej vieme, že $b_1 = \sqrt{\frac{2}{7}}$ a $b_{11} = \sqrt{\frac{7}{2}}$, takže

$$d = \frac{\sqrt{7/2} - \sqrt{2/7}}{10} = \frac{1}{2\sqrt{14}}.$$

Preto vieme vypočítať

$$b_{333} = b_1 + 332 \cdot d = \sqrt{\frac{2}{7}} + \frac{332}{2\sqrt{14}} = \frac{4+332}{2\sqrt{14}} = 12\sqrt{14}$$

a výsledok je $a_{333} = b_{333}^2 = 2016$.

Úloha 53. Adam má obdĺžnik s obvodom 444 a strany dĺžok a a b, kde a a b sú prirodzené čísla spĺňajúce $a > b$. Adam skúsil pokryť svoj obdĺžnik štvorcami s hranou dĺžky $a - b$ tak, že prvý štvorec priložil do ľavého horného rohu, a potom pokračoval vo vypĺňaní tak, že vytvoril sieť rovnobežnú s hranami obdĺžnika. Keď už nemal v obdĺžniku miesto na to, aby pridal ďalší štvorec, tak zistil, že plocha, ktorú nevyplnil ,má obsah 1296. Určte sumu všetkých možných dĺžok strán štvorcov, ktorými Adam mohol vypĺňať štvorec.

Výsledok. 166

Riešenie. Máme $a \equiv b \equiv r \pmod{a-b}$ kde $0 \leq r \leq a-b-1$. Preto plocha nezakrytej časti je $ra + rb - r^2 = r^2 + 222r = 1296$, čo je ekvivalentné s tým, že $(r-6)(r-216) = 0$. Očividne $a > r$ a $b > r$, takže musí $r = 6$. Ak odstránime nepokrytú plochu a zvolíme $x = a - r$, $y = b - r$, dostaneme, že obdĺžnik $x \times y$ je pokrytý štvorcami $(x-y) \times (x-y)$ a $x + y = a + b - 2r = 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Všimnime si, že $x - y$ musí byť deliteľom x aj y, teda aj $x + y$. Zvoľme deliteľa $d \mid 210$ a položme $x - y = d$. Potom použijúc $x + y = 210$ vyriešime vzniknutú sústavu rovníc a dostaneme

$$x = \frac{210+d}{2}, \quad y = \frac{210-d}{2}.$$

Keďže riešenie musí byť kladné celé číslo (existuje aspoň jeden štvorec a hranou $a - b = x - y$ teda kladný) a navyše $x - y > 6$ (inak by d bolo menšie), môžme vidieť, že riešenie dostaneme, len ak d je párny deliteľ 210 taký, že $6 < d < 210$. Preto d je jedno z čísel $10, 14, 30, 42, 70$ a súčet je teda 166.

Úloha 54. Nech P je bod vnútri trojuholníka ABC. Označme si postupne A', B' a C' priesečníky priamok AP, BP a CP so stranami BC, CA, AB. Predpokladajme, že

$$|A'P| = |B'P| = |C'P| = 3 \text{ a } |AP| + |BP| + |CP| = 25.$$

Nájdite $|AP| \cdot |BP| \cdot |CP|$.

Výsledok. 279

Riešenie. Budeme značiť obsah trojuholníka pomocou hranatých zátvoriek. Nech

$$a = |AP|, \quad b = |BP|, \quad c = |CP|.$$

Potom

$$\frac{[PBC]}{[ABC]} = \frac{|PA'|}{|AA'|} = \frac{3}{a+3}$$

a podobne

$$\frac{[PCA]}{[ABC]} = \frac{3}{b+3}, \quad \frac{[PAB]}{[ABC]} = \frac{3}{c+3}.$$

Ďalej, $[PBC] + [PCA] + [PAB] = [ABC]$, teda

$$\frac{3}{a+3} + \frac{3}{b+3} + \frac{3}{c+3} = 1,$$

po odstránení zlomkov dostávame

$$54 + 9(a+b+c) = abc.$$

Po dosadení $a + b + c = 25$ dostávame $abc = 279$.

Úloha 55. Zvoľme štrnásť bodov $A_1, \ldots, A_{14}$ na kružnici k proti smeru hodinových ručičiek v tomto poradí tak, že žiadne tri rôzne úsečky dané bodmi $A_1, \ldots, A_{14}$ sa nepretínajú v jednom bode vo vnútri kružnice k (na kružnici k môžu). Kika nakreslila všetky uhlopriečky vrátane strán štrnásťuholníka, avšak zo vzniknutej čmáranice nič nevidela, a tak sa rozhodla vymazať všetky strany a uhlopriečky sedemuholníkov $A_1A_3A_5A_7A_9A_{11}A_{13}$ a $A_2A_4A_6A_8A_{10}A_{12}A_{14}$. Na koľko oblastí rozdeľujú zvyšné úsečky vnútro kružnice k?

Výsledok. 295

Riešenie. Postupné pridávajme úsečky do prázdneho obrázka až kým nebudeme mať výsledný obrázok. Všimneme si, že keď pridáme úsečku tak počet oblastí, ktoré vzniknú je 1 + počet prienikov a už nakreslenými úsečkami. Preto počet oblastí bude

$$1 + \text{počet úsečiek} + \text{počet priesečníkov}$$

Nazvime body $A_1, A_3, \ldots, A_{13}$ *nepárne* a zvyšné *párne*. Nevymazané úsečky štrnásťuholníka sú tie medzi párnymi a nepárnymi bodmi. A teda ich je $7 \cdot 7 = 49$.

Aby sme spočítali počet priesečníkov, musíme si uvedomiť, že ak sa dve úsečky pretnú, tak ich koncové body musia byť na kružnici v takom poradí, že párne susedia a nepárne susedia. Navyše vieme, že taká štvorica bodov má práve jeden priesečník, preto nám stačí spočítať počet týchto štvoričiek. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že A_1 je prvý nepárny bod v štvoričke; potom rozdelíme body do sedem párov $(A_2, A_3), (A_4, A_5), \ldots, (A_{14}, A_1)$ a všimneme si, že zvyšné tri body štvoričky musia byť v rôznych pároch. Naopak, ľubovoľná voľba troch rôznych párov vytvorí požadovanú štvoričku bodov: vyberieme nepárne číslo z prvej dvojičky a párne zo zvyšných dvoch. Keďže je sedem možností ako vybrať prvý nepárny bod a $\binom{7}{3}$ možností ako vybrať tri páry, tak máme

$$7 \cdot \binom{7}{3} = 245$$

priesečníkov. Aby sme spočítali počet oblastí, stačí už len spočítať $1 + 49 + 245 = 295$.

Úloha 56. Nájdite počet usporiadaných štvoríc (a, b, c, d), kde a, b, c, d sú kladné celé čísla spĺňajúce

$$a + b + c + d = 505 \quad \text{a} \quad ab = cd.$$

Výsledok. 800

Riešenie. Vynásobme prvú rovnicu číslom a a dosadením z druhej rovnice dostávame: $(a+c)(a+d) = 505a = 5 \cdot 101 \cdot a$, pričom 5 aj 101 sú prvočísla. Keďže oba výrazy v zátvorkách sú väčšie ako a, tak jedna z nich musí byť rovná $5k$ a druhá musí byť rovná $101l$, pričom $kl = a$.

Predpokladajme, že $a+c = 5k$ a $a+d = 101l$ pre pevné k a l spĺňajúce $kl = a$. Vyjadríme $c = k(5-l)$, $d = l(101-k)$ a $b = 505 - a - d - c = (101-k)(5-l)$. Môžeme jednoducho overiť, že usporiadaná štvorica

$$(a, b, c, d) = (kl, (101-k)(5-l), k(5-l), l(101-k))$$

spĺňa druhú rovnicu, teda $ab = cd$ a je správnym riešením daného systému pre ľubovoľné $l = 1, 2, 3, 4$ a $k = 1, 2, \ldots, 100$. Žiadne dve z týchto 400 riešení nie sú rovnaké. Keby dva páry (k_1, l_1) a (k_2, l_2) dávali to isté vyššie uvedené riešenie, tak z $k_1l_1 = k_2l_2$ a $(5-l_1)k_1 = (5-l_2)k_2$ vyplýva, že $k_1 = k_2$ a $l_1 = l_2$.

Analogicky, pre prípad $a + c = 101l$ a $a + d = 5k$ získame 400 po dvoch rôznych riešení

$$(a, b, c, d) = (kl, (101-k)(5-l), l(101-k), k(5-l))$$

pre ľubovoľné $l = 1, 2, 3, 4$ a $k = 1, 2, \ldots, 100$. Žiadne z nájdených riešení v druhom prípade sa nezhoduje a riešením z prvého prípadu, lebo $5k = a+c = 101l$ neplatí pre žiadne z možných k a l. Máme teda spolu $400 + 400 = 800$ štvoríc.