Náboj 2020 pro vás připravili studenti Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze a organizátoři Matematického korespondenčního semináře MFF UK Praha ve spolupráci s Korešpondenčným matematickým seminárom FMFI UK Bratislava, Korešpondenčným matematickým seminárom PF UPJŠ Košice, Matematickým ústavem Slezské Univerzity v Opavě, Fakultou informatiky a matematiky Univerzity v Pasově, Institutem pro didaktiku matematiky JKU v Linci, Fakultou matematiky a informatiky UJ v Krakově, Varšavskou Polytechnikou, Vratislavskou Polytechnikou, Bělostockou Polytechnikou, XX. Lyceem v Gdaňsku, Přírodovědeckou fakultou ELTE v Budapešti, Fakultou informačních technologií PE ve Veszprému, Edinburskou univerzitou, Universitou v Cambridgi, Polytechnikou ETH v Curychu, gymnáziem Spektrum v Konstanci, Universitou v Glasgow, Státní Univerzitou Fratiška Skoriny v Gomelu, Národní Univerzitou Tarase Ševčenka v Kyjevě, Universitou ve Vídni, Universitou v Lipsku a Moskevským inženýrsko-fyzikálním Institutem.

Na přípravě úloh Náboje 2020 se podíleli (v abecedním pořadí): Filip Čermák, Anna Doležalová, Lukas Donner, Erich Fuchs, Manuel Graf, Andrzej Grzesik, David Hruška, Bettina Kreuzer, Alexandra Krüger, Jakub Löwit, Marek Murin, Dmitrij Nikolenkov, Gleb Pogudin, Pawel Poplawski, Jozef Rajník, Samuel Roth, Pawel Sawicki, Alexander Slávik, Martin Sýkora, Josef Tkadlec a Martin Töpfer.

Na překladu úloh se podíleli Michal Buráň, Jan Kadlec, Barbora Kociánová, Jakub Krásenský, Jan Krejčí, Hedvika Ranošová, Michal Töpfer a Martina Vaváčková.

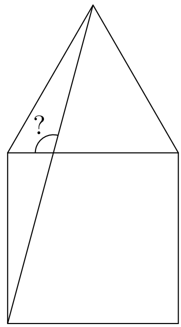
Pražský organizační tým Náboje 2020 tvořili Matěj Doležálek, Anna Doležalová, David Hruška, Jan Krejčí, Marian Poljak, Alexander Slávik a Martin Sýkora.

Globální partner soutěže:

Generální partner soutěže:

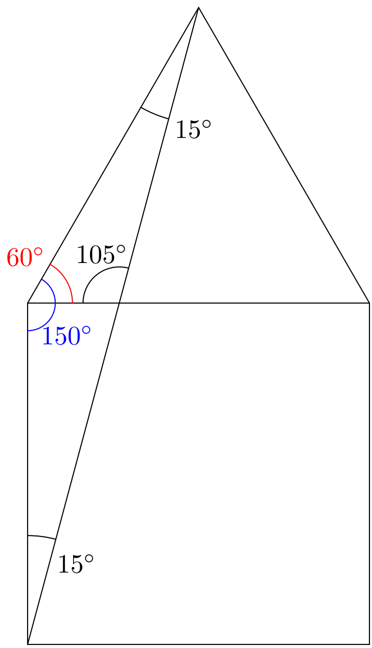
Partneři soutěže:

Úloha 1. Kuba nakreslil domek tvořený čtvercem a rovnostranným trojúhelníkem. Všechny jeho strany mají stejnou délku. Jaká je velikost úhlu (ve stupních), který je vyznačen v obrázku?



Výsledek: 105°

Řešení. Všimneme si, že daná úsečka je základnou rovnoramenného trojúhelníku s úhly 150°, 15°, 15°. Hledaný úhel je proto $180° - 60° - 15° = 105°$.



Úloha 2. Členové sportovního týmu pózují na fotku. Oblékli si dresy s různými kladnými celými čísly a stoupli si vedle sebe do jedné řady. Fotograf si všiml, že sportovec nejvíce vpravo má číslo 72 a že číslo každého sportovce dělí číslo jeho souseda napravo (strany jsou popsány z pohledu fotografa). Kolik nejvýše sportovců může být na fotce?

Výsledek: 6

Řešení. S každým posunem doleva musíme číslo dresu vydělit nějakým celým číslem větším než 1. Prvočíselný rozklad 72 je $2^3 \cdot 3^2$. S každým krokem se exponent alespoň jednoho z prvočísel zmenší, takže můžeme mít nejvýše $3 + 2 + 1 = 6$ sportovců. Posloupnost 1, 2, 4, 8, 24, 72 má délku 6 a splňuje podmínky, takže odhad 6 je skutečně optimální.

Úloha 3. Každý člen smyčcového souboru umí hrát na housle nebo na violu a přesně čtvrtina z nich umí hrát na oba nástroje. Pokud hraje 32 členů na housle a 23 na violu, kolik hudebníků je v souboru?

Výsledek: 44

Řešení. Označme si počet hudebníků n. Sečtením 23 a 32 dostaneme $n + \frac{n}{4}$, protože jsme započítali dvakrát ty, kteří hrají na housle i violu. Po úpravě vyjde $n = 44$.

Úloha 4. Cecil vynásobil pět po sobě jdoucích kladných celých čísel a dostal číslo C. David udělal totéž, ale jeho posloupnost začala číslem o jedna větším. Vyšlo mu číslo D. Jaké bylo nejmenší z Davidových čísel, pokud $\frac{C}{D} = \frac{4}{5}$?

Výsledek: 21

Řešení. Označme si n Cecilovo nejmenší číslo. Potom

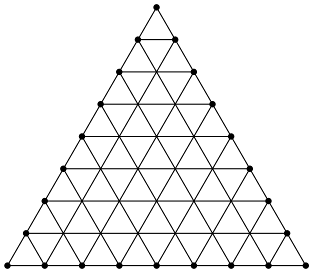
$$C = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).$$

David začal s $n+1$, takže $D = (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$. Dostaneme

$$\frac{4}{5} = \frac{C}{D} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} = \frac{n}{n+5}.$$

Řešením této rovnice je $n = 20$. Nejmenší z Davidových čísel je proto 21.

Úloha 5. Když každému trojúhelníčku přiřadíme počet trojúhelníčků, se kterými sdílí hranu, jaký bude součet všech těchto čísel?



Výsledek: 168

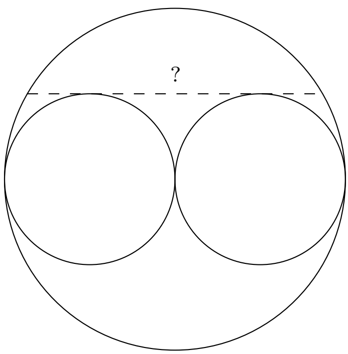
Řešení. Obrázek obsahuje 18 trojúhelníčků se dvěma sousedy a 3 trojúhelníčky s jedním sousedem. Zbývajících $64 - 18 - 3 = 43$ trojúhelníčků má tři sousedy. Součet je tedy $3 \cdot 43 + 2 \cdot 18 + 3 = 168$.

Úloha 6. Najděte největší kladné celé číslo n takové, že $n^2 - 5n + 6$ je prvočíslo.

Výsledek: 4

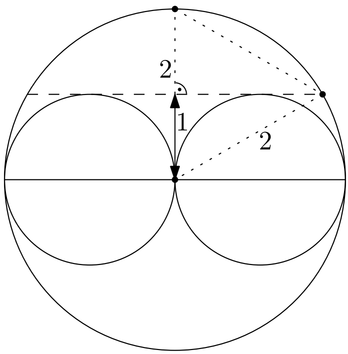
Řešení. Aby $n^2 - 5n + 6 = (n-2)(n-3)$ mohlo být prvočíslo, musí jeden z činitelů být ± 1. Největší n, pro které se to stane, je 4. Po dosazení $n = 4$ skutečně dostaneme prvočíslo, konkrétně 2.

Úloha 7. Dvě kružnice s poloměry 1 se dotýkají ve středu velké kružnice, která se dotýká obou menších kružnic. Určete délku čárkované úsečky, která je tečnou obou menších kružnic a jejíž krajní body leží na velké kružnici jako na obrázku.



Výsledek: $2\sqrt{3} \doteq 3{,}464$

Řešení.



Čárkovaná úsečka se nachází ve vzdálenosti 1 nad vodorovným průměrem velké kružnice. Střed velké kružnice, jeden krajní bod čárkované úsečky spolu s bodem „nahoře“ velké kružnice tedy tvoří rovnoramenný trojúhelník se svislou základnou a rameny délky 2. Výsledek je tedy dvojnásobek délky výšky v rovnostranném trojúhelníku, který má strany délky 2, a můžeme ho určit například z Pythagorovy věty.

Úloha 8. Čtyři matematici seděli u stolu před ošatkou plnou preclíků. Daniel odešel na záchod. Zatímco byl pryč, Adam, Beáta a Cyril si každou minutu vzali společně jeden preclík, rozdělili ho na tři stejné díly a snědli. Po nějaké době se Daniel vrátil. Společně pak dále jedli jeden preclík za minutu, ale Daniel dostal $\frac{2}{5}$ každého preclíku a ostatní po $\frac{1}{5}$. Po chvíli Adam poznamenal, že toho on i Daniel snědli stejně. Jaký je poměr doby, kterou Daniel strávil na záchodě, ku době, po kterou s ostatními ujídal preclíky? (Řešení napište ve tvaru zlomku.)

Výsledek: $\frac{3}{5} = 0{,}6$

Řešení. Označme si t_a a t_p časy, po které byl Daniel pryč a přítomen. Jelikož Adam a Daniel snědli stejně preclíků, dostaneme

$$\frac{2}{5}t_p = \frac{1}{3}t_a + \frac{1}{5}t_p \implies \frac{t_a}{t_p} = \frac{3}{5}.$$

Úloha 9. Směnárna v Praze nabízí mince za tyto ceny: korunu za 40 centů, dvoukorunu za 50 centů, pětikorunu za 1 euro, desetikorunu za 2 eura, dvacetikorunu za 4,1 eur a padesátikorunu za 9,9 eur. Honza chce směnit všech svých 11,8 eur, ale od žádného druhu nechce koupit více než jednu minci. Jakou částku (v korunách) dostane? Nalezněte součet všech možných řešení.

Výsledek: 58

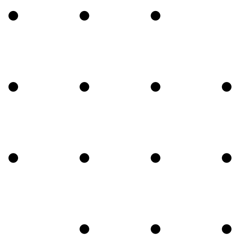
Řešení. Úlohu převedeme na rovnici

$$11{,}8 = 0{,}4 \cdot x_1 + 0{,}5 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 + 4{,}1 \cdot x_5 + 9{,}9 \cdot x_6,$$

kde všechny x_i nabývají hodnot z $\{0, 1\}$.

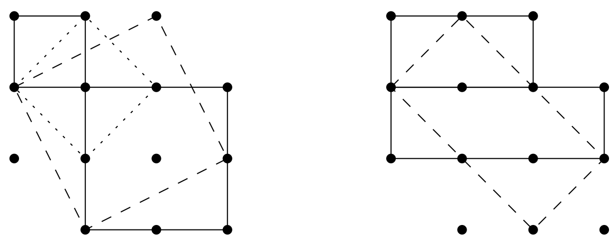
Součet cen mincí bez padesátikoruny je $0{,}4 + 0{,}5 + 1 + 2 + 4{,}1 < 11{,}8$, takže x_6 musí být 1. Řešíme $1{,}9 = 0{,}4 \cdot x_1 + 0{,}5 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 + 4{,}1 \cdot x_5$. Pokud $x_4 = 1$ nebo $x_5 = 1$, přesáhneme 11,8, takže $x_4 = x_5 = 0$. Ale $0{,}4 + 0{,}5 + 1 = 1{,}9$, proto jediné řešení je $x_1 = x_2 = x_3 = x_6 = 1$ a $x_5 = x_4 = 0$. Honza dostane $1 + 2 + 5 + 50 = 58$ korun.

Úloha 10. Na obrázku je černě vyznačeno čtrnáct bodů z pravidelné čtvercové mřížky. Kolik existuje obdélníků, jejichž všechny čtyři vrcholy jsou černé?



Výsledek: 27

Řešení. Sedm možných typů obdélníků je zakresleno na obrázku.



Dohromady máme 7 jednotkových čtverců, 2 čtverce velikosti 2×2, potom 4 čtverce vyznačené tečkovanou čarou a 2 jako ten s přerušovanou čarou. Pak máme ještě 8 obdélníků se stranami délky 1 a 2, dále 2 obdélníky se stranami délky 1 a 3 a konečně 2 obdélníky jako ten s přerušovanou čarou.

Celkem je to $7 + 2 + 4 + 2 + 8 + 2 + 2 = 27$ obdélníků.

Úloha 11. Jaká je hodnota kladného celého čísla n, pokud nejmenší společný násobek 60 a n je o 777 větší než největší společný dělitel 60 a n?

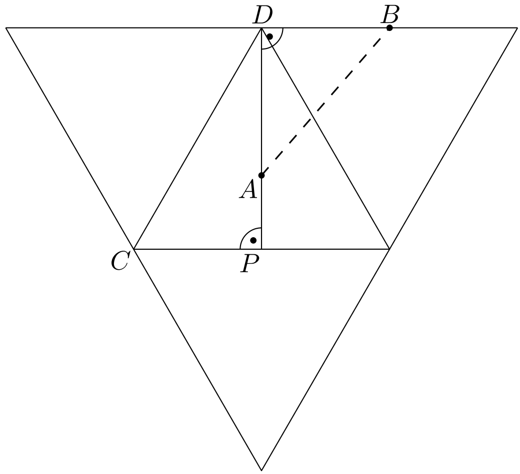
Výsledek: 39

Řešení. Chceme vyřešit rovnici $\operatorname{nsn}(60, n) = 777 + \operatorname{NSD}(60, n)$, kde nsn je nejmenší společný násobek a NSD je největší společný dělitel. Největší společný dělitel 60 a n dělí 60, takže je to jedno z čísel 1, 2, 3, 5, 6, 10, 12, 20, 30 nebo 60. Obě strany rovnice jsou dělitelné 60 a jediná možná hodnota $\operatorname{NSD}(60, n)$, která tohle splňuje, je 3. Ale pak $\operatorname{NSD}(60, n) = 780$ a $60 \cdot n = 3 \cdot 780$, takže $n = 39$.

Úloha 12. Mravenec sedí uprostřed stěny pravidelného čtyřstěnu, který má hrany délky 1. Chce se dostat do středu některé hrany, která nenáleží mravencově současné stěně. Jakou nejmenší vzdálenost musí ujít, aby se tam dostal? Mravenec se může pohybovat jen po povrchu čtyřstěnu.

Výsledek: $\sqrt{\frac{7}{12}} \doteq 0{,}764$

Řešení.



Rozložme povrch čtyřstěnu do roviny jako na obrázku. Mravenec stojí v bodě A a chce se dostat do B. Síť čtyřstěnu je rovinná, takže nejkratší cesta musí být úsečka (čárkovaná úsečka). Spočítáme $|PD|$ z Pythagorovy věty jako

$$|PD|^2 = |CD|^2 - |CP|^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4},$$

tedy, $|PD| = \sqrt{\frac{3}{4}}$. Takže

$$|AD| = \frac{2}{3} \cdot |PD| = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Jelikož $|DB| = \frac{1}{2}$, můžeme znovu použít Pythagorovu větu a spočítat

$$|AB|^2 = |AD|^2 + |DB|^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12},$$

což dává výsledek

$$|AB| = \sqrt{\frac{7}{12}} \doteq 0{,}76376.$$

Úloha 13. Anička, Bára, Cecilka a Danča si v nějakém pořadí vylosovaly čísla 3, 6, 9 a 12 (každé číslo bylo taženo právě jednou). Dvě děvčata mluví vždy pravdu a dvě vždy lžou. O tom, co vylosovaly, řekly následující:

Anička: Dostala jsem dvakrát větší číslo než Danča.

Bára: Dostala jsem třikrát větší číslo než Danča.

Cecilka: Dostala jsem čtyřikrát větší číslo než Danča.

Danča: Nedostala jsem nejmenší číslo.

Jaký je součin čísel, které si ty dvě lhářky vytáhly?

Výsledek: 27

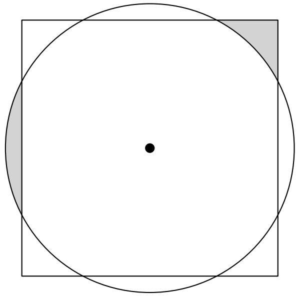
Řešení. Pokud Danča dostala 3, pak lže a mezi ostatními je právě jedna lhářka. To však není možné, protože by si dvě dívky musely vytáhnout stejné číslo. Pokud Danča dostala 9 nebo 12, všechny ostatní by lhaly, protože tak vysoká čísla v zadání nebyla. Danča tedy dostala 6. Jediná, která může v této situaci říkat pravdu, je Anička, pokud si vylosovala 12. Bára a Cecilka jsou lhářky a vylosovaly si v nějakém pořadí 3 a 9. Součin jejich čísel je 27.

Úloha 14. Najděte nejmenší kladné celé číslo, které má přesně 24 kladných dělitelů, z nichž je přesně 8 lichých.

Výsledek: 420

Řešení. Pokud má hledané číslo prvočíselný rozklad $n = {p_1}^{a_1} \cdots {p_k}^{a_k}$, pak počet dělitelů je $(a_1+1)\cdots(a_k+1)$. Počet lichých dělitelů spočítáme podobně, jen ze součinu vynecháme $a_i + 1$, kde a_i je exponent pro $p_i = 2$. Protože $24 = 8 \cdot 3$ a lichých dělitelů je 8, exponent pro 2 je 2. Z minimality n dostaneme, že exponenty lichých prvočísel tvoří nestoupající posloupnost. Hodnota n je tedy jedna z následujících: $2^2 \cdot 3^7$, $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$, $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Nejmenší z nich je $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$.

Úloha 15. Kružnice a čtverec sdílejí střed jako na obrázku. Jaký je podíl délky strany čtverce a poloměru kružnice, pokud mají šedé oblasti stejný obsah?



Výsledek: $\sqrt{\pi} \doteq 1{,}772$

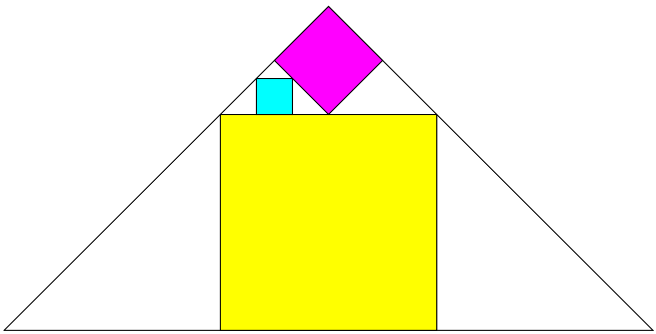
Řešení. Obsahy šedých oblastí jsou stejné, takže kruh a čtverec mají stejný obsah, protože obsahy čtverce i kruhu jsou rovny součtu obsahu jejich průniku a čtyřnásobku šedé oblasti. Pokud je a délka strany čtverce a r poloměr kružnice, pak $a^2 = r^2\pi$ a $a : r = \sqrt{\pi}$.

Úloha 16. Lenka napsala posloupnost $1, 2, 3, \ldots, 20$ a plusové nebo minusové znaménko mezi každá dvě po sobě jdoucí čísla tak, aby byl výsledek 192. Kolika způsoby to mohla udělat?

Výsledek: 5

Řešení. Číslo 1 je kladné, protože znaménka jsou napsaná jen mezi čísly. Součet $1+2+\cdots+20$ je 210. Lenka dostala o 18 méně, takže součet čísel po minusech je 9. Záporná znaménka jsou tedy před prvky trojice $(2, 3, 4)$, nebo jednoho z párů $(2, 7)$, $(3, 6)$, $(4, 5)$, nebo před číslem 9. Lenka tedy mohla dostat výsledek 192 pěti způsoby.

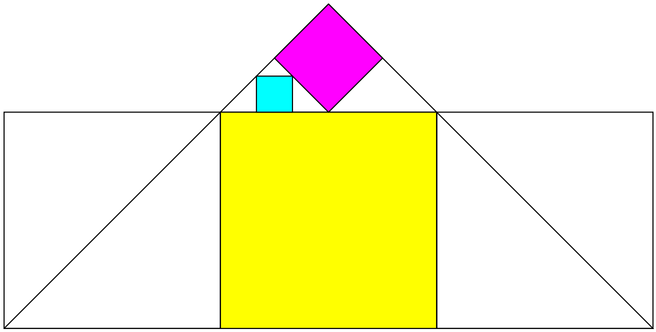
Úloha 17. V rovnoramenném pravoúhlém trojúhelníku se nacházejí tři čtverce jako na obrázku.



Jaký podíl obsahu trojúhelníku zabírá azurový čtverec?

Výsledek: $\frac{1}{81}$

Řešení. Klíčové je všimnout si, že délka strany žlutého čtverce je jedna třetina délky přepony trojúhelníku; pro důkaz stačí doplnit „vnější“ trojúhelníky do čtverců, protože tyto trojúhelníky jsou rovnoramenné.



Podíl obsahu žlutého čtverce k obsahu trojúhelníku je

$$2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Využitím stejného pozorování dostaneme, že délka strany azurového čtverce je jedna šestina délky strany žlutého čtverce. Podíl obsahů azurového a žlutého čtverce je tedy $\frac{1}{36}$ a podíl obsahů azurového čtverce a trojúhelníku je $\frac{1}{81}$.

Úloha 18. Najděte součet všech kladných celých čísel, která nelze zapsat ve tvaru $2a + 3b$, kde a a b jsou nesoudělná kladná celá čísla. Dvě čísla m a n jsou nesoudělná, pokud je největší společný dělitel m a n roven 1.

Výsledek: 26

Řešení. Žádné z čísel 1, 2, 3, 4, 6, 10 nelze takto zapsat, protože $a, b \geq 1$ a $\mathrm{NSD}(a, b) = 1$. Na druhou stranu, pokud volíme nesoudělné dvojice (a, b) ve tvaru $(a, 1)$, dostaneme libovolné liché číslo větší nebo rovno 5, zatímco $(2k - 3, 2)$ nám dá čísla $n = 4k \geq 8$ a $(2k - 5, 4)$ čísla $n = 4k + 2 \geq 14$.

Úloha 19. Mnohočlen nazveme *velmi diskrétním*, pokud má celočíselné koeficienty se součtem 2020 a celočíselné kořeny s rozdílem jedna. Kolik mnohočlenů stupně dva, tedy výrazů tvaru $ax^2 + bx + c$, je velmi diskrétních?

Výsledek: 4

Řešení. Víme, že polynom má dva celočíselné kořeny, můžeme ho tedy napsat ve tvaru $a(x-k)(x-\ell)$, kde k a ℓ jsou kořeny a a je vedoucí koeficient. Součet koeficientů polynomu pak můžeme zapsat ve tvaru $a(k-1)(\ell-1)$, kde a, k i ℓ jsou z předpokladů celočíselné. Máme tedy

$$2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101 = a(k-1)(\ell-1).$$

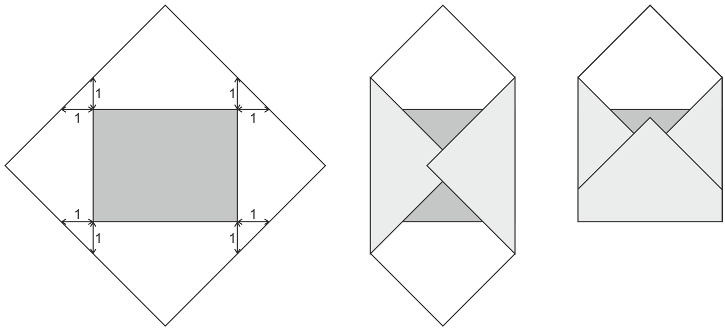
Čísla $k-1$ a $\ell-1$ se liší o jedna, takže máme pouze čtyři možnosti, vedoucí k následujícím polynomům: $1010(x-2)(x-3)$, $1010x(x+1)$, $101(x-5)(x-6)$ a $101(x+3)(x+4)$.

Úloha 20. Z Česka do Bhútánu jezdí historický expres se 40 vagóny číslovanými od lokomotivy postupně 1 až 40. Každý vagón má kapacitu 40 pasažérů. Expres už není nejmladší, takže mu na každé zastávce přestane fungovat poslední vagón. Výpravčí jsou na tuto situaci zvyklí, takže nefunkční vagón odpojí a lidé, kteří v něm seděli, postupně procházejí vlakem dopředu a vždy si sednou na první volné místo, které po cestě potkají. Kolik pasažérů bude na konci cesty sedět ve druhém vagónu, pokud ve výchozí stanici sedělo v každém vagónu právě tolik lidí, kolik je jeho pořadové číslo, nikdo po cestě nenastoupil ani nevystoupil a vlak dojel do konečné stanice s 22 vagóny?

Výsledek: 19

Řešení. Víme, že počet pasažérů ve vlaku je $\frac{40\cdot 41}{2} = 820$. Když vlak vjíždí do cílové stanice, vagóny 3 až 22 musí být plné. V opačném případě by ve vlaku mohlo sedět nejvýše $1 + 2 + 39 + 19 \cdot 40 = 802$ pasažérů, protože by si před naplněním vagónu 3 nemohl nikdo přesednout do 2. ani 1. vagónu. To znamená, že v prvních dvou vagónech sedí dohromady 20 lidí. Druhý vagón proto nemůže být plný, takže v prvním vagónu je stále jen jeden pasažér. Ve druhém vagónu je tedy $20 - 1 = 19$ pasažérů.

Úloha 21. David chtěl všem svým kamarádům poslat vánoční přání. Překvapil ho však lockdown, a protože papírnictví musela mít zavřeno, neměl na svá přání obálky. Rozhodl se je tedy vyrobit sám. Poskládal řadu obdélníkových obálek ze čtverců papíru o úhlopříčce 30 cm tak, že nejdříve přeložil levý a pravý roh, potom spodní a nakonec obálku zavřel přeložením horního rohu. Přeložený horní roh nikdy nepřečníval přes spodní okraj obálky. Aby obálku šlo slepit, je potřeba na začátku nechat mezi přáním a okrajem papíru mezeru 1 cm (viz obrázek). Jaké nejširší přání mohl David do takto vyrobené obálky zabalit? Výsledek uveďte v centimetrech.



Výsledek: 18

Řešení. Vycházejme z obrázku a označme délku úhlopříčky papíru d, délku vodorovné strany přání a a délku svislé strany b. Podíváme-li se na trojúhelník, který je tvořen levým rohem papíru a prodloužením svislé hrany přání, zjistíme, že je rovnoramenný a výška v něm je dlouhá $\frac{b}{2}+1$. Z toho plyne, že $d = a+b+2$, protože úhlopříčka čtverce je tvořena dvěma úseky, jejichž délka je rovna délce zmíněné výšky, a úsekem délky a. Aby horní roh po přeložení nepřesahoval, musí platit $\frac{d-b}{2} \leq b$, neboli $b \geq \frac{d}{3}$. Dohromady $a \leq d - \frac{d}{3} - 2 = \frac{2}{3}d - 2$.

Úloha 22. Místo toho, aby na hodině dějepisu dával pozor, hrál si Matěj se svými oblíbenými kladnými celými čísly a, b a c. Překvapilo ho, že čísla $a+b$, $b+c$ a $c+a$ nabývala po dvou různých hodnot a zároveň to všechno byly druhé mocniny nějakých kladných celých čísel. Překvapilo ho to tak moc, že svá oblíbená čísla zapomněl. Poraďte mu, jaký nejmenší součet mohla čísla a, b a c mít.

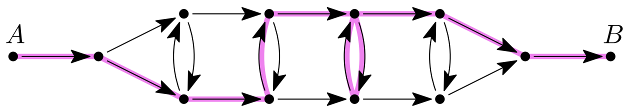
Výsledek: 55

Řešení. Označme $a+b=d^2$, $b+c=e^2$, $c+a=f^2$, kde d, e a f jsou po dvou různá přirozená čísla. Dále předpokládejme, že $d<e<f$ (není-li tomu tak, můžeme například přeznačit proměnné). Z faktu, že Matějova čísla jsou přirozená, plyne, že

$$d^2+e^2 = a+c+2b > a+c = f^2.$$

Navíc víme, že $a+b+c = \frac{d^2+e^2+f^2}{2}$, tedy hledáme trojici čísel (d^2, e^2, f^2), která splňuje nerovnost výše a její součet je sudý a minimální možný. Hledaná trojice je $(25, 36, 49)$ a hledaný součet pak 55.

Úloha 23. Kolik existuje cest z bodu A do bodu B na obrázku níže, pokud lze každou šipku použít nejvýše jednou? (Jedna taková cesta je v obrázku zakreslená fialovou barvou.)



Výsledek: $162 = 2 \cdot 3^4$

Řešení. Cesta je jednoznačně určena následujícími volbami: na prvním rozcestí lze jít buď nahoru, nebo dolů (2 možnosti), a pak v každém ze 4 svislých párů vrcholů můžeme buď nepoužít žádnou svislou šipku, použít jednu z nich, nebo použít obě (3 možnosti). Volby jsou na sobě nezávislé, takže celkový počet možností je $2 \cdot 3^4 = 2 \cdot 81 = 162$.

Úloha 24. Kolik čtyřciferných čísel má tu vlastnost, že každé dvě bezprostředně po sobě jdoucí cifry se liší přesně o trojku? Čtyřciferná čísla nemohou začínat nulou.

Výsledek: 29

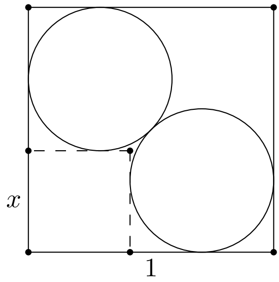
Řešení. Všimněme si, že máme-li zadanou první cifru čtyřciferného čísla, pak už je toto číslo jednoznačně určeno informací, zda v první, druhé a třetí dvojici po sobě jdoucích cifer je druhá cifra větší, nebo menší než ta první. Tyto možnosti budeme zkráceně zapisovat trojpísmenným kódem z písmen U a D, kde U znamená, že druhá cifra je větší než ta první, D, že je menší a pozice v kódu odpovídá pořadí dvojice cifer v čísle. Například číslo 1474 by dalo vzniknout kódu UUD – druhé číslice v první i druhé dvojici čísel jsou větší než ty první a v poslední dvojici je to naopak.

Těchto kódů je celkem sedm, protože UUU není přípustný kód pro žádné čtyřciferné číslo – číslo nesmí začínat nulou. Nyní stačí určit, které počáteční číslice můžeme využít se kterým kódem, aby číslo, které je tímto kódem určené, bylo čtyřciferné:

- UUD: 1, 2, 3,
- UDU: 1, 2, 3, 4, 5, 6,
- DUU: 3, 4, 5, 6,
- UDD: 3, 4, 5, 6,
- DUD: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
- DDU: 6, 7, 8, 9,
- DDD: 9.

Čísel s hledanou vlastností je dohromady 29.

Úloha 25. Jednotkovému čtverci jsou vepsány dvě stejně velké kružnice, které mají vnější dotyk jako na obrázku. Najděte délku strany čárkovaného čtverce, který sdílí vrchol s jednotkovým čtvercem a dotýká se obou kružnic.



Výsledek: $\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \doteq 0{,}414$

Řešení. Označme si x délku strany čárkovaného čtverce. Pro poloměry kružnic r platí $r = \frac{1-x}{2}$. Úhlopříčka jednotkového čtverce je rozdělena středy kružnic a jejich bodem doteku na čtyři úsečky. Dvě z nich mají délku r a dvě jsou úhlopříčky čtverce o délce strany r. Celkem dostaneme

$$\sqrt{2} = 2 \cdot r + 2\sqrt{2} \cdot r = (1 - x)(1 + \sqrt{2})$$

a po vyřešení $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$.

Úloha 26. Reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_{2020}$ splňují následující podmínky:

- Kdykoliv sečteme všechna tato čísla až na jedno x_i, kde i je liché, dostaneme 2.
- Kdykoliv sečteme všechna tato čísla až na jedno x_i, kde i je sudé, dostaneme 0.

Jaká je hodnota výrazu $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2020}$?

Výsledek: $\frac{2020}{2019}$

Řešení. Sečtením všech rovnic obdržíme

$$2019(x_1 + x_2 + \cdots + x_{2020}) = 1010 \cdot 2 + 1010 \cdot 0 = 2020,$$

takže výsledek je $\frac{2020}{2019}$.

Úloha 27. Marian s Vikim hrají hru, přičemž se pravidelně střídají v tazích a Marian začíná. Každý tah spočívá ve změně kladného celého čísla n na jiné kladné celé číslo z intervalu $\langle \frac{n}{3}, \frac{n}{2} \rangle$. Hráč, který táhnout, prohrává. Pro kolik počátečních čísel v intervalu $\langle 1, 1000 \rangle$ má Marian vyhrávající strategii?

Výsledek: 620

Řešení. Nazvěme *vyhrávající* ta čísla, pro která existuje vyhrávající strategie, a ostatní čísla jako *prohrávající.* Číslo n je vyhrávající tehdy a jen tehdy, pokud interval $\langle \frac{n}{3}, \frac{n}{2} \rangle$ obsahuje prohrávající číslo. Stejně tak číslo n je prohrávající právě tehdy, když je každé číslo z intervalu $\langle \frac{n}{3}, \frac{n}{2} \rangle$ vyhrávající (například i tehdy, když tento interval neobsahuje žádné přirozené číslo).

Číslo 1 je prohrávající, takže z předchozích pozorování plyne, že 2 i 3 jsou vyhrávající. To znamená, že čísla $4, \ldots, 7$ jsou prohrávající, protože pro tato číslo interval $\langle \frac{n}{3}, \frac{n}{2} \rangle \cap \mathbb{N} \subseteq \{2, 3\}$. Obdobně čísla $8, \ldots, 21$ jsou vyhrávající. Opakováním tohoto postupu určíme, že další vyhrávající čísla jsou $44, \ldots, 129$ a $260, \ldots, 777$. Celkem tedy máme 620 vyhrávajících čísel.

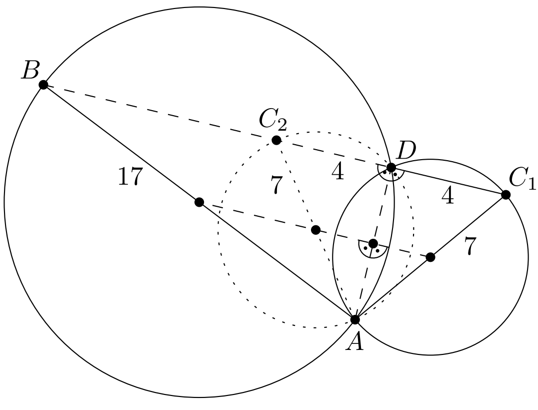
Úloha 28. Dvě kružnice o průměrech $|AB| = 17$ a $|AC| = 7$ se protínají v bodech A a D. Dále víme, že $|CD| = 4$. Najděte všechny možné vzdálenosti středů takových kružnic a spočítejte jejich součin.

Výsledek: 60

Řešení. Z Thaletovy věty plyne, že úhly ADC a ADB jsou pravé, a tedy body B, C a D leží na jedné přímce. Z Pythagorovy věty spočítáme

$$|BD|^2 = 17^2 - (7^2 - 4^2) = 16^2,$$

neboli $|BC| = 16 \pm 4$ (skutečně, zmíněné pravé úhly mohou být shodné nebo dohromady tvořit přímý úhel).



Spojením středů kružnic dostaneme trojúhelník podobný (s koeficientem $\frac{1}{2}$) trojúhelníku ABC a hledaná vzdálenost proto musí být $\frac{20}{2} = 10$ nebo $\frac{12}{2} = 6$. Hledaný součin je tedy 60.

Úloha 29. Na lince se čtrnácti zastávkami jezdí sedm trolejbusů. Každý trolejbus vyjíždí o půlnoci z jedné z těchto zastávek a pohybuje se jedním směrem, dokud nedojede na konečnou, tedy první nebo poslední zastávku linky. Tam se otočí a pokračuje opačným směrem. Všechny trolejbusy se pohybují stálou rychlostí jedné zastávky za minutu. O půlnoci vypadá situace následovně:

(1) Na každé zastávce se nachází nejvýše jeden trolejbus.

(2) Bez ohledu na to, jakým směrem se který trolejbus vydá, bude minutu po půlnoci na každé zastávce opět nanejvýš jeden trolejbus.

Kolika způsoby mohou být trolejbusy o půlnoci uspořádány? Všechny trolejbusy považujeme za stejné a všechny zastávky za obousměrné.

Výsledek: 20

Řešení. Žádné dva trolejbusy od sebe nesmí být vzdáleny právě dvě zastávky. Zjevně jsou tedy liché a sudé zastávky navzájem nezávislé a v každé z těchto skupin mohou být najednou maximálně 4 trolejbusy. V jedné tak musí být o půlnoci 3 a ve druhé 4, takže možností je $2 \cdot N$, kde N odpovídá počtu způsobů, kterými můžeme položit tři kameny na sedm míst v řadě tak, aby byly odděleny mezerami. Nejdříve umístíme čtyři volná místa do řady a pak mezi ně nebo na okraje položíme tři kameny. Pro první kámen tak máme 5 možností, pro druhý 4 a pro třetí 3. Protože jsou kameny nerozlišitelné, tzn. nezávisí na pořadí jejich výběru a celkem je těchto uspořádání $3 \cdot 2 \cdot 1$, výsledek je dohromady $N = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$. Řešení celé úlohy je tedy $2 \cdot 10 = 20$.

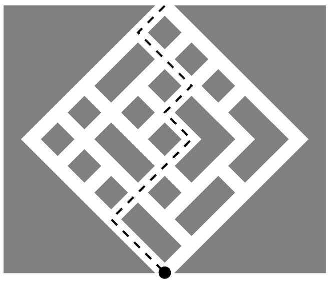
Úloha 30. První verze Marianovy knihy měla 2020 stránek očíslovaných $1, 2, 3, \ldots, 2020$. Po korekturách byla ještě na úplný začátek přidána předmluva o 11 stránkách. Kolik číslic musí Marian přepsat, aby byly všechny stránky opět správně očíslované? Číslice může být použita jen na své původní pozici, takže například při změně $23 \to 34$ musí Marian přepsat dvě cifry. Nově napsané číslice, tedy například 1, která se objeví při změně $95 \to 106$, se nepočítají.

Výsledek: 4251

Řešení. Nejprve spočítejme, kolik číslic zůstane stejných. Je snadné si rozmyslet, že u každého jednociferného či dvouciferného čísla operace $+11$ všechny cifry změní. Proto jsou všechny nepřepsané číslice na pozici stovek nebo tisíců. Pokud jsou dvě poslední cifry čísla stránky od 00 do 88, zůstanou jeho počáteční jedna či dvě cifry stejné. To nastane pro číslici na místě stovek u 89 čísel v každé stovce stránek. Každé číslo od 1000 do 1988 má navíc ještě jednu pevnou číslici – tu na místě tisíců. Pro stránky do 1999 máme tedy celkem $19 \cdot 89 + 989 = 2680$ číslic, které zůstanou nezměněné. Na stránkách od 2000 do 2020 je pak napsaných 21 čísel. Jejich cifry na místě stovek a tisíců se nezmění, což dává dalších $2 \cdot 21 = 42$ nedotčených číslic. Dohromady tedy zůstane $2680 + 42 = 2722$ číslic stejných.

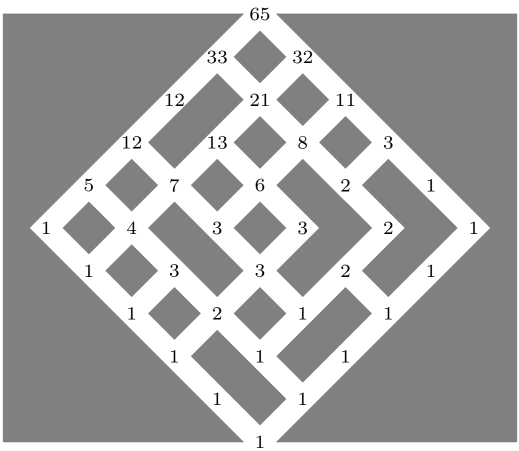
Zbývá spočítat, kolik číslic je v původním očíslování stránek celkem. Od 1 do 9 je to 9 číslic, na stránkách od 10 do 99 je $90 \cdot 2$ číslic, od 100 do 999 je pak $900 \cdot 3$ číslic a od 1000 do 2020 dalších $1021 \cdot 4$ číslic. Dohromady bylo tedy v původní verzi knihy 6973 číslic, a proto jich $6973 - 2722 = 4251$ musí Marian přepsat.

Úloha 31. Když vhodíme kuličku horním otvorem do krabice s drážkami na obrázku, kolika různými způsoby může propadnout až dolů? Jeden ze způsobů je na obrázku vyznačen.



Výsledek: 65

Řešení. Do každé křižovatky napíšeme počet způsobů, kolika může kulička spadnout odtamtud až dolů. Začneme zezdola a postupujeme nahoru. Každé číslo je součtem čísel bezprostředně pod ním.



Úloha 32. Král a jeho sto rytířů svačí společně u kulatého stolu. Každý z nich je buď klobásožravec, a konzumuje tedy k svačině pouze klobásy, nebo banánožravec, který k svačině nepozře nic jiného než čerstvý banán. Před začátkem hodování si král všiml, že jeho klobása je menší než klobása rytíře sedícího po jeho levici. Roztrpčen touto nespravedlností nařídil, aby každý stolovník předal svou svačinu člověku po jeho pravici. Král byl se svou novou svačinou spokojen, ale 64 rytířů mělo nyní před sebou nesprávný pokrm. Proto král znovu nařídil, aby každý stolovník předal jídlo sousedovi po jeho pravici. Opět byl však roztrpčen, že rytíř po jeho levici má větší klobásu, a tak už potřetí rozkázal posunout pokrmy o jedno místo doprava. Tentokrát byli se svačinou nespokojeni pouze dva rytíři. Ti se dohodli, že si vymění místa a pak budou spokojeni. Kolik klobásožroutů bylo mezi královými rytíři?

Výsledek: 68

Řešení. Ze zadání plyne, že král a tři rytíři po jeho levici měli na začátku všichni klobásu. To znamená, že po třetím posunutí se první banán po královĕ levici dostal ke klobásožravci a první banánožravec po královĕ pravici dostal klobásu. Toto nutně musí být ti dva rytíři, kteří si na konci vyměnili místa.

B K K K K ⋯ K B

Po třetím posunutí každý dostal svačinu člověka, který seděl o tři místa vlevo od něj, a tedy mimo rytíře, kteří si vyměnili místo, musel tento spolustolovník mít stejnou svačinu. Zasedací pořádek na začátku vypadal následovně:

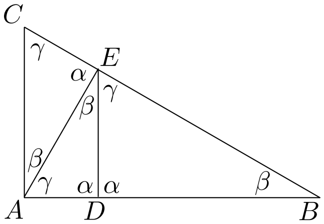
⋯ K K B K K B K K K K ⋯ K B K K B K K B ⋯

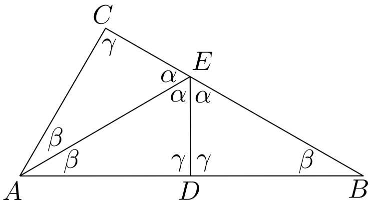
Z toho dále plyne, že každý banánožravec a každý klobásožravec, který seděl napravo od banánožravce, měli po prvním posunutí svačin špatný pokrm. Proto je banánožravců $\frac{64}{2} = 32$, a zbytek, to je $100 - 32 = 68$, rytířů (a král) jsou klobásožravci.

Úloha 33. David by chtěl nakreslit trojúhelník ABC a body D a E uvnitř jeho stran AB a BC (v tomto pořadí) tak, aby byly trojúhelníky ABC, AEC, ADE a BDE podobné. Jaký je součet všech možných velikostí úhlu BAC ve stupních?

Výsledek: 150

Řešení. Velikosti všech úhlů uvedených trojúhelníků musí být α, β nebo γ (ve standardním značení úhlů trojúhelníku ABC). Velikost úhlu EAC se zjevně rovná β a velikost úhlu AEC se rovná α. Úhly EDA a EDB dohromady tvoří $180°$, takže musí být stejné, a proto musí být α nebo γ rovna $90°$. Snadno ověříme, že první z těchto možností nevede na nemožnou konfiguraci a druhá pak dává $\alpha = 60°$. Výsledek je tedy $90° + 60° = 150°$.





Úloha 34. Pět nočních hlídačů si musí naplánovat směny na příštích deset nocí tak, aby každou noc pracovali právě dva hlídači a žádný hlídač neměl směny dvě noci po sobě. Navíc chce každý hlídač pracovat se všemi ostatními – s každým aspoň jednou. Kolik existuje takových rozvrhů?

Výsledek: 240

Řešení. Nakresleme si hlídače jako uzly v diagramu, kde propojení dvou uzlů čarou reprezentuje společnou směnu daných dvou pracovníků. Chceme znát celkový počet možností, jak můžeme nakreslit všech $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ čar mezi uzly, aby neměly dvě po sobě jdoucí čáry společný uzel. První čáru můžeme vybrat 10 způsoby, druhou 3 způsoby a v dalších dvou krocích máme vždy dvě možnosti. Nezávisle na našem rozhodnutí se po nich ale vždy dostaneme do stejné situace, neboli kteroukoli posloupnost těchto dvou nakreslených čar dokážeme dostat z kterékoli jiné prostým přečíslováním uzlů. Pátá volba však povede ke dvěma různým výsledkům: Buď dostaneme cyklus pěti čar, nebo cyklus čtyř čar s pátým „ocáskem“. První možnost vede v následujících krocích na 1, 2, 1, 1 a 1 možnosti, zatímco tu druhou nelze dokončit podle pravidel, protože dvě poslední čáry by musely obsahovat „špičku ocásku“. Dohromady tedy máme

$$10 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 240$$

možných rozvrhů směn.

Úloha 35. Lucka má trojúhelník se stranami délky 32, 50 a x. Katka má trojúhelník, který je mu podobný a dvě strany má stejně dlouhé jako ten Luccin, ale není s ním shodný. Určete součet všech možných hodnot délky x.

Výsledek: $\frac{27721}{200}$

Řešení. Označme $a < b < c$ délky stran Lucčina trojúhelníku. Popsaná situace může nastat pouze tehdy, pokud tyto délky splňují $a : b = b : c$. Pak existují tři možnosti:

(i) $a = 32$, $b = 50$, z čehož dostaneme $x = c = 50 \cdot \frac{50}{32}$;

(ii) $a = 32$, $c = 50$, což dává $x = b = \sqrt{32 \cdot 50} = 40$;

(iii) $b = 32$, $c = 50$, z čehož plyne $x = a = 32 \cdot \frac{32}{50}$.

Zbývá jen zkontrolovat, že žádná z těchto možností neporušuje trojúhelníkovou nerovnost (což je pravda), a možné hodnoty délky x sečíst.

Úloha 36. Běžec trénuje na trati ve tvaru pravidelného čtyřicetiúhelníku. Vystartuje z jednoho vrcholu a běhá po obvodu pořád dokola. V první fázi tréninku si v každém vrcholu udělá krátkou pauzu. Jakmile se zastaví ve vrcholu, ze kterého vybíhal, přejde do další fáze. Ve druhé fázi tréninku už zastavuje pouze v každém druhém vrcholu, dokud mu zastávka nevyjde opět na start. Poté se zastavuje jen v každém třetím vrcholu, atd. Jeho trénink končí, když oběhne celou trať bez zastavení. Kolikrát bude během svého tréninku odpočívat, pokud nepočítáme odpočinek na startu bezprostředně před začátkem a po skončení celého tréninku?

Výsledek: 902

Řešení. Všimněme si, že pokud je a počet hran mezi dvěma po sobě jdoucími zastávkami v jedné fázi, pak (v této fázi) běžec uběhne celkem $\frac{40}{\mathrm{NSD}(40,a)}$ takto dlouhých úseků. Nyní rozdělíme čísla od 1 do 40 podle toho, jakého mají největšího společného dělitele d s číslem 40:

- $d = 1$ pro $a \in \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 27, 29, 31, 33, 37, 39\}$,
- $d = 2$ pro $a \in \{2, 6, 14, 18, 26, 34, 38\}$,
- $d = 4$ pro $a \in \{4, 12, 28, 36\}$,
- $d = 5$ pro $a \in \{5, 15, 25, 35\}$,
- $d = 8$ pro $a \in \{8, 16, 24, 32\}$,
- $d = 10$ pro $a \in \{10, 30\}$,
- $d = 20$ pro $a \in \{20\}$,
- $d = 40$ pro $a \in \{40\}$.

Jak již bylo řečeno, v každé fázi se běžec zastaví $\frac{40}{d}$-krát, takže abychom spočítali celkový počet zastávek, pro každé d výše spočítáme součin $\frac{40}{d}$ s počtem čísel[1] příslušících k tomuto d, sečteme tyto hodnoty přes všechna d a odečteme

[1] Počet čísel pro každé d lze vyjádřit pomocí Eulerovy funkce jako $\varphi\left(\frac{40}{d}\right)$.

jedničku, protože nechceme započítat poslední zastavení na startu. Dosazením dostaneme

$$40 \cdot 16 + 20 \cdot 8 + 10 \cdot 4 + 8 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 1 = 902.$$

Úloha 37. ET se po peripetiích na Zemi vrátil na svou domovskou planetu. Ta se od Země ve spoustě ohledů liší – mimo jiné tím, že má tvar krychle a nachází se na ní pouze 8 měst, každé v jednom z vrcholů planety. Aby toho nebylo málo, vedou cesty pouze mezi městy ležícími v sousedních vrcholech. Všechny mimozemšťany zajímalo, jak to vypadá na Zemi, a tak ET vyrazil na velké turné po své planetě. Začal ve svém rodném městě a pokračoval tak, že si v každém navštíveném městě náhodně vybral cestu z něj vedoucí a vyrazil po ní do města na jejím konci. Aby nikoho neochudil o své zážitky, rozhodl se, že se do svého rodného města nevrátí dříve než po absolvování 2020 cest. Pokud by tedy už někdy předtím padla volba na cestu vedoucí domů, vybere si náhodně jinou. Jaká je pravděpodobnost, že ho domů zavede právě 2020. cesta?

Výsledek: $\frac{2}{9}$

Řešení. Označme vrchol (domovské město) A, jeho sousedy (spojené cestami) B_1, B_2, B_3, sousedy těchto vrcholů (mimo vrchol A) C_1, C_2, C_3 a poslední vrchol D. Všimněme si, že ET může po lichém počtu kroků (cest) skončit pouze ve vrcholech B_1, B_2, B_3 nebo D. Analogicky po sudém počtu kroků může skončit pouze ve vrcholech C_1, C_2, C_3 nebo A, kde poslední možnost nemůže nastat před 2020. krokem. Označme $P_n(V)$ pravděpodobnost, že se ET po n-tém kroku bude nacházet ve vrcholu V. Ze symetrie plyne, že

$$P_n(B_1) = P_n(B_2) = P_n(B_3) \quad \text{a} \quad P_n(C_1) = P_n(C_2) = P_n(C_3).$$

Označme tyto dvě pravděpodobnosti po řadě $P_n(B)$ a $P_n(C)$.

Spočítejme nyní všechny nenulové pravděpodobnosti v prvních několika krocích:

- $P_0(A) = 1$,
- $P_1(B) = \frac{1}{3}$,
- $P_2(C) = \frac{1}{3}$,
- $P_3(D) = \frac{1}{3}$ a $P_3(B) = \frac{2}{9}$,
- $P_4(C) = \frac{1}{3}$.

Všimněme si, že situace v 2. a 4. kroku je (co se týče pravděpodobností) stejná. Matematickou indukcí lze dokázat, že se tyto pravděpodobnosti periodicky opakují, jak je vidět na krocích 2 až 4. Proto $P_{2019}(B) = P_3(B) = \frac{2}{9}$, a tedy

$$P_{2020}(A) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{9}.$$

Úloha 38. Operace $\star$ splňuje vztah $x \star n = (2-x)^n + x^3 - 6x^2 + 12x - 5$ pro každé reálné číslo x a kladné celé číslo n. Určete součet všech reálných řešení a rovnice

$$(\ldots((a \star 2020) \star 2019) \star \cdots \star 2) \star 1 = a.$$

Výsledek: 27

Řešení. Všechna x splňují $x \star 3 = 3$, takže $a = (3 \star 2) \star 1 = 5 \star 1 = 27$ je jediné řešení.

Úloha 39. Čtyři kamarádi – David, ET, Honza a Olin – se zapisují na čtyři předměty. Rozhodli se, že se každý zapíše aspoň na jeden předmět a že právě jeden předmět si vybere více než jeden z nich. Kolika způsoby to mohou udělat?

Výsledek: 2052

Řešení. Označme předměty A, B, C a D. Předpokládejme, že předmět, který si zapíše více kamarádů, je A. Potom máme pouze 5 možností, kdo si zapíše předmět B, protože podle předpokladu na něj může být zapsán nejvýše jeden z kamarádů. Stejný argument platí pro kurzy C a D. Celkem tedy existuje $5^3 = 125$ možností, jak si kamarádi mohou tyto tři předměty zapsat. Je to součet možností, kdy si tyto tři kurzy nezapíše nikdo (to je právě jedna možnost), zapíše si je právě jeden student, právě dva studenti a právě tři studenti. Počet možností, kdy si tyto tři kurzy dohromady zapíšou tři různí studenti, je $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Dále chceme spočítat, kolik je možností, že si některé z předmětů B, C, D zapsal právě jeden z kamarádů. Studenta můžeme vybrat čtyřmi způsoby a ten pak může navštěvovat všechny 3 kurzy (1 možnost), 2 kurzy (3 možnosti) nebo 1 kurz (3 možnosti). Dohromady je to $4 \cdot 7 = 28$ možností. To dále implikuje, že počet možností, ve kterých si některé z předmětů B, C, D zapsali právě dva kamarádi, je $125 - 1 - 24 - 28 = 72$, protože se jedná o doplněk k možnostem, které jsme již spočítali výše.

Nyní už zbývá jen rozebrat zápis kurzu A. Z předpokladu víme, že všichni kamarádi, kteří si žádný jiný předmět nevybrali, si musí zapsat tento. Všichni ostatní si mohou vybrat, jestli si ho zapíší nebo ne, pokud si ho kromě nich zapsali ještě dva další studenti. To je tedy jediná možnost, pokud si žádný z kamarádů nezapsal jiný předmět; právě 2 možnosti, pokud jeden z kamarádů má zapsané nějaké jiné kurzy; právě 4 možnosti, pokud jiné kurzy mají zapsané dva kamarádi; právě 7 možností, pokud jiný kurz nemá zapsaný pouze jeden kamarád (sedm, protože minimálně jeden z těch tří zbývajících si ho musí vybrat). Na začátku jsme předpokládali, že předmět, který si zapisuje více kamarádů, je A, stejně tak to ale může být kterýkoliv jiný, takže dohromady máme $4 \cdot (1 \cdot 1 + 28 \cdot 2 + 72 \cdot 4 + 24 \cdot 7) = 2052$ možností, jak si kamarádi mohou kurzy zapsat.

Úloha 40. Jaké jsou poslední tři cifry součtu všech 1000^{1000}ciferných čísel, v jejichž zápise jsou pouze jedničky, dvojky a čtyřky?

Výsledek: 259

Řešení. Vezměme si libovolné 1000^{1000}ciferné číslo n složené pouze z cifer 1, 2, 4. Pokud nahradíme všechny jedničky dvojkami, dvojky čtyřkami a čtyřky jedničkami, dostaneme jiné číslo, které je ovšem také složené pouze z jedniček, dvojek a čtyřek. Všimněme si, že po dalším provedení této operace dostaneme číslo, které se liší od zbylých dvou, a provedeme-li operaci potřetí, vznikne původní číslo. Když takto získaná tři čísla sečteme, dostaneme 1000^{1000}ciferné číslo B tvořené samými sedmičkami, protože na každé pozici sečteme právě jednu jedničku, dvojku i čtyřku.

Čísel uvažovaných v zadání je celkem $3^{1000^{1000}}$. Celkem tak máme $3^{1000^{1000}-1}$ trojic popsaných výše, protože každé číslo patří pouze do jedné trojice. Hledáme tedy poslední tři cifry čísla

$$3^{1000^{1000}-1} \cdot B,$$

což znamená, že nás zajímá zbytek, který toto číslo dává po dělení 1000. Zřejmě platí $B \equiv 777 \pmod{1000}$. Díky tomu, že 3 a 1000 jsou nesoudělné, můžeme použít Eulerovu větu – platí, že $\varphi(1000) = 400$, což je dělitel 1000^{1000}, a tedy

$$3^{1000^{1000}-1} \equiv 3^{-1} \pmod{1000},$$

kde záporný exponent znamená, že hledáme zbytek inverzní k třem modulo 1000. Víme, že

$$3 \cdot 333 = 999 \equiv -1 \pmod{1000},$$

takže tento inverz je $-333 \equiv 667 \pmod{1000}$. Konečně hledané trojčíslí je

$$667 \cdot 777 \bmod 1000 = 259.$$

Úloha 41. V trojúhelníku ABC je velikost vnitřního úhlu při vrcholu A dvojnásobkem velikosti vnitřního úhlu při vrcholu B. Všechny jeho strany mají celočíselné délky a strana BC má nejmenší možnou délku. Určete součin délek stran trojúhelníku.

Výsledek: 120

Řešení. Označme (standardně) délky stran trojúhelníku a, b a c a označme β vnitřní úhel při vrcholu B. Pak ze sinové věty plyne, že

$$\frac{a}{\sin 2\beta} = \frac{b}{\sin \beta}.$$

Použijeme-li vztah $\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta$ a upravíme-li rovnost výše, dostaneme $\cos\beta = \frac{a}{2b}$. Opětovné použití sinové věty dává

$$\frac{c}{\sin(180^\circ - 3\beta)} = \frac{c}{\sin 3\beta} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

Využitím součtových vzorců na $\sin 3\beta = \sin(2\beta + \beta)$ a na $\cos 2\beta$ a dosazením spočtené hodnoty $\cos\beta$ dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{c}{b} &= \frac{\sin 3\beta}{\sin\beta} = \frac{\sin 2\beta\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{\sin\beta\cos 2\beta}{\sin\beta} = \\
&= \frac{a^2}{2b^2} + \cos^2\beta - \sin^2\beta \pm 1 = \\
&= \frac{a^2}{2b^2} + 2\cos^2\beta - 1 = \frac{a^2}{b^2} - 1, \\
cb &= a^2 - b^2.
\end{aligned}$$

Nejmenší celočíselná hodnota a, pro kterou existují celočíselné hodnoty b a c splňující rovnost výše a zároveň a, b a c jsou délky stran trojúhelníka, je $a = 6$. Příslušné hodnoty b a c jsou 4 a 5. Součin těchto tří hodnot je 120.

Úloha 42. Kolika způsoby lze prostřít několik míst (alespoň jedno) po obvodu kulatého stolu s třiceti židlemi tak, aby nikdy nebyla obsazena dvě sousední místa? Varianty, které se liší pootočením, považujeme za různé.

Výsledek: 1860497

Řešení. Označme si $A(n)$ počet takových uspořádání pro stůl s n místy; pro jednoduchost zahrneme i uspořádání s 0 místy, tedy prázdný stůl. Pro $n \geq 5$ si dokážeme následující rekurentní vztah

$$A(n) = A(n-1) + A(n-2). \tag{R}$$

Podmnožinu M množiny $\{1, \dots, n\}$ nazveme *cyklicky řídkou*, pokud neobsahuje pár po sobě jdoucích čísel a pokud neobsahuje zároveň 1 a n. Pak $A(n)$ je počet cyklicky řídkých podmnožin množiny $\{1, \dots, n\}$.

Označme $B(n)$ počet *řídkých* podmnožin množiny $\{1, \dots, n\}$, tedy těch, které neobsahují dvě po sobě jdoucí čísla (tentokrát nemáme žádné dodatečné omezení na 1 a n). Pak $B(n)$ splňuje $B(n) = B(n-1) + B(n-2)$, neboť máme $B(n-1)$ řídkých podmnožin, které neobsahují n, a $B(n-2)$ řídkých podmnožin, které obsahují n.

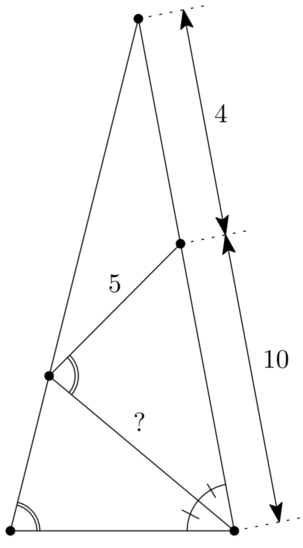
Zkusme totéž s $A(n)$: Počet cyklicky řídkých podmnožin, které obsahují n, je $B(n-3)$, protože taková podmnožina neobsahuje 1 a $n-1$ a zbytek podmnožiny je libovolná řídká podmnožina $\{2, \dots, n-2\}$. Pokud cyklicky řídká podmnožina neobsahuje n, pak zbývající prvky mohou tvořit libovolnou řídkou podmnožinu $\{1, \dots, n-1\}$. Takže

$$A(n) = B(n-1) + B(n-3)$$

pro $n \geq 3$. Posunuté posloupnosti $B(n-1)$ a $B(n-3)$ splňují rekurentní vztah (R), takže jejich součet $A(n)$ také splňuje tento vztah pro $n \geq 5$.

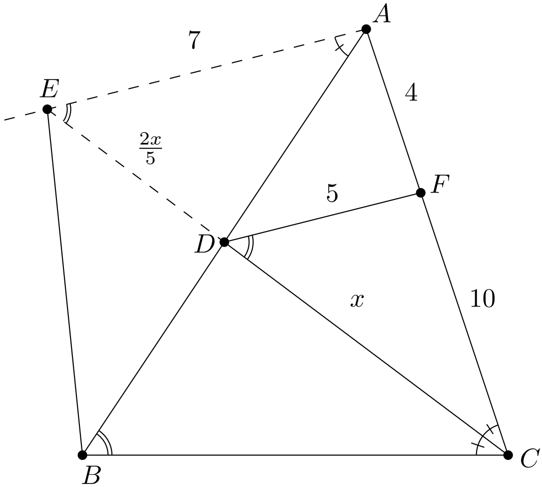
Pro $n = 3$ a 4 dostaneme $A(3) = 4$ a $A(4) = 7$. Pomocí (R) spočítáme vyšší hodnoty, až dostaneme $A(30) = 1860498$. Pro řešení úlohy musíme ještě odečíst jedna kvůli prázdnému stolu.

Úloha 43. Kuba se po neúspěšné matematické kariéře rozhodl, že se naučí něco praktického. Začal se tedy učit ohýbat drát. Za domácí úkol dostal vytvořit konstrukci, která je na obrázku. Kuba je popleta, takže si poznamenal pouze délky tří úseček a označil dvě dvojice stejně velkých úhlů – ty jsou v obrázku vyznačeny stejnými symboly. Bohužel mu to nestačí k dokončení úkolu. Pomozte Kubovi a určete délku úsečky s otazníkem.



Výsledek: $5\sqrt{\frac{7}{2}} \doteq 9{,}354$

Řešení. Dokresleme do obrázku přímku rovnoběžnou s DF procházející bodem A (jako na obrázku) a označme E její průsečík s přímkou CD. Dále označme x délku hledané úsečky CD.



Z podobnosti trojúhelníků CDF a CEA plyne, že

$$|ED| = \frac{4}{10}x = \frac{2x}{5} \quad \text{a} \quad |EA| = \frac{10+4}{10} \cdot 5 = 7.$$

Platí, že

$$|\sphericalangle AEC| = |\sphericalangle FDC| = |\sphericalangle DBC|,$$

a proto je čtyřúhelník $AEBC$ tětivový. To pro změnu znamená, že

$$|\sphericalangle EAB| = |\sphericalangle ECB| = |\sphericalangle ACD|.$$

Tím dostáváme, že trojúhelníky EDA a EAC jsou podobné, a tedy

$$\frac{\frac{2x}{5}}{7} = \frac{7}{\frac{2x}{5} + x} \implies x = \sqrt{\frac{7 \cdot 5 \cdot 5}{2}} = 5\sqrt{\frac{7}{2}} \doteq 9{,}354134.$$

Úloha 44. Honza vlastní funkci $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující podmínku

$$f(m+n) \geq f(m) + f(f(n)) - 1$$

pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$. Jaký je průměr všech možných hodnot jeho funkce pro $f(2020)$? Symbol $\mathbb{N}$ značí množinu kladných celých čísel.

Výsledek: 1011

Řešení. Tvrdíme, že $f(n) \leq n+1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Protože

$$f(n+1) \geq f(n) + f(f(1)) - 1 \geq f(n)$$

pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, tak musí f být neklesající. Předpokládejme nyní, že

$$f(m) > m+1 \quad \text{pro nějaké } m \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

neboli $f(m) = m + c$ pro nějaké $c \in \mathbb{N}$, $c \geq 2$. Pak

$$f(2m) \geq f(m) + f(f(m)) - 1 = m + c - 1 + f(m+c) \geq 2m + 2(c-1) + 1$$

a induktivním aplikováním tohoto argumentu dostáváme

$$f(2^r m) \geq 2^r m + 2^r (c-1) + 1.$$

Spojíme-li tuto nerovnost, podmínku ze zadání a fakt, že f neklesající, obdržíme

$$f(2^r m + 1) \geq f(f(2^r m)) \geq f(2^r m + 2^r(c-1) + 1),$$

kde opět díky monotónnosti platí

$$f(2^r m + 1) = f(2^r m + 2) = \cdots = f(2^r m + 2^r(c-1) + 1).$$

Pro všechna $k \in \mathbb{N}$ zvolme $r_k \in \mathbb{N}$ takové, že $2^{r_k}(c-1) > k$. Poté

$$f(2^{r_k} m + 1 + k) \geq f(2^{r_k} m + 1) + f(f(k)) - 1 \geq f(2^{r_k} m + 1 + k) + f(f(k)) - 1,$$

a tedy $f(f(k)) \leq 1$, což znamená, že $f(f(k)) = 1$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$. Z toho však rovněž plyne $1 = f(f(m)) = f(m+c) \geq f(m)$, a tudíž $f(m) = 1$, což je ve sporu s předpokladem (1). Nutně tedy musí platit, že $f(n) \leq n+1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

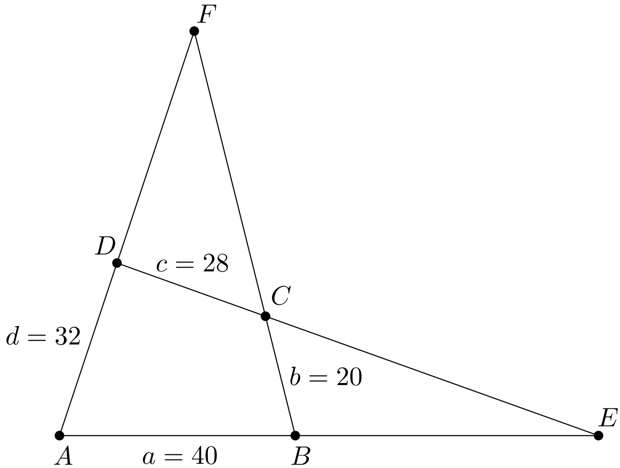
Pro libovolné přirozené číslo $N > 1$ může $f(N)$ nabývat libovolné hodnoty z množiny $\{1, 2, \ldots, N+1\}$. Abychom to dokázali, nechť je nejprve $A < N$. Definujme $f_1(n) = 1$ pro $n \leq A$ a $f_1(n) = A$ pro $n > A$. Funkce f_1 splňuje podmínky a $f_1(N) = A$. Následně funkce $f_2(n) = n$ také splňuje zadanou podmínku a $f_2(N) = N$. Nakonec funkce $f_3(n) = N \left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor + 1$ dává $f_3(N) = N+1$ a rovněž splňuje podmínku. Skutečně platí

$$\begin{aligned} f_3(m) + f_3(f_3(n)) &= N\left(\left\lfloor \frac{K}{N} \right\rfloor + \left\lfloor \left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor + \frac{1}{N} \right\rfloor \right) + 2 \leq \\ &\leq N\left(\left\lfloor \frac{K}{N} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor \right) + 2 \leq N \left\lfloor \frac{m+n}{N} \right\rfloor + 2 = f_3(m+n) + 1, \end{aligned}$$

kde jsme použili $\left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor + \frac{1}{N} < \left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor + 1$ pro $N > 1$ a $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$ pro libovolná reálná čísla $x, y \in (0, \infty)$.

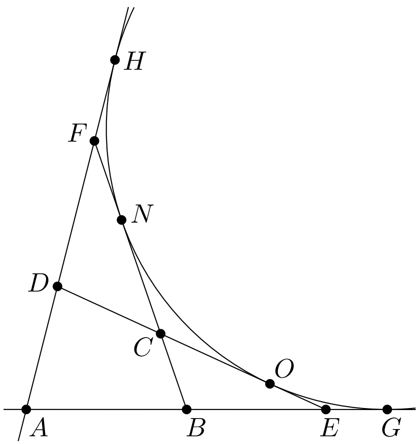
Protože $2020 > 1$, výsledek je jednoduše průměr všech přirozených čísel od 1 do 2021, tedy $\frac{2022}{2} = 1011$.

Úloha 45. Olin vlastní pole ve tvaru čtyřúhelníku, jehož délky stran jsou $a = 40$, $b = 20$, $c = 28$, $d = 32$ jako na obrázku. Po své prababičce zdědil sousední trojúhelníkové kusy pole BEC a DCF, které jsou ohraničené hranicemi jeho původního pozemku a jejich prodlouženími. Olin chce svou nově nabytou půdu oplotit, aby se mu po ní neprocházela zvěř. Pokud potřebuje plot délky 80 na oplocení části $\overline{BE} + \overline{EC}$, kolik plotu potřebuje na oplocení části $\overline{CF} + \overline{FD}$?



Výsledek: 88

Řešení. Nejdříve ukážeme, že trojúhelníky BEC, AED, DCF a ABF mají společnou kružnici připsanou – tu ležící v úhlu EAF.



Nechť G označuje bod dotyku kružnice připsané trojúhelníku BEC ležící v úhlu CBE s polopřímkou BE. Vzdálenost bodů B a G je polovina obvodu trojúhelníku CBE, tj.

$$|BG| = \frac{1}{2}(|CB| + |BE| + |EC|).$$

Nyní nechť G' je bod dotyku kružnice připsané trojúhelníku AED s polopřímkou AE. Využitím platnosti $a + b = 60 = c + d$ dostaneme, že

$$\begin{aligned} |AG'| &= \frac{1}{2}(|AE| + |ED| + |DA|) = \\ &= \frac{1}{2}(|AB| + |BE| + |EC| + |CD| + |DA|) = \\ &= \frac{1}{2}(|AB| + |BE| + |EC| + |AB| + |BC|) = \\ &= |AB| + \frac{1}{2}(|BE| + |EC| + |BC|), \end{aligned}$$

a tedy $G = G'$. Z toho dále plyne, že bod O, jakožto bod dotyku kružnice připsané na straně CE, je společný pro oba trojúhelníky, a také to znamená, že trojúhelníky BEC a AED mají společnou připsanou kružnici. Analogicky ukážeme, že trojúhelníky DCF a ABF mají také společnou připsanou kružnici. Tyto dvě kružnice jsou navíc identické, protože střed obou kružnic musí ležet v průsečíku os úhlů EAF a ECF. Víme, že délka tečen vedených z bodu ke kružnici je stejná, tedy platí, že $|AG| = |AH|$, a to pak implikuje, že trojúhelníky AED a ABF mají stejný obvod. Dohromady dostaneme, že

$$\begin{aligned} |CF| + |FD| &= |AB| + |BF| + |FA| - |AB| - |BC| - |DA| = \\ &= |AE| + |ED| + |DA| - |AB| - |BC| - |DA| = \\ &= |BE| + |EC| + |CD| - |BC| = \\ &= 80 + 28 - 20 = 88. \end{aligned}$$

Úloha 46. Pro kolik čísel $k \in \{1, \dots, 2020\}$ má rovnice

$$p^3 + q^3 + r^3 = 3pqr + k$$

řešení v kladných celých číslech?

Výsledek: 1568

Řešení. Přepišme rovnici do tvaru

$$p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr = \frac{1}{2}(p + q + r)\left((p - q)^2 + (q - r)^2 + (r - p)^2\right) = k.$$

Pokud jsou dva čtverce v poslední závorce nulové, pak je nutně nulová celá. Je-li tedy závorka nenulová, pak musí nabývat hodnoty alespoň 2 a čísla p, q a

r nemohou všechna nabývat stejné hodnoty. To znamená, že

$$k \geq (1+1+2) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \geq 4.$$

Všimněme si, že trojice $(p, q, r) = (n, n, n+1)$ je řešením pro $k = 3n+1$ pro každé $n \geq 1$. Stejně tak trojice $(p, q, r) = (n, n+1, n+1)$ je řešením pro $k = 3n+2$ pro každé $n \geq 1$.

Pokud $3 \mid k$, můžeme rovnici přepsat do tvaru

$$k = p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr = (p+q+r)^3 - 3(p+q+r)(pq+qr+rp),$$

odkud je vidět, že také $3 \mid p+q+r$, a proto nutně $9 \mid k$. Můžeme též snadno nahlédnout, že trojice $(p, q, r) = (n-1, n, n+1)$ řeší rovnici pro $k = 9n$ pro každé $n \geq 2$. Zbývá rozhodnout, jak je to pro $k = 9$. Pokud jsou čísla p, q, r po dvou různá, máme

$$k = \frac{1}{2}(p+q+r)\left((p-q)^2 + (q-r)^2 + (r-p)^2\right) \geq \frac{1}{2}(1+2+3)(1+1+4) = 18,$$

a pokud $p = q \neq r$, pak

$$9 = (2p+r)(p-r)^2.$$

Platí, že $2p + r > 1$, tedy

$$2p + r = 9 \quad \text{a} \quad |p - r| = 1,$$

což není možné, protože pak by $r = p \pm 1$ a $9 \neq 3p \pm 1$. Poskládáme-li vše dohromady, pak všechna přípustná k dostaneme tak, že z množiny $\{1, 2, \ldots, 2020\}$ odebereme čísla menší než čtyři a čísla dělitelná třemi a poté přidáme čísla dělitelná devíti větší než 9. Dohromady jich je $2020 - 3 - 672 + 223 = 1568$.

Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy patří tradičně k nejlepším vědeckým a vzdělávacím institucím celé České republiky. Nabízí kvalitní vzdělání v širokém spektru matematických, fyzikálních, informatických a učitelských oborů. Studenti fakulty se v rámci výuky podílejí na mezinárodních výzkumných projektech nebo v rámci programu Erasmus studují v zahraničí. Zhruba 6% vědeckých výsledků (podle RIV) celé České republiky produkuje Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy. Taktéž v institucionálním hodnocení výkonnosti či v mediálních žebříčcích zaujímá první místa. Studium na fakultě otevírá možnost účasti na mezinárodních projektech, například na výzkumech ve švýcarském CERNu. Získané zkušenosti jsou zároveň výborným základem pro úspěšnou kariéru ve vlastním podnikání. Absolventy MFF UK najdeme také ve firmách jako je Facebook, Oracle nebo Google. Ročně absolvuje kolem 400 studentů, z nichž 96,5% se uplatní v oboru.

Matematický korespondenční seminář MFF UK

Matematický korespondenční seminář, též zvaný PraSe (PRAžský SEminář), je soutěž pro studenty středních škol, organizovaná Matematicko-fyzikální fakultou Univerzity Karlovy v Praze. Probíhá po celý školní rok. Zhruba jednou za měsíc zadáváme příklady z různých oblastí středoškolské matematiky. Odeslaná řešení opravíme, obodujeme a pošleme zpět spolu s novým zadáním. Více informací včetně aktuálního zadání se dozvíte na *mks.mff.cuni.cz*.

Co lze řešením získat? Samozřejmě matematický růst a spoustu zábavy, krom toho také třeba možnost jet na soustředění, kde se seznámíte jak s organizátory, tak s dalšími řešiteli, na přednáškách se dozvíte něco zajímavého o matematice, a při hrách si od matematiky naopak dobře odpočinete. Další z výhod je možnost odpuštění přijímacích zkoušek na MFF UK.