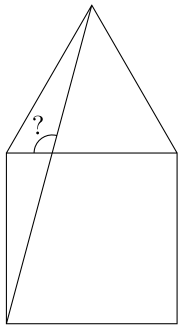
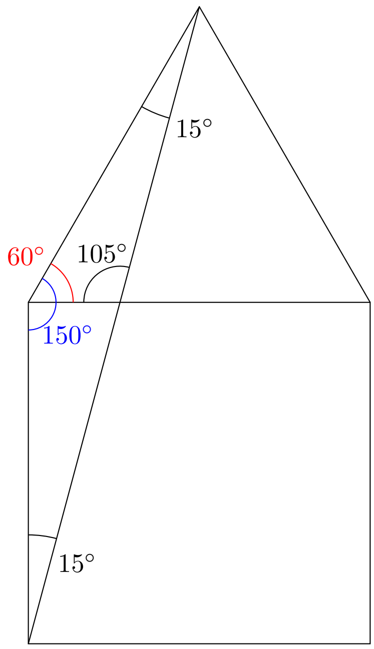
1. feladat Az alábbi, házat ábrázoló rajz egy négyzetből és egy vele azonos oldalhosszú szabályos háromszögből áll. Hány fokos a megjelölt szög?



Válasz: 105°

Magyarázat: Vegyük észre, hogy az ábrán a szabályos háromszög felső, illetve a négyzet alsó csúcsa közötti szakasz egy egyenlőszárú háromszög alapja, melynek szögei 150°, 15° és 15°. A keresett szög ekkor $180° - 60° - 15° = 105°$.



2. feladat Egy futballcsapat néhány tagja fotózáson vesz részt. A csapattagok felállnak egy sorba, és mindannyiukon van egy mez, rajta egy-egy pozitív egész számmal. A tagok mezszáma mind különböző. A fotós észreveszi, hogy a sor jobb szélén álló játékos mezszáma a 72-es, és minden más játékos mezszáma osztója a tőle jobbra álló szomszédja mezszámának (az irányokat a fotós szemszögéből értjük). Legfeljebb hány játékos állhat a sorban?

Válasz: 6

Magyarázat: Jobbról balra haladva, a soron következő mezszámot az aktuális mezszámból egy $n > 1$ egész számmal osztva kapjuk, így a mezszám legalább egy prímtényezője csökken. A jobb szélen lévő mezszám prímtényezős felbontása $72 = 2^3 \cdot 3^2$, tehát a sorban legfeljebb $1+3+2 = 6$ játékos állhat. Ez el is érhető például a $1, 2, 4, 8, 24, 72$ számsorozattal.

3. feladat Egy vonószenekar minden tagja tud hegedülni vagy brácsázni, és pontosan a tagok negyede tud mindkét hangszeren játszani. Továbbá tudjuk, hogy 32-en tudnak hegedülni és 23-an brácsázni. Hány tagú a zenekar?

Válasz: 44

Magyarázat: Jelölje n a vonószenekar tagjainak a számát! Ha összeadjuk a hegedülni tudók és a brácsázni tudók számát, ez az összeg megegyezik a zenekar létszámának és a mindkét hangszeren játszani tudók számának összegével, utóbbiakat ugyanis kétszer számoltuk az összegzéskor. Mivel $\frac{n}{4}$ zenész játszik mindkét hangszeren, ekkor

$$23 + 32 = 55 = n + \frac{n}{4} = \frac{5}{4}n,$$

így a keresett tagszám $n = 44$.

4. feladat Cili összeszorzott öt egymást követő pozitív egész számot, és így a C számot kapta. Dávid is megtette ugyanezt, de ő eggyel nagyobb számmal kezdte a sort, mint Cili. Dávid a D számot kapta. Mi a legkisebb szám azok közül, amiket Dávid összeszorzott, feltéve hogy $C/D = 4/5$?

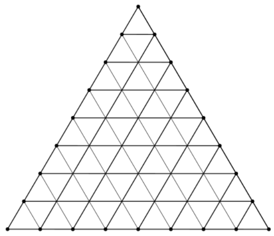
Válasz: 21

Magyarázat: Ha n jelöli a Cili által választott legkisebb számot, akkor $C = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$. Dávid első száma ekkor az $n+1$, így $D = (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$. A két szorzat hányadosa

$$\frac{4}{5} = \frac{C}{D} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} = \frac{n}{n+5}.$$

Ezt az egyenletet megoldva $n = 20$ adódik. A keresett szám Dávid legkisebb száma, azaz $n+1 = 21$.

5. feladat Az alábbi ábrán minden kis háromszögbe beírjuk a vele élszomszédos kis háromszögek számát. Mi az összes leírt szám összege?



Válasz: 168

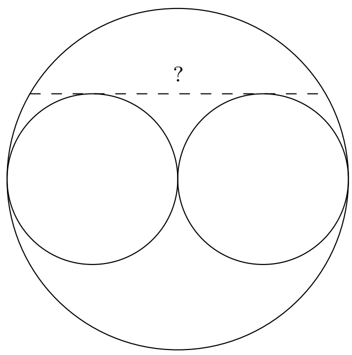
Magyarázat: 18 kis háromszög van a határon, melynek két-két élszomszédja van, illetve 3 kis háromszög a csúcsoknál, melyeknek csak egy-egy élszomszédjuk van. A maradék $64 - 18 - 3 = 43$ kis háromszögnek rendre három-három élszomszédja van. A keresett összeg így $3 \cdot 43 + 2 \cdot 18 + 3 = 168$.

6. feladat Találjátok meg a legnagyobb olyan n pozitív egész számot, amelyre $n^2 - 5n + 6$ prímszám.

Válasz: 4

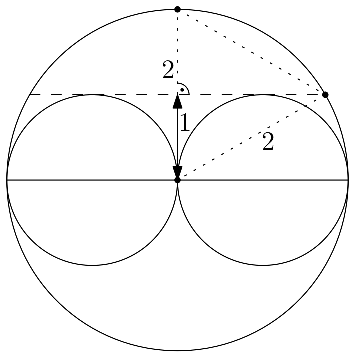
Magyarázat: $n^2 - 5n + 6$ minden egész n-re páros. Mivel 2 az egyetlen páros pozitív prím, ebből az $n^2 - 5n + 6 = 2$ egyenlet adódik, melynek megoldásai 1 és 4. A keresett legnagyobb n egész szám tehát a 4.

7. feladat Két 1 sugarú kör egy nagyobb kör középpontjában érinti egymást, és a nagyobb kör érinti mindkét kisebb kört is. Mennyi az ábrán látható szaggatott szakasz hossza, ha az érinti mindkét kisebb kört, és végpontjai a nagyobb körön vannak?



Válasz: $2\sqrt{3} \doteq 3.46410$

Magyarázat:



A szaggatott szakasz 1 távolságra van a két kisebb kör közös átmérő egyenesétől, így felezve metszi a nagy kör függőlegesen behúzott sugarát. Ekkor a nagy kör középpontja, "északi sarka", illetve a szaggatott szakasz két végpontja egy rombuszt alkot, melynek minden oldala, valamint a rövidebb, függőleges átlója is 2 hosszú, hiszen ennyi a nagyobbik kör sugara. Ekkor a szaggatott szakasz egy 2 oldalú szabályos háromszög magasságának kétszerese, azaz $2\sqrt{3}$.

8. feladat Négy matematikus leült egy asztal köré és rendeltek egy nagy tál perecet. Dániel kiment a mosdóba. Majd minden percben Ádám, Bea és Cecília kivettek a tálból egy perecet, három egyforma darabra tépték, és azt háromfelé osztva megették. Egy idő után (egész számú perc elteltével) Dániel visszajött az asztalhoz, és aztán négyen ették tovább a pereceket, továbbra is percenként összesen egyet, de Dániel mindegyik perecnek a 2/5 részét ehette meg, míg a többiek fejenként 1/5 részt. Egy idő után Ádám észrevette, hogy pontosan ugyanannyi perecet evett összesen, mint Dániel. Ekkor abbahagyták az evést. Hogyan aránylik az az időtartam, ameddig Dániel mosdón volt, ahhoz, ameddig az asztalnál volt?

Válasz: $\frac{3}{5} = 0.6$

Magyarázat: Jelölje t_h azt az időtartamot, amíg Dániel hiányzott az asztaltól, t_j pedig azt az időt, amíg jelen volt. Mivel Ádám és Dániel ugyanannyi perecet ettek,

$$\frac{2}{5}t_j = \frac{1}{3}t_h + \frac{1}{5}t_j \Rightarrow \frac{t_h}{t_j} = \frac{3}{5}.$$

9. feladat Prágában egy pénzváltó irodában az alábbi érmék kaphatók: az 1 cseh koronás érme 40 eurocentért, a 2 koronás 50 eurocentért, az 5 koronás 1 euróért, a 10 koronás 2 euróért, a 20 koronás 4,1 euróért és az 50 koronás 9,9 euróért. Márk szeretné átváltani mind a 11,8 euróját, de nem szeretne két azonos cseh érmét venni. Hány koronát kaphat összesen így? Válaszként adjátok meg az összes lehetséges megoldás összegét.

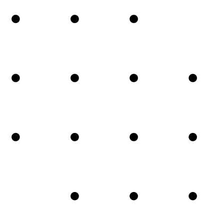
Válasz: 58

Magyarázat: A következő egyenletet kell megoldanunk:

$$11.8 = 0.4 \cdot x_1 + 0.5 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 + 4.1 \cdot x_5 + 9.9 \cdot x_6,$$

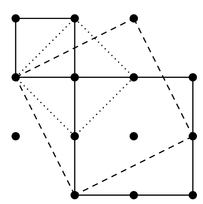
ahol x_i jelöli az i-edik llegkisebb címletű korona árfolyamát. A feltétel miatt minden i-re $x_i \in \{0; 1\}$. Mivel $0.4 + 0.5 + 1 + 2 + 4.1 < 11.8$, $x_6 = 1$ szükségképpen. Ekkor ha x_4 vagy x_5 valamelyike szintén 1 lenne, akkor átlépnénk a $11,8$ eurós keretet, így $z_4 = z_5 = 0$. Mivel $0.4 + 0.5 + 1 = 1.9$, és Márk minden euróját be szeretné váltani, ekkor mindenképp $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ kell, hogy legyen. A feltételeknek megfelelően tehát Márk csak egyféleképp tudott váltani, ennek során pedig $1 + 2 + 5 + 50 = 58$ cseh koronát kaphat.

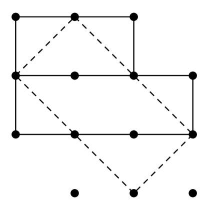
10. feladat Egy szabályos négyzetrácson megjelöltük az alábbi tizennégy pontot. Hány olyan téglalap van, amelynek mind a négy csúcsa a megjelölt pontok közül kerül ki?



Válasz: 27

Magyarázat: Hét féle téglalapunk lehet, ahogyan azokat az ábrákon is feltüntettük:





7 egységnégyzetünk, 2 darab 2×2-es négyzetünk van, 4 olyan, mint a pontozott vonallal határolt, és 2 olyan, mint a szaggatott vonallal határolt négyzet. Ezen felül van 8 darab 1×2-es téglalapunk, 2 darab 1×3-as téglalapunk, végül pedig 2 olyan téglalap, amit az alsó ábrán szaggatott vonal határol. Mindez összesen tehát $7+2+4+2+8+2+2=27$ téglalap.

11. feladat Melyik az a pozitív egész n szám, melyre 60 és n legkisebb közös többszöröse 777-tel nagyobb, mint 60 és n legnagyobb közös osztója?

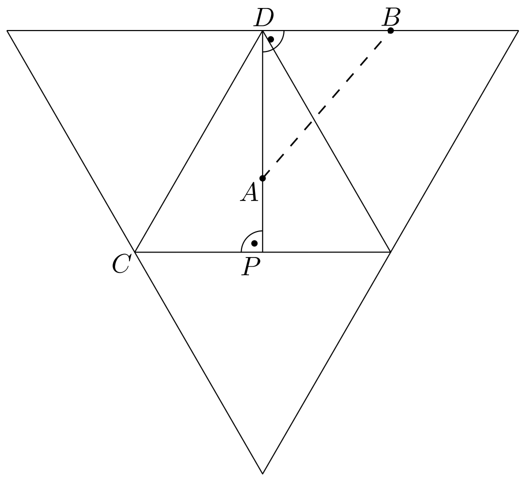
Válasz: 39

Magyarázat: Az $\mathrm{lkkt}(60;n) = 777 + \mathrm{lnko}(60;n)$ egyenletet szeretnénk megoldani. A legnagyobb közös osztó definíció szerint osztója 60-nak, így az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, illetve 60 számok közül kerülhet ki. Ezek közül egyedül a 3 olyan, melyhez 777-et adva a 60 egy többszörösét kapjuk. Ekkor tehát $\mathrm{lnko}(60;n) = 3$ és $\mathrm{lkkt}(60;n) = 780$, amiből $60 \cdot n = 3 \cdot 780$ adódik, így $n = 39$.

12. feladat Egy 1 élű szabályos tetraéder egyik lapjának közepén egy hangya ül. A hangya szeretne átjutni egy olyan élközéppontba, ami nem a hangya jelenlegi lapján helyezkedik el. Mekkora a lehető legrövidebb út hossza, amin eljuthat oda? A hangya csak a tetraéder felületén mászhat.

Válasz: $\sqrt{7/12} \doteq 0.76376$

Magyarázat:



“Terítsük ki” a tetraéder felületét a síkba, ahogyan azt az ábra is mutatja. A hangya az A pontból indul, és B-be szeretne eljutni. A síkbeli testhálón a legrövidebb útvonalat az ábrán szaggatott vonallal jelölt AB szakasz adja. A PD szakasz egy 1 oldalú szabályos háromszög magassága, hossza a Pitagorasz-tételből adódóan $|PD| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Az A súlypont pedig harmadolópontja a PD szakasznak, így

$$|AD| = \frac{2}{3}|PD| = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Továbbá $|DB| = \frac{1}{2}$, hiszen B oldalfelező pont. Mivel $DB \perp DA$, a keresett $|AB|$ távolságot ismét a Pitagorasz-tétel adja:

$$|AB|^2 = |AD|^2 + |DB|^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12},$$

amiből

$$|AB| = \sqrt{\frac{7}{12}} \doteq 0.76376.$$

13. feladat Egy kalapban négy számkártya van: 3, 6, 9 és 12. A kártyák közül Ágnes, Betti, Cili és Dóra is kihúzott egyet-egyet. Az alábbi állításokat mondták a kihúzott kártyájukról:

- Ágnes: Kétszer akkora számot húztam, mint Dóra.
- Betti: Háromszor akkora számot húztam, mint Dóra.
- Cili: Négyszer akkora számot húztam, mint Dóra.
- Dóra: Nem én húztam a legkisebbet.

Tudjuk, hogy ketten mondtak igazat és ketten hazudtak. Mennyi a két hazugnál lévő számkártyák szorzata?

Válasz: 27

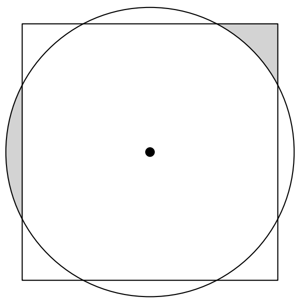
Magyarázat: Ha Dóra kezében lenne a 3-as kártya, akkor ő lenne az egyik hazug, így a másik három állítás közül pontosan egy lenne hazugság. Ez viszont lehetetlen, mert ekkor a másik három lány közül kettőnek ugyanazt a számkártyát kellett volna húznia. Ha Dóra a 9-as vagy a 12-es kártyát húzta volna, akkor mindenki más állítása hamis lenne, így kizárásos alapon Dóra kezében a 6-os kártya van. Ekkor a három másik lány közül egyedül Ágnes mondhatott igazat, az ő kezében tehát a 12-es kártya van. Így tehát Betti és Cili, a két hazug lány kezében a 3-as és a 9-es kártyák vannak, a keresett szorzat pedig 27.

14. feladat Melyik az a legkisebb pozitív egész, amelynek pontosan 24 pozitív osztója van, és közülük pontosan 8 páratlan?

Válasz: 420

Magyarázat: Ha egy n pozitív egész szám prímtényezős felbontása $n = {p_1}^{a_1} \cdot \ldots \cdot {p_k}^{a_k}$, akkor n osztóinak száma $(a_1+1) \cdot \ldots \cdot (a_k+1)$. Nyilván a páratlan osztók száma csak a 2 hatványkitevőjétől függ a prímtényezős felbontásban. Mivel $24 = 2^3 \cdot 3$ és pontosan 8 páratlan osztó van, a prímtényezős felbontásban 2 hatványa 2 lesz. n-nek ezen felül vagy 3 különböző, első hatványon szereplő páratlan prímosztója van, vagy két különböző páratlan prímosztója, melyek közül egyik az első, a másik pedig a harmadik hatványkitevővel szerepel a felbontásban, vagy pedig egyetlen páratlan prím a hetediken. Mivel a legkisebb alkalmas n-et keressük, az összehasonlítandó szorzatok ebből a $3 \cdot 5 \cdot 7$; $3^3 \cdot 5$; 3^7 lesznek, ezek közül pedig a $3 \cdot 5 \cdot 7$ a legkisebb. Így $n = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$.

15. feladat Van egy négyzetünk és egy körünk, melyek középpontja azonos. Ha a két szürke rész azonos területű, akkor hányszorosa a négyzet oldala a kör sugarának?



Válasz: $\sqrt{\pi} \doteq 1.77246$

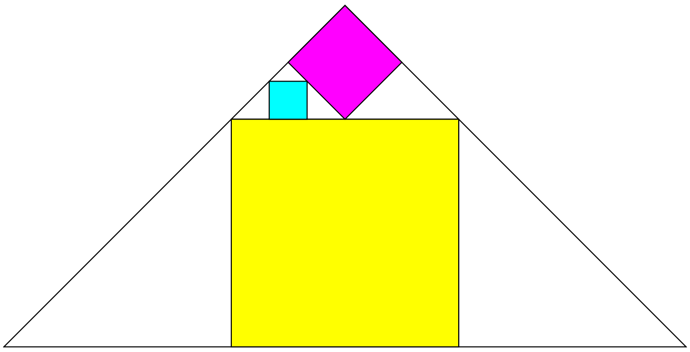
Magyarázat: Ha a szürke tartományok egyenlő területűek, akkor a kör- és a négyzet területe is megegyezik, hiszen mindkét alakzat területét megkaphatjuk a közös területrésznek és a megfelelő szürke tartomány területe négyszeresének összegeként, mivel közös középpontja van a két síkidomnak. Ha a jelöli a négyzet oldalhosszát és r a kör sugarát, akkor ebből következik, hogy $a^2 = r^2\pi$, így a keresett arányszám $a : r = \sqrt{\pi}$.

16. feladat Lenke leírja egymás mellé balról jobbra az $1, 2, 3, \ldots, 20$ számokat, és a számok között minden résbe beír egy plusz vagy egy mínusz jelet. Hányféleképpen tudja beírni a jeleket úgy, hogy a kapott műveletsor eredménye 192 legyen?

Válasz: 5

Magyarázat: Mivel Lenke csak a számok közé ír előjeleket, az 1 előjele mindenképpen pozitív. Ha minden előjel pozitív lenne, akkor 210 adódna összegként, így ezt az összeget 18-cal kell csökkentenünk. Ez azt jelenti, hogy a megváltoztatandó előjelű számok összege ennek a fele, azaz 9 kell, hogy legyen. Ezt legfeljebb 3 szám összegéből tudjuk előállítani. Mivel az 1 mindenképp pozitív, az egyetlen alkalmas számhármas a $(2, 3, 4)$. A számpárok közül a $(2, 7)$, $(3, 6)$, $(4, 5)$ adják a megfelelő összeget, végül pedig az is kiadja a kívánt eredményt, ha csak a 9-es szám előjelét változtatjuk meg. Összesen ez tehát ötféle előállítás.

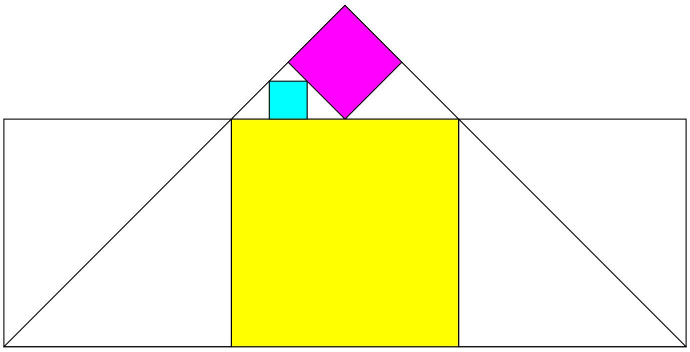
17. feladat Egy egyenlő szárú derékszögű háromszögbe behelyeztünk három négyzetet az ábrán látható módon:



Mekkora részét foglalja el a türkiz négyzet a háromszög területének?

Válasz: 1/81

Magyarázat: A megoldás kulcsa azon megfigyelésben rejlik, hogy a sárga négyzet oldalhossza a nagy egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója hosszának egyharmada. Ez könnyen látszik, ha például a négyzet által levágott, az ábrán a négyzettől balra illetve jobbra elhelyezkedő egyenlő szárú derékszögű háromszögeket négyzetté egészítjük ki.



Ebből következik, hogy a sárga négyzet és a nagy háromszög területaránya

$$2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Ismét az előbbi megfigyelést alkalmazva kapjuk a türkiz négyzet és a nagy háromszög területarányát, azon észrevétellel kiegészítve, hogy a türkiz négyzet oldalhossza a sárga négyzet oldalhosszának egyhatod része, így a két négyzet területaránya $\frac{1}{36}$. Ebből pedig a keresett területarány $\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{81}$.

18. feladat Mennyi az összes olyan pozitív egész szám összege, amely nem írható fel $2a + 3b$ alakban úgy, hogy a és b relatív prím pozitív egészek legyenek?
(Az m és n pozitív egészeket relatív prímeknek nevezzük, ha legnagyobb közös osztójuk 1.)

Válasz: 26

Magyarázat: Könnyen látható, hogy az $1, 2, 3, 4, 6, 10$ számok egyikét sem tudjuk ilyen alakban felírni, ezek összege 26. A többi szám viszont előállítható az alábbi módon (jelöljük az előállítandó számot n-nel):
$(a, b) = (\frac{n-3}{2}, 1)$ ha n 5-nél nem kisebb páratlan;
$(a, b) = (2l - 3, 2)$ ha $n = 4l \geq 8$ (azaz n néggyel osztható és $n \geq 8$);
$(a, b) = (2l - 5, 4)$ ha $n = 4l + 2 \geq 14$ (azaz ha n kettővel osztható, de néggyel nem és $n \geq 14$).

19. feladat Egy polinomot *patronszerűnek* nevezünk, ha két egész gyöke van, melyek 1-gyel térnek el egymástól, minden együtthatója egész, és együtthatóinak összege 2020. Hány patronszerű másodfokú (azaz $kx^2 + lx + m$ alakú) polinom létezik?

Válasz: 4

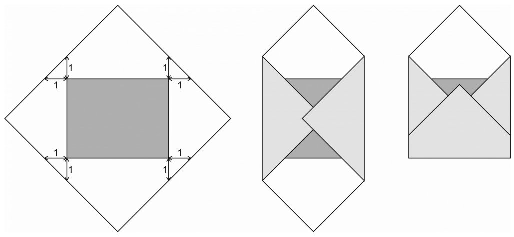
Magyarázat: Mivel a polinomnak két gyöke van, felírható $c \cdot (x - a) \cdot (x - b)$ alakban, ahol a és b az egész gyökök, c pedig a polinom főegyütthatója, így maga is egész. Az együtthatók összege könnyen felírható $c(a - 1)(b - 1)$ alakban. Mivel ez a feltétel szerint $2020 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$, továbbá az egész gyökök különbsége miatt $a - 1$ és $b - 1$ között is 1 az eltérés, 4 lehetséges módon kaphatunk ilyen polinomot ($2020 = 1010 \cdot 1 \cdot 2$; $2020 = 1010 \cdot (-1) \cdot (-2)$; $2020 = 101 \cdot 4 \cdot 5$; $2020 = 101 \cdot (-4) \cdot (-5)$).

20. feladat Egy vonatszerelvény 40 kocsiból állt, melyek a vonat elejétől a vége felé haladva 1-től 40-ig voltak számozva. Minden kocsiban 40 utas fér el. Kezdetben egy utas ült az 1-es kocsiban, kettő a 2-esben, …, negyven utas a 40-esben. Viszont egyszer csak technikai okok miatt az utolsó kocsit le kellett kapcsolni a vonat végéről, így mindenkinek, aki abban utazott, át kellett ülnie egy kisebb sorszámú kocsiba. Ezt úgy tették meg, hogy elindultak a vonatban előrefelé, és leültek az első szabad helyre. (Ha a kocsi minden széke foglalt volt, akkor továbbmentek az eggyel kisebb sorszámú kocsiba, stb.) Sajnos később a vonatút során ugyanez megtörtént a 39-es, majd a 38-as, …, majd végül a 23-as kocsival is. Mindezek után hányan ültek a 2-es kocsiban?

Válasz: 19

Magyarázat: Figyeljük meg, hogy összesen $40 \cdot 41/2 = 820$ utas tartózkodik a vonaton. Az összes lekapcsolás után 22 kocsi marad, ekkor miután mindenki helyet foglalt, az utolsó 20 kocsinak tele kell lenni, ellenkező esetben legfeljebb $1 + 2 + 39 + 19 \cdot 40 = 802$ utas férne el a fennmaradó kocsikban összesen. Így az első két kocsiban összesen 20 utast kell elosztani. Ebből következően az első kocsiban nem történt létszámváltozás, így a második kocsiban 19 utas foglal helyet.

21. feladat János nem tudott borítékot vásárolni, így úgy döntött, készít magának. Egy téglalap alakú borítékot szeretne, ehhez vesz egy négyzet alakú papírlapot, amelynek az átmérője 30 cm, behajtja a jobb és bal sarkokat. Ezután behajtja az alsó sarkot, és a felső sarok behajtásával tudja becsukni a borítékot. Ahhoz, hogy jól tudja összeragasztani (és leragasztani) a borítékot, szüksége van pontosan 1 cm átfedésre (lásd az ábrán). Lecsukás után a boríték felső csücske nem lehet az alsó éle alatt. Legfeljebb milyen széles lehet a boríték (cm-ben)?



Válasz: 18

Magyarázat: Jelölje a és b rendre a boríték szélességét és magasságát, d pedig a négyzet átmérőjét. A függőleges hajtási vonalak által keletkezett derékszögű egyenlőszárú háromszögeket megfigyelve kaphatjuk, hogy $d = a + b + 2$. Azért, hogy a feltételnek megfelelően tudjunk hajtogatni, teljesülnie kell az $\frac{d-b}{2} \leq b$, azaz $b \geq \frac{d}{3}$ egyenlőtlenségnek. Ebből $a \leq d - \frac{d}{3} - 2 = \frac{2}{3}d - 2 = 18$.

22. feladat Márta úgy választotta ki az a, b és c pozitív egész számokat, hogy $a+b$, $b+c$ és $c+a$ három különböző négyzetszám legyen. Mi $a+b+c$ legkisebb lehetséges értéke?

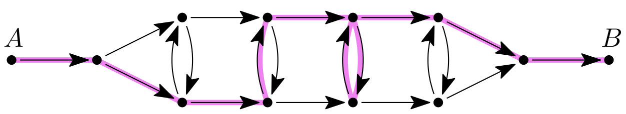
Válasz: 55

Magyarázat: Vezessük be az $a+b=d^2$, $b+c=e^2$, $c+a=f^2$ egyenlőségeket, ahol $d; e; f$ különböző pozitív egészek. Feltehető, hogy $d < e < f$ és mivel Márta számai mind pozitívak,

$$d^2 + e^2 = a + c + 2b > a + c = f^2. \qquad (\heartsuit)$$

A keresett összeg $(d^2 + e^2 + f^2)/2$, ami szintén egész, így a három négyzetszám összege szükségképpen páros. A legkisebb megoldást a $(d^2, e^2, f^2) = (25, 36, 49)$ számhármas adja, amiből a keresett összeg $a + b + c = 55$.

23. feladat Az alábbi ábrán hányféleképpen tudunk eljutni A-ból B-be úgy, hogy minden nyilat legfeljebb egyszer használjunk? (Egy lehetséges utat berajzoltunk lilával.)



Válasz: $162 = 2 \cdot 3^4$

Magyarázat: Az első elágazásnál kétfelé indulhatunk. Az ezután következő 4 egymás alatti pontpár esetében pedig pontpáronként három lehetőségünk van aszerint, hogy 0, 1 vagy esetleg mindkét függőleges élt használjuk, mielőtt továbbhaladnánk jobbra. Ez összesen $2 \cdot 3^4 = 162$ lehetséges útvonal.

24. feladat Hány olyan négyjegyű szám van, amelyben bármely két szomszédos számjegy pontosan 3-mal tér el egymástól? (A szám nem kezdődhet nullával.)

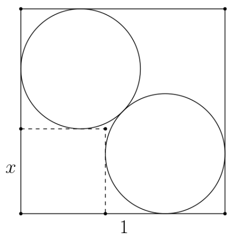
Válasz: 29

Magyarázat: A következő módon kódoljuk a lehetséges négyjegyű számokat: Az adott számjegy helyére az N betűt írjuk, ha a soron következő számjegy nagyobb, ha pedig kisebb, azt K betű jelzi. Ilyen módon például az 1474 kódja NNK, míg az 1414-et az NKN kód jelzi. Az első számjegy ismeretében a kód már egyértelműen meghatározza a négyjegyű számot, így elég a $2^3 = 8$ lehetséges kódra külön-külön összeszámolnunk a megfelelő kezdő számjegyeket. Ezeket a következő táblázat foglalja magába:

kód	NNN	NNK	NKN	NKK	KNN	KNK	KKN	KKK
lehetséges első számjegyek	nincs	1–3	1–6	3–6	3–6	3–9	6–9	9

Így összesen $3 + 6 + 4 + 4 + 7 + 4 + 1 = 29$ négyjegyű szám felel meg a feltételeinknek.

25. feladat Egy egységnégyzetbe két azonos méretű kört rajzoltunk, amelyek érintik egymást és a négyzet oldalait. Az ábrán egy kisebb négyzet egyik sarka közös a nagyobb négyzetével, és érinti a két kör. Mekkora a kis négyzet oldalhossza?



Válasz: $\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \doteq 0.41421$

Magyarázat: Legyen x a kis négyzet oldalhossza, valamint jelölje r a körök sugarát. Ekkor $r = \frac{1-x}{2}$. A két kör középpontja és érintési pontja négy szakaszra osztja a négyzet $\sqrt{2}$ hosszú átlóját. Ebből kettő a kör sugara, kettő pedig r oldalú négyzetek átlója. Ebből felírható

$$\sqrt{2} = 2r + 2\sqrt{2}r = (1-x)(1+\sqrt{2}),$$

ez pedig az $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$ megoldáshoz vezet.

26. feladat Az $x_1, x_2, \dots, x_{2020}$ valós számokra teljesülnek a következő tulajdonságok:

- Bárhogy adjuk össze a számokat egyetlen x_i kivételével úgy, hogy i páratlan, eredményül mindig 2-t kapunk.
- Bárhogy adjuk össze a számokat egyetlen x_i kivételével úgy, hogy i páros, eredményül mindig 0-t kapunk.

Mennyi lesz az $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2020}$ összeg értéke?

Válasz: 2020/2019

Magyarázat: Ha a feltételként megfogalmazott összes egyenletet összeadjuk, akkor

$$2019(x_1 + x_2 + \cdots + x_{2020}) = 1010 \cdot 2 + 1010 \cdot 0 = 2020,$$

adódik, ebből pedig a keresett összeg $\frac{2020}{2019}$.

27. feladat Két játékos játszik egy játékot, felváltva lépnek. Minden lépésben átváltoztatnak egy pozitív egész n számot egy másik pozitív egész számmá az $\left[\frac{n}{3}, \frac{n}{2}\right]$ intervallumban. Az a játékos, aki nem tud lépni, veszít. Hány olyan kezdőszám van az $[1, 1000]$ intervallumban, amivel az első játokos nyer, ha optimális stratégiával játszik?

Válasz: 620

Magyarázat: Nevezzünk egy pozitív egész számot *nyerőnek*, ha alkalmas stratégiával játszva az első játékos győzelme garantált, valamint nevezzünk egy pozitív egész számot *vesztőnek*, ha nem nyerő. Vegyük észre, hogy egy n pozitív egész szám pontosan akkor nyerő, ha van vesztő szám az $\left[\frac{n}{3}, \frac{n}{2}\right]$ intervallumban. Hasonlóképp figyeljük meg, hogy egy n szám pontosan akkor vesztő, ha az $\left[\frac{n}{3}, \frac{n}{2}\right]$ intervallumban minden egész szám vesztő (beleértve azt az esetet is, amikor nincs egész szám ebben az intervallumban).

Világos, hogy az 1 vesztő szám, így a korábbi megfigyelések alapján a 2 és a 3 nyerő számok. A $4, \dots, 7$ ismételten vesztő számok, mivel ezek bármelyikét n-nek választva $\left[\frac{n}{3}, \frac{n}{2}\right] \cap \mathbb{N} \subseteq \{2, 3\}$. Ugyanígy adódik, hogy $8, \dots, 21$ nyerő számok, stb. Ezen a módon folytatva megkapjuk, hogy $44, \dots, 129$, $260, \dots, 777$ úgyszintén nyerő számok. Összesen tehát 620 nyerő szám van.

28. feladat Két kör, melyek átmérője $AB = 17$ és $AC = 7$, az A és D pontokban metszik egymást. Tudjuk továbbá, hogy $CD = 4$. Vegyük a két kör középpontjának összes lehetséges egymástól való távolságát és számoljuk ki a szorzatukat!

Válasz: 60

Magyarázat: Thalész tétele következtében a D csúcsnál derékszög van mind az ADB, mind pedig az ADC háromszög esetén, ezért a $B; C; D$ pontok egy egyenesre illeszkednek. Pitagorasz tétele adja BD hosszát: $\overline{BD}^2 = 17^2 - (7^2 - 4^2) = 16^2$ és így $\overline{BD} = 16$. Így tehát $\overline{BC} = 16 \pm 4$ attól függően, hogy a kisebb kör középpontja a nagyobb körön belül vagy kívül helyezkedik el. A középpontokat összekötő szakasz az ABC háromszög BC oldallal párhuzamos középvonala, ezért ennek a szakasznak a hossza a BC szakasz hosszának fele, így tehát $12/2 = 6$ vagy $20/2 = 10$. A lehetséges hosszak szorzata ezért 60.

29. feladat Egy járat tizennégy állomásán összesen hét trolibusz közlekedik. Mindegyik trolibusz az egyik állomásról indul és egy irányba halad egészen addig, amíg el nem éri a járat első vagy utolsó állomását, ahol megfordul és az ellenkező irányba halad tovább. Mindegyik trolibusz állandó sebességgel mozog és pontosan egy állomásnyit halad egy perc alatt. A közlekedési központ úgy helyezte el a trolibuszokat, hogy

1. az összes állomáson legfeljebb egy trolibusz van, valamint

2. egy percen belül is legfeljebb egy trolibusz lesz az összes állomáson attól függetlenül, hogy melyik irányba haladnak a trolibuszok.

Hányféleképpen történhetett ez az elhelyezés, ha a trolibuszokat egyformának tekintjük?

Válasz: 20

Magyarázat: A trolibuszok nem lehetnek egymástól két állomás távolságra. Nyilvánvaló, hogy a páros és páratlan állomások egymástól függetlenek, ahogy az is, hogy legfeljebb 4 trolibusz állhat mind a páros, mind a páratlan állomásokon. Így az egyik "fajta" állomáson 3, míg a másikon 4 trolibusznak kell állnia, tehát a megoldás $2 \cdot N$, ahol N azon esetek száma, ahányféleképpen 3 trolibuszt el tudunk helyezni 7 állomáson egy sorban úgy, hogy legalább egy-egy szabad állomás legyen köztük. Először a 4 "köztes" szabad állomást kell elképzelnünk, majd köréjük helyezni a három trolibuszt. Az első trolibuszt ötféleképpen helyezhetjük el, a másodikat négyféleképpen, a harmadikat pedig háromféleképpen. Mivel a trolibuszok egyformák, N értéke $N = (5 \cdot 4 \cdot 3)/(3 \cdot 2 \cdot 1) = 10$. Így a végső megoldás $2 \cdot 10 = 20$.

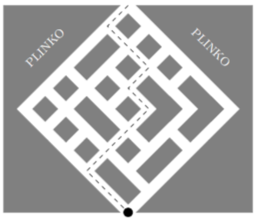
30. feladat Mariann írt egy 2020 oldalas könyvet, melynek oldalait a következőképp számozta: $1, 2, 3, \ldots 2020$. Miután átnézte a kéziratot, a könyv elejére beillesztett egy 11 oldalas összefoglalót. Hány számjegyet kell átírnia ahhoz, hogy minden oldalon a helyes oldalszám szerepeljen a beillesztés után? Egy régi oldalszám egy számjegye szerepelhet egy új oldalszámban, de csak azonos pozícióban (egyesek, tizesek, százasok...). Az újonnan leírt számjegyek, mint például a $95 \to 106$ átírásban szereplő 1-es, nem számítanak bele az összegbe.

Válasz: 4251

Magyarázat: Először nézzük meg, hogy hány számjegy maradt ugyanaz. Azt könnyen láthatjuk, hogy az egy-, és kétjegyű számok esetén semelyik számjegy se marad ugyanaz, ha hozzáadjuk a 11-et. Vagyis csak azok a számjegyek maradhatnak ugyanazok, amik a százas vagy ezres helyen szerepelnek. Ha az utolsó két számjegy 00 és 88 közt van, akkor a százas és ezres helyiérték ép marad. A 89 és 99 közti számoknál a százas helyiérték megváltozik. Ezenkívül az 1000 és 1988 közti számoknál az ezres helyiérték se fog változni. Összesítve 1999-ig, $19 \cdot 89 + 989 = 2680$ számjegy marad ugyanaz. Ezenkívül 2000 és 2020 közt 21 szám esetén nem fog változni az ezres és a százas helyiérték. Ez még $2 \cdot 21 = 42$ fix számjegy, azaz összesen $2680 + 42 = 2722$ számjegy marad ugyanaz.

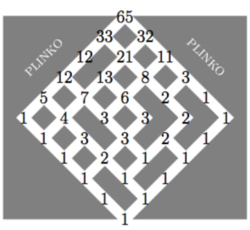
Most számoljuk meg, hogy hány számjegy lesz összesen. 1-től 9-ig 9 darab, 10-től 99-ig $90 \cdot 2 = 180$ darab, 100-tól 999-ig 2700 darab, 1000-től 2020-ig pedig $1021 \cdot 4 = 4084$ darab. Ez összesen 6973 számjegy, amiből le kell vonni a 2722 változatlan számjegyet, vagyis összesen 4251 számjegyet kell átírni.

31. feladat Az alább látható Plinko doboz tetején bedobunk egy korongot, ami lefelé csúszik egészen addig, amíg a doboz alján kiesik. Hányféle különböző útvonalon juthat le a korong a doboz aljára? (Egy példa látható az ábrán.)



Válasz: 65

Magyarázat: Minden útelágazásra írjuk rá azt a számot, ahányféleképp onnan a korong továbbhaladhat. Ezt alulról felfele végezzük, a kijáratra 1-et írva. Minden további elágazás a közvetlenül alatta lévő elágazásokra írt számok összegét kapja.



32. feladat A király és 100 lovagja leülnek a kerekasztal köré. A vegetáriánusoknak sajtot szolgálnak fel, mindenki másnak csirkét. A király észreveszi, hogy a tőle balra ülő lovagnak nagyobb adag csirke jutott, mint neki, így megparancsolja, hogy mindenki adja tovább a tányérját a tőle jobbra ülőnek. Így a király elé megfelelő mennyiségű csirke kerül, viszont 64 lovag nem a neki megfelelő fogást kapta, így mindenki újból eggyel jobbra adja a tányérját. A király tányérján ismét kevesebb csirke van, mint a tőle balra ülő lovag előtt, így a jelenlévők harmadjára is eggyel jobbra adják tányérjukat. Ezután összesen 2 lovag (de nem a király) előtt van az étrendjétől eltérő fogás, úgyhogy helyet cserélnek egymással és megkezdődik a lakoma. A király hány lovagja eszik csirkét?

Válasz: 68

Magyarázat: Vegyük észre, hogy a királynak és a balján ülő három lovagnak is csirkét szolgáltak fel. Így a harmadik csere után a királytól balra az első vegetáriánus fogás egy húsevő lovaghoz kerül, míg a királytól jobbra ülők közül a legelső vegetáriánus elé csirke került, így végül ők cserélnek helyet. (Az ábrán a húsevőket M-mel, a vegetáriánusokat V-vel jelöltük.)

V M M M M $\cdots$ M V

Mindenki más ugyanazt a fogást kapta, amit a tőlük hárommal balra ülő, így az ülésrend így nézett ki:

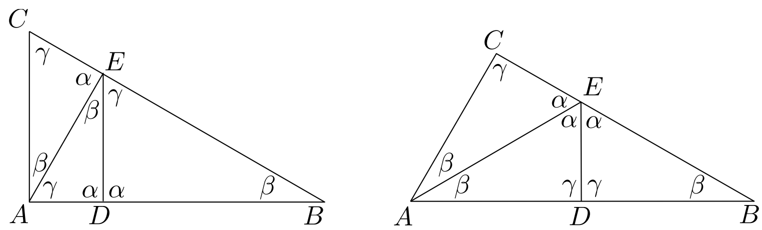
$\cdots$ M M V M M V M M M M $\cdots$ M V M M V M M V $\cdots$

Így az első cserét követően minden vegetáriánus és a vegetáriánusoktól eggyel jobbra ülő húsevők kaptak az étrendjüktől eltérő lakomát. A vegetáriánusok száma ezért $64/2 = 32$, azaz a maradék $100 - 32 = 68$ lovag eszik csirkét a királlyal egyetemben.

33. feladat Dávid szeretne rajzolni egy ABC háromszöget, valamint az AB oldalra egy D belső pontot és BC oldalra egy E belső pontot úgy, hogy az ABC, AEC, ADE, BDE háromszögek hasonlók legyenek. Mi a BAC szög fokban kifejezett lehetséges értékeinek összege?

Válasz: 150

Magyarázat:



A lehetséges eseteket figyelembe véve, az ábra összes szöge megegyezik α-val, β-val vagy γ-val (ezek az ABC háromszög belső szögei). Nyilvánvaló, hogy $EAC = \beta$ és $AEC = \alpha$. Mivel az EDA és EDB szögek összege 180° és egyformának kell lenniük, vagy α vagy γ értéke 90°. Ellenőrzéssel megkapjuk, hogy az előbbi eset egy lehetséges megoldás, az utóbbiból pedig következik, hogy $\alpha = 60°$. Tehát a végeredmény $90° + 60° = 150°$.

34. feladat Öt éjszakai műszakban dolgozó munkásnak be kell osztania a következő 10 éjszaka műszakjait úgy, hogy minden éjszaka pontosan két munkás dolgozik és ezek a munkások nem kaphatnak a következő éjszakára is műszakot. Hányféle olyan időbeosztás létezik, amelyben szerepel a munkások összes lehetséges párosa?

Válasz: 240

Magyarázat: Jelöljük pontokkal a munkásokat, és kössünk össze két pontot, ha beosztottuk őket egy párnak éjszakára. Láthatjuk, hogy $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ párosítás létezik, azaz minden pár pontosan egyszer fog együtt dolgozni. Az első éjszakára 10-féleképpen választhatjuk meg a párt, a másodikra 3-féleképpen, a harmadikra és negyedikre pedig $2-2$-féleképpen. Látható, hogy eddig mindegy, hogyan választottunk, mivel minden esetben hasonló rajzot kaptunk. Az ötödik választás után viszon kétféle ábra keletkezhet. Vagy kapunk egy 5 hosszú kört, vagy egy 4 hosszú kört egy „farokkal”. Az előbbi esetben a további folytatási lehetőségek száma 1, 2, 1, 1 és 1 lesz a további éjszakákon, míg a 4 hosszú körös kezdés nem fejezhető be, mivel az utolsó két lépésnek tartalmaznia kéne a „farok” végét. Összesítve megkapjuk, hogy $10 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 240$ lehetőség van.

35. feladat Lucának van egy háromszöge, melynek oldalai 32, 50 és x egység hosszúak. Tudjuk, hogy van egy olyan ehhez hasonló háromszög, melynek két oldalhossza megegyezik Luca háromszögének két oldalhosszával, viszont nem egybevágó vele. Mennyi x lehetséges értékeinek összege?

Válasz: 27721/200

Magyarázat: Legyenek $a < b < c$ Luca háromszögének oldalhosszai. A feladatban leírtak csak akkor teljesülhetnek, ha az oldalhosszakra igaz, hogy $a : b = b : c$. Ennek ismeretében három lehetséges eset van: (1) $a = 32$, $b = 50$, ami azt jelenti, hogy $x = c = 50 \cdot \frac{50}{32}$; (2) $a = 32$, $c = 50$, ami azt jelenti, hogy $x = b = \sqrt{32 \cdot 50} = 40$; vagy (3) $b = 32$, $c = 50$, ami azt jelenti, hogy $x = a = 32 \cdot \frac{32}{50}$. Az x értékek kiszámolása után ellenőrizhetjük, hogy ezeknek az eseteknek mindegyikével kaphatunk hasonló, de nem egybevágó háromszöget. A végeredmény a három x érték összege.

36. feladat Egy futó egy szabályos 40-szög alakú futópályán edz. Az edzésterve a következő: először a sokszög egyik csúcsából az óra járásnak megfelelő irányban indulva mindig röviden megpihen a következő csúcsnál. Ezt addig folytatja, amíg vissza nem ér a kiindulóponthoz, ahol szintén pihen egy keveset. Ezután új körbe kezd, ezúttal azonban csak minden második csúcsnál áll meg pihenni, mindezt addig folytatva, míg újra meg nem áll a kiindulópontnál. Minden ilyen alkalommal az új kört kezdve eggyel megnöveli azon élek számát, melyeken pihenés nélkül végigfut. Ezt egészen addig folytatja, amíg meg nem teszi a teljes kört pihenés nélkül. Összesen hányszor állt meg pihenni a futó, ha az első kör előtt, illetve az utolsó kör után nem tartott pihenőt?

Válasz: 902

Magyarázat: Vegyük észre, hogy a futó $\frac{40}{\mathrm{LNKO}(40,a)}$ szakaszt fut le úgy, hogy a szakasz a élből áll, ahol $\mathrm{LNKO}(x, y)$ az x és y számok legnagyobb közös osztója. Az összes lehetséges $d = \mathrm{LNKO}(40, a)$-ra listázzuk az a értékeit:

- $d = 1$, ha $a \in \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 27, 29, 31, 33, 37, 39\}$
- $d = 2$, ha $a \in \{2, 6, 14, 18, 26, 34, 38\}$,
- $d = 4$, ha $a \in \{4, 12, 28, 36\}$,
- $d = 5$, ha $a \in \{5, 15, 25, 35\}$,
- $d = 8$, ha $a \in \{8, 16, 24, 32\}$,
- $d = 10$, ha $a \in \{10, 30\}$,
- $d = 20$, ha $a \in \{20\}$,
- $d = 40$, ha $a \in \{40\}$.

Az összes megtett szakasz számát megkaphatjuk, ha a $\frac{40}{d}$-t összeszorozzuk a d-hez tartozó lehetséges a-k számával, majd összegezzük a lehetséges d-kre.[1] Vagyis a kijövő szakaszok száma $40 \cdot 16 + 20 \cdot 8 + 10 \cdot 4 + 8 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 903$. Ami azt jelenti, hogy a futó 902-szer állt meg pihenni.

37. feladat Egy kocka alakú bolygón élő doktorandusz egy utazási keretet szeretne elkölteni, melyből a kocka csúcsaiban lévő egyetemek látogatását finanszírozza. A keret 2020 út megtételét fedezi, és a doktorandusznak a teljes keretet fel kell használnia. Saját egyeteméről indulva a következő úticélt mindig véletlenszerűen választja a szomszédos csúcsok közül azzal az egy kikötéssel, hogy a saját egyetemére mindaddig nem térhet vissza, amíg marad a keretből. Mi annak a valószínűsége, hogy a 2020-adik út végén éppen a saját egyetemére ér vissza?

Válasz: 2/9

Magyarázat: Nevezzük a kocka kiinduló csúcsát (ahol a doktorandusz saját egyeteme van) A-nak, a szomszédos csúcsait B_1-nek, B_2-nek és B_3-nak, ezek (A-tól különböző) szomszédos csúcsait C_1-nek és C_2-nek, az utolsó csúcsot pedig D-nek. Könnyen láthatjuk, hogy páratlan számú lépés (utazás) megtétele után csak B_i-be vagy D-be érkezhetünk, páros számú lépés megtétele után pedig csak C_i-be vagy A-ba (utóbbi nem engedélyezett a 2020-adik lépés előtt). Legyen $P_n(V)$ annak a valószínűsége, hogy n lépés után a V csúcsba érkezünk meg. Mivel a kocka szimmetrikus, bármely n érték esetén igaz, hogy $P_n(B_1) = P_n(B_2) = P_n(B_3) =: P_n(B)$, és ugyanez elmondható a C_i csúcsokról is. A szabályok alapján kiszámolhatjuk az első lépések nem nulla értékű valószínűségeit:

- $P_0(A) = 1$
- $P_1(B) = \frac{1}{3}$
- $P_2(C) = \frac{1}{3}$
- $P_3(D) = \frac{1}{3}$, $P_3(B) = \frac{2}{9}$

[1] Ez az érték kifejezhető az Euler-féle függvénnyel, mint $\varphi(40/d)$.

- $P_4(C) = \frac{1}{3}$.

Ha észrevesszük, hogy 4 lépés után ugyanaz a helyzet áll fenn, mint 2 lépés után, rájöhetünk, hogy a folyamat ismétlődik, így $P_{2019}(B) = \frac{2}{9}$. Ebből következik (mivel az utolsó lépésnél ismét lehetséges az A-ba való visszatérés), hogy

$$P_{2020}(A) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{9}.$$

38. feladat Legyen tetszőleges x valós szám és n egész szám esetén $x \star n = (2-x)^n + x^3 - 6x^2 + 12x - 5$. Határozzátok meg az összes a valós szám összegét, mely kielégíti az

$$(\dots(a \star 2020) \star 2019) \star \dots \star 2) \star 1 = a$$

egyenletet.

Válasz: 27

Magyarázat: Vegyük észre, hogy bármely valós x-re igaz, hogy $x \star 3 = 3$. Ebből könnyen kiszámolható, hogy az egyetlen megoldás $a = (3 \star 2) \star 1 = 5 \star 1 = 27$.

39. feladat Négy barát eldöntötte, hogy beiratkoznak négy elérhető tanfolyam közül valahányra. Mindegyikük legalább egy tanfolyamra beiratkozik, és pontosan egy olyan tanfolyam lesz, amire a barátok közül több mint egy ember beiratkozik. Hányféleképpen tehetik ezt meg?

Válasz: 2052

Magyarázat: A tanfolyamok legyenek 1, 2, 3, 4, a barátok A, B, C, D. Feltételezhetjük, hogy az 1-es tanfolyam az, amelyikre többen is jelentkeznek (az ezen feltételezéssel kapott eredményt 4-gyel kell szorozni a végeredményhez). A 2-es, 3-as és 4-es tanfolyamokra egyenként ötféleképpen lehet jelentkezni: A, B, C vagy D jelentkezik, vagy senki. Ez összesen $5^3 = 125$ lehetőség.

Most ezt a 125 lehetőséget csoportosítsuk aszerint, hogy hányan jelentkeztek a 2-es, 3-as és 4-es tanfolyamra. Egy olyan eset van, amikor senki nem jelentkezett, és $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ eset van, amikor hárman is jelentkeztek. Van olyan, hogy pontosan egyvalaki jelentkezett ezekre: ekkor őt magát 4-féleképp választhatjuk ki, a jelentkezett kurzusok részhalmazait pedig $2^3 - 1$ féleképpen (mivel a 2-es, 3-as és 4-es közül legalább egy kurzusra el kell mennie). Ez összesen 28 lehetőség. Az utolsó eset, amikor pontosan két barát jelentkezik a 2-es, 3-as és 4-es tanfolyamra, ezeknek a száma $125 - 1 - 24 - 28 = 72$.

Most az említett esetekhez számítsuk ki, hogy hányféleképp jelentkezhetnek a barátok az 1-es kurzusra. Aki már jelentkezett a többi valamelyikére, az szabadon eldöntheti, hogy jön-e az 1-esre is, aki viszont nem jelentkezett, annak kötelező az 1-esre jönnie. Ha 0 barát jelentkezett a többi kurzusra, akkor $2^0 = 1$ lehetőség van, ha 1 barát jelentkezett, akkor $2^1 = 2$, ha 2 barát jelentkezett, akkor $2^2 = 4$, ha viszont 3, akkor csak $2^3 - 1 = 7$, mert kizárandó az az eset, amikor a három közül senki nem jelentkezik az 1-esre. Így tehát a végeredmény: $4(1 \cdot 1 + 28 \cdot 2 + 72 \cdot 4 + 24 \cdot 7) = 2052$.

40. feladat Tekintsük az összes, pontosan 1000^{1000} jegyű pozitív egész szám összegét, melynek minden számjegye az $\{1; 2; 4\}$ halmazból kerül ki. Mi ennek az összegnak az utolsó 3 számjegye?

Válasz: 259

Magyarázat: Tegyük fel, hogy az n számban csak 1, 2 és 4 számjegy van. Cseréljük ki az 1-eseket 2-esre, a 2-eseket 4-esre, a 4-eseket 1-esre. Ezen művelet ismétlésével három különböző számot kaphatunk - a harmadik lépés után az eredetit kapjuk vissza. Az összes felsorolt n számot eszerint hármas csoportokba rendezzük, és ekkor minden csoporton belül az összeg ugyanaz a B szám lesz, ami 1000^{1000} darab 7-esből áll, mivel minden helyiértéken pontosan egy 1-est, 2-est és 4-est adunk össze. A felsorolt számok száma $3^{1000^{1000}}$, tehát a csoportok száma $3^{1000^{1000}-1}$, a keresett összeg tehát:

$$3^{1000^{1000}-1}B.$$

Mivel az utolsó 3 számjegy érdekel minket, mostantól modulo 1000 számolunk. Nyilván $B \equiv 777 \pmod{1000}$. Mivel 3 és 1000 relatív prímek, az Euler–Fermat-tételt használhatjuk. $\varphi(1000) = 400$, ami nyilván osztója 1000^{1000}-nek, ezért:

$$3^{1000^{1000}-1} \equiv 3^{-1} \pmod{1000}.$$

Itt a negatív kitevő inverzet jelent.

$$3 \cdot 333 = 999 \equiv -1 \pmod{1000}$$

Emiatt $3^{-1} \equiv -333 \equiv 667 \pmod{1000}$, tehát a keresett szám:

$$667 \cdot 777 \bmod 1000 = 259.$$

41. feladat Az ABC háromszögben az A csúcsnál lévő szög kétszer akkora, mint a B csúcsnál lévő. A háromszög mindegyik oldala egész hosszúságú és a BC oldal hossza a lehető legkisebb. Mi a háromszög oldalhosszainak szorzata?

Válasz: 120

Magyarázat: A szokásos jelölésekkel a háromszög oldalai a, b és c, a B csúcsnál lévő szög β. A szinusztétel alapján:

$$\frac{a}{\sin 2\beta} = \frac{b}{\sin \beta},$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin 2\beta}{\sin \beta} = \frac{2 \sin \beta \cos \beta}{\sin \beta} = 2 \cos \beta,$$

Ezek szerint $\cos \beta = \frac{a}{2b}$. Megint a szinusztétel, illetve trigonometriai azonosságok alapján:

$$\frac{c}{\sin(180^\circ - 3\beta)} = \frac{c}{\sin 3\beta} = \frac{b}{\sin \beta},$$

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin 3\beta}{\sin \beta} = \frac{\sin 2\beta \cos \beta}{\sin \beta} + \frac{\sin \beta \cos 2\beta}{\sin \beta} = \frac{a^2}{2b^2} + \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \pm 1 = \frac{a^2}{2b^2} + 2\cos^2 \beta - 1 = \frac{a^2}{b^2} - 1,$$

$$cb = a^2 - b^2.$$

A legkisebb a, amire ez lehetséges, és a, b és c a háromszög-egyenlőtlenséget is teljesítik, az $a = 6$, ekkor $b = 4$, $c = 5$, vagyis az oldalak szorzata 120.

42. feladat Van egy kör alakú asztal 30 székkel. Hányféleképpen tudunk néhány ülőhelyet kiválasztani (legalább egyet) ha egymás melletti helyeket nem választhatunk ki? A forgatással egymásba vihető esetek különbözőnek számítanak.

Válasz: 1860497

Magyarázat:

Legyen $A(n)$ a keresett ültetések száma általánosan n szék esetén. Az egyszerűbb levezetés kedvéért a 0 ember esetét is beszámítjuk. Megmutatjuk, hogy az alábbi rekurzió áll fenn $n \geq 5$-re:

$$A(n) = A(n-1) + A(n-2)$$

Nevezzük az $\{1, \ldots, n\}$ számok egy M részhalmazát *ciklikusan ritkának*, ha nem tartalmaz egymást követő számokat, és nem tartalmazza 1 és n közül mindkettőt. Nyilván az $\{1, \ldots, n\}$ halmaz ciklikusan ritka részhalmazainak száma $A(n)$.

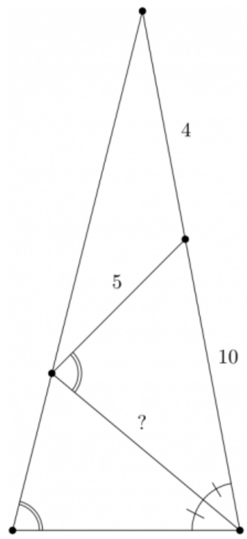
Nevezzük simán *ritkának* az olyan halmazt, ami nem tartalmaz szomszédos számokat (tehát 1 és n együttes szereplése nem tiltott), az $\{1, \ldots, n\}$ ritka részhalmazainak száma legyen $B(n)$. Ekkor $B(n)$-re érvényes a $B(n) = B(n-1) + B(n-2)$ rekurzió, mivel a $B(n)$ eset úgy áll elő, hogy $B(n-1)$ megoldás nem tartalmazza n-et, és $B(n-2)$ megoldás tartalmazza n-et.

Hasonló analízist végzünk $A(n)$-re is. Azon esetek száma, amelyek tartalmazzák n-et, $B(n-3)$, mivel ezek biztosan nem tartalmazzák 1-et és $n-1$-et, a maradék számok viszont tetszőleges ritka halmazt alkothatnak. Azon esetek száma, amelyek nem tartalmazzák n-et, pedig $B(n-1)$, mivel a többi szám tetszőleges ritka halmazt kiadhat. Vagyis:

$$A(n) = B(n-1) + B(n-3)$$

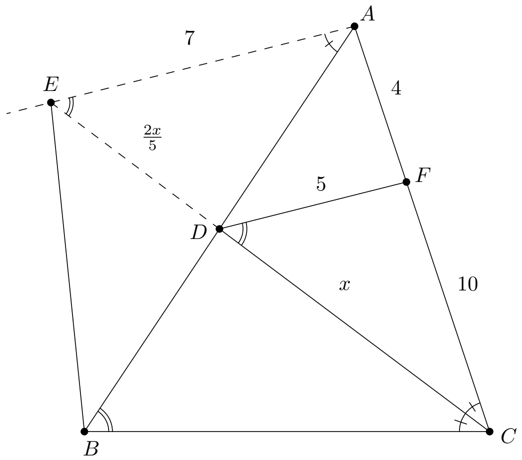
Ez bizonyítja, hogy $A(n)$-re is érvényes a felírt rekurzió, ha $n \geq 5$. Mivel $A(3) = 4$ és $A(4) = 7$, kiszámolható a többi szükséges érték. $A(30) = 1860498$, és mivel a nulla ember esetét is beszámítottuk, a végeredmény ennél 1-gyel kevesebb.

43. feladat Martin részt vett egy online dróthajtogató tanfolyamon, ahol azt a házi feladatot kapta, hogy készítse el a képen látható alakzatot. Martin emlékszik az ábrán jelölt két pár egyforma nagyságú szögre, valamint három szakasz hosszára. Sajnos a negyediket (az ábrán kérdőjellel jelölve) elfelejtette, így most nehézségei akadtak a házi feladattal. Segítsetek neki és állapítsátok meg a kérdéses szakasz hosszát!



Válasz: $5\sqrt{\frac{7}{2}} \doteq 9.354134$

Magyarázat:



Húzzunk egyenest DF-fel párhuzamosan A-n keresztül, a CD-vel való metszéspont legyen E. Jelöljük x-szel CD méretét. A $CDF \sim CEA$ hasonló háromszögek, ezért $ED = \frac{4}{10}x = \frac{2x}{5}$ és $EA = \frac{10+4}{10} \cdot 5 = 7$. Mivel $AEC\sphericalangle = FDC\sphericalangle = DBC\sphericalangle$, az $AEBC$ négyszög húrnégyszög, ezért az következik, hogy $EAB\sphericalangle = ECB\sphericalangle = ACD\sphericalangle$. Ebből $EDA \sim EAC$, vagyis:

$$\frac{\frac{2x}{5}}{7} = \frac{7}{\frac{2x}{5} + x} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{7 \cdot 5 \cdot 5}{2}} = 5\sqrt{\frac{7}{2}}.$$

44. feladat Tekintsük azokat az $f \colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ függvényeket, amelyek teljesítik a

$$f(m+n) \geq f(m) + f(f(n)) - 1$$

feltételt minden $m, n \in \mathbb{N}_+$-re. Adjátok meg $f(2020)$ összes lehetséges értékének a számtani közepét!

Válasz: 1011

Magyarázat: Azt állítjuk, hogy $f(n) \leq n+1$ minden $n \in \mathbb{N}_+$-re. Mivel $f(n+1) \geq f(n) + f(f(1)) - 1 \geq f(n)$ minden $n \in \mathbb{N}_+$-re, f monoton növekvő. Tegyük fel, hogy valamely $m \in \mathbb{N}_+$-re: $f(m) > m+1$. Más szavakkal $f(m) = m + c$ valamilyen $c \in \mathbb{N}_+$-re, ahol $c \geq 2$. Ekkor

$$f(2m) \geq f(m) + f(f(m)) - 1 = m + c - 1 + f(m+c) \geq 2m + 2(c-1) + 1$$

Alkalmazva ezt a módszert ismételten, azt kapjuk, hogy $f(2^r m) \geq 2^r m + 2^r(c-1) + 1$. Az egyenlőség és f monoton növekvő volta alapján:

$$f(2^r m + 1) \geq f(f(2^r m)) \geq f(2^r m + 2^r(c-1) + 1)$$

Ismét a monotonitás miatt: $f(2^r m + 1) = f(2^r m + 2) = \cdots = f(2^r m + 2^r(c-1) + 1)$.

Minden $k \in \mathbb{N}_+$ esetén válasszunk egy $r_k \in \mathbb{N}_+$ értéket úgy, hogy $2^{r_k}(c-1) > k$ legyen. Ekkor:

$$f(2^{r_k}m+1+k) \geq f(2^{r_k}m+1) + f(f(k)) - 1 \geq f(2^{r_k}m+1+k) + f(f(k)) - 1$$

Ebből az következik, hogy $f(f(k)) \leq 1$, vagyis $f(f(k)) = 1$ minden $k \in \mathbb{N}_+$-ra. Tehát $1 = f(f(m)) = f(m+c) \geq f(m)$ amiből $f(m) = 1$, ez pedig ellentmond az $f(m) > m+1$ feltevésünknek. Tehát bebizonyítottuk, hogy $f(n) \leq n+1$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén valóban teljesül.

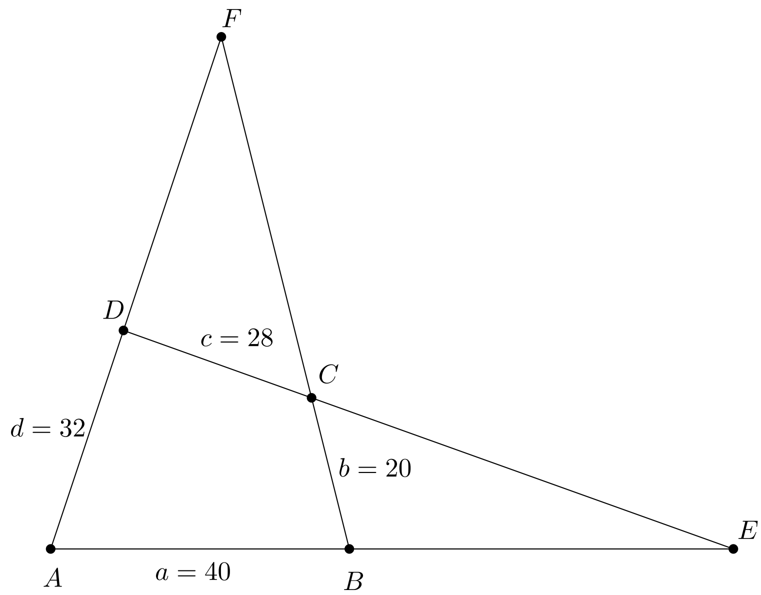
Valójában minden $N > 1$ pozitív egészre $f(N)$ értéke az $\{1, 2, \ldots, N+1\}$ halmazból bármi lehet. Ehhez először legyen $A < N$. Legyen $f_1(n) = 1$ ha $n \leq A$ és $f_1(n) = A$, ha $n > A$. Ekkor az f_1 függvény teljesíti a feltételt és $f_1(N) = A$. Másodszor, legyen $f_2(n) = n$, szintén teljesíti a feltételt és $f_2(N) = N$. Harmadszor, $f_3(n) = N\left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor + 1$, ahol $f_3(N) = N+1$ és a függvény szintén teljesíti a feltételt. Valóban,

$$f_3(m) + f_3(f_3(n)) = N\left(\left\lfloor \frac{m}{N} \right\rfloor + \left\lfloor \left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor + \frac{1}{N} \right\rfloor\right) + 2 \leq N\left(\left\lfloor \frac{m}{N} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor\right) + 2 \leq N\left\lfloor \frac{m+n}{N} \right\rfloor + 2 = f_3(m+n) + 1$$

Itt felhasználtuk azt, hogy $\left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor + \frac{1}{N} < \left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor + 1$ minden $N > 1$-re és $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor$ tetszőleges $x, y \in (0, \infty)$ valós számokra.

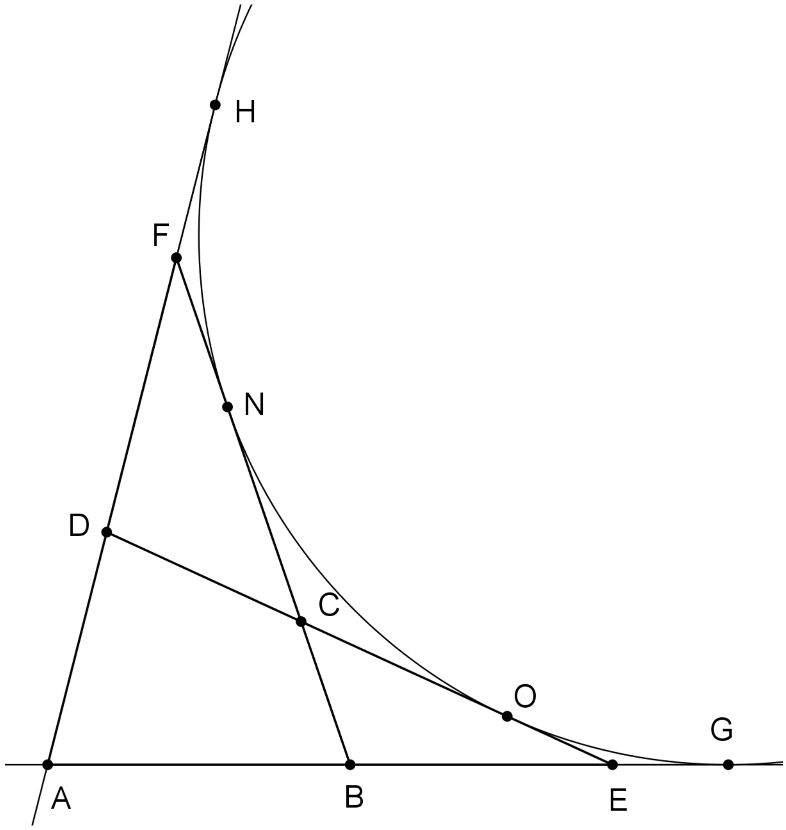
Tehát a végeredmény egyszerűen 1-től 2021-ig a pozitív egészek átlaga, vagyis $\frac{2022}{2} = 1011$.

45. feladat Károly gazda egy négyszög alakú földön gazdálkodik, amelynek oldalhosszai $a = 40$, $b = 20$, $c = 28$, $d = 32$ az ábrán látható módon. Később örököl két háromszög alakú földterületet, BEC-t és DCF-et, amelyek határosak a korábbi földjével. Ha egy 80 egység hosszú kerítés szükséges a $BE + EC$ oldalakhoz, akkor milyen hosszú kerítés kell a $CF + FD$ oldalakhoz?



Válasz: 88

Magyarázat: Először megmutatjuk, hogy a $BEC\triangle$, $AED\triangle$, $DCF\triangle$ és $ABF\triangle$ háromszögeknek közös hozzáírt köre van az EAF szögön belül.



Legyen G a $BEC\triangle$ háromszög B-vel szemközti hozzáírt körének érintési pontja AB-n! A BG távolság a háromszög félkerülete, vagyis $BG = \frac{1}{2}(CB + BE + EC)$. Legyen G' az $AED\triangle$ háromszög A-val szemközti hozzáírt körének érintési pontja AB-n. Mivel $a + b = 60 = c + d$:

$$\begin{aligned} AG' &= \frac{1}{2}(AE + ED + DA) \\ &= \frac{1}{2}(AB + BE + EC + CD + DA) \\ &= \frac{1}{2}(AB + BE + EC + AB + BC) \\ &= AB + \frac{1}{2}(BE + EC + BC), \end{aligned}$$

tehát $G = G'$. Ez azt jelenti, hogy a CE oldalon lévő érintési pontok is megegyeznek, vagyis a két háromszög hozzáírt köre ugyanaz. Ezzel analóg módon bebizonyítható, hogy $DCF\triangle$ és $ABF\triangle$ megfelelő hozzáírt körei is megegyeznek. Mind a négy kör azonos, hiszen az $EAF\sphericalangle$ és $ECF\sphericalangle$ szögfelezőjén kell, hogy legyen a középpontjuk. Mivel a körhöz húzott érintszakaszok egyenlők, $AG = AH$ alapján az $AED\triangle$ és az $ABF\triangle$ háromszögek kerületei egyenlők. Innen:

$$\begin{aligned} CF + FD &= AB + BF + FA - AB - BC - DA \\ &= AE + ED + DA - AB - BC - DA \\ &= BE + EC + CD - BC \\ &= 80 + 28 - 20 = 88. \end{aligned}$$

46. feladat Keressük meg, hogy hány $k \in \{1, \ldots, 2020\}$-re létezik az $p^3 + q^3 + r^3 = 3pqr + k$ egyenletnek olyan (p, q, r) megoldása, ahol p, q, r pozitív egész számok!

Válasz: 1568

Magyarázat: Írjuk át az egyenletet az alábbi formára:

$$p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr = \frac{1}{2}(p + q + r)\left((p - q)^2 + (q - r)^2 + (r - p)^2\right) = k.$$

Ha az utolsó zárójel nem 0, akkor legalább 2, és a p, q, r számok nem lehetnek mind egyenlők. Ezért $k \geq (1+1+2)\cdot\frac{1}{2}\cdot 2 \geq 4$. A $(p, q, r) = (n, n, n+1)$ számhármas megoldás $k = 3n+1$ esetén, minden $n \geq 1$-re. Hasonlóan, $(p, q, r) = (n, n+1, n+1)$

megoldás $k = 3n + 2$ esetén, minden $n \geq 1$-re. Ha $3 \mid k$, akkor átírjuk az egyenletet az alábbi formára:

$$k = p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr = (p + q + r)^3 - 3(p + q + r)(pq + qr + rp)$$

Innen azt láthatjuk, hogy $3 \mid p + q + r$, vagyis $9 \mid k$. Másrészről, $(p, q, r) = (n - 1, n, n + 1)$ megoldja az egyenlőtlenséget $k = 9n$ esetén, minden $n \geq 2$-re. Tehát csak a $k = 9$ eset marad eldöntetlen. Ha p, q, r páronként különbözők, akkor:

$$k = \frac{1}{2}(p + q + r)\left((p - q)^2 + (q - r)^2 + (r - p)^2\right) \geq (1 + 2 + 3)\frac{1}{2}(1 + 1 + 4) = 18$$

Ha pedig $p = q \neq r$, akkor $9 = (2p + r)(p - r)^2$, és mivel $2p + r > 1$, azt kapjuk, hogy $2p + r = 9$ és $|p - r| = 1$ ami lehetetlen, mivel akkor $r = p \pm 1$ és $9 \neq 3p \pm 1$ lenne.

Összefoglalva: minden $k \in \{1, \ldots, 2020\}$ megfelel, kivéve a 4-nél kisebb számok és 3 többszörösei, de beszámítva a 9 önmagánál nagyobb többszöröseit. Vagyis az eredmény $2020 - 3 - 672 + 223 = 1568$.