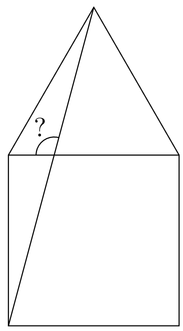
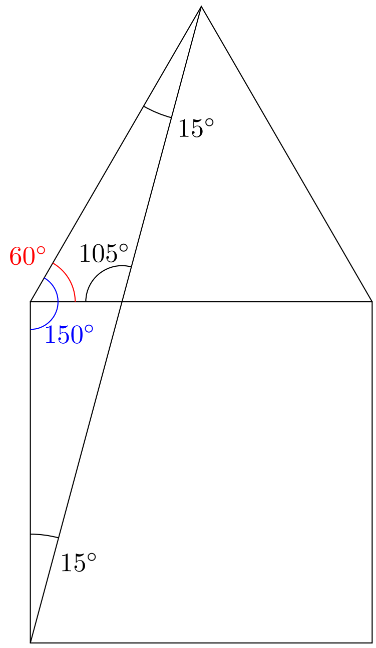
Problema 1. Diagrama unei case este formată dintr-un pătrat și un triunghi echilateral care au laturile de aceeași lungime. Care este măsura în grade a unghiului marcat?



Rezultat. 105°

Soluție. Note that the extra segment is a base of an isosceles triangle with angles 150°, 15°, 15°. The sought angle is $180° - 60° - 15° = 105°$.



Problema 2. Membrii unei echipe sportive stau așezați în linie pentru o poză și toți poartă tricouri numerotate cu numere naturale diferite. Fotograful observă că cel care stă la capătul drept al rândului are numărul 72 și fiecare număr al oricărui alt membru din echipă divide numărul vecinului din dreapta sa (marginile sunt date din punctul de vedere al fotografului). Care este numărul maxim de sportivi din echipă?

Rezultat. 6

Soluție. Starting at the rightmost number 72 and moving left, the next number always equals the former one divided by a positive integer $n > 1$. Since $72 = 2^3 \cdot 3^2$ and with each step exponent of some prime decreases, hence we can´t have more than $1 + 3 + 2 = 6$ athletes. This is attained e.g. by a sequence $1, 2, 4, 8, 24, 72$.

Problema 3. Într-un ansamblu de instrumentiști de corzi, fiecare poate cânta la vioară sau la violă și exact un sfert din ei pot cânta la ambele instrumente. Mai mult, știm că 32 cântă la vioară și 23 la violă. Câți membri sunt în grup?

Rezultat. 44

Soluție. Let n be the sought number of group members. When we add the counts 23 and 32, we obtain the total number of members, but with counting twice each member who can play both the instruments. Since there are $n/4$ such members, we infer that

$$23 + 32 = 55 = n + \tfrac{n}{4} = \tfrac{5}{4}n,$$

hence $n = 44$.

Problema 4. Cecil a înmulțit cinci numere naturale consecutive, obținând numărul C. David a făcut același lucru, dar secvența sa de numere a început cu un număr mai mare cu unu față de primul număr al Ceciliei, obținând rezultatul D. Care este cel mai mic număr din secvența lui David, știind că $C/D = 4/5$?

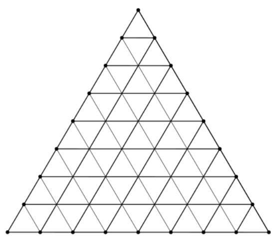
Rezultat. 21

Soluție. Assume that n is Cecil's first number, then $C = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$. David starts with $n+1$, so $D = (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$. We have

$$\frac{4}{5} = \frac{C}{D} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} = \frac{n}{n+5}.$$

Solving this equation for n leads to $n = 20$. Since we seek David's smallest number, the answer is 21.

Problema 5. Fiecărui triunghi mic îi este asociat un număr egal cu numărul de triunghiuri cu care are o latură comună. Determinați suma tuturor acestor numere.



Rezultat. 168

Soluție. There are 18 boundary triangles with two neighbours and 3 triangles with just one neighbour. The remaining $64 - 18 - 3 = 43$ triangles have three neighbours and hence the result is $3 \cdot 43 + 2 \cdot 18 + 3 = 168$.

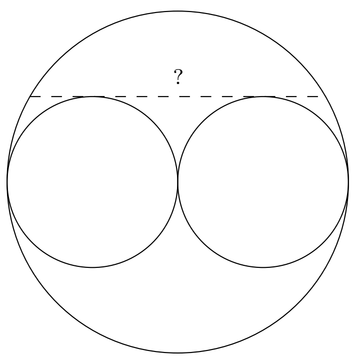
Problema 6. Determinați cel mai mare număr natural n astfel încât $n^2 - 5n + 6$ este număr prim.

Rezultat. 4

Soluție. Since for any integer n the number $n(n-5)$ is a product of odd and even numbers, we infer that $n^2 - 5n + 6 = n(n-5) + 6$ is even. Since the only even prime number is 2, we get the equation $n^2 - 5n + 6 = 2$, the solutions of which are 1 and 4. The sought largest integer is therefore 4.

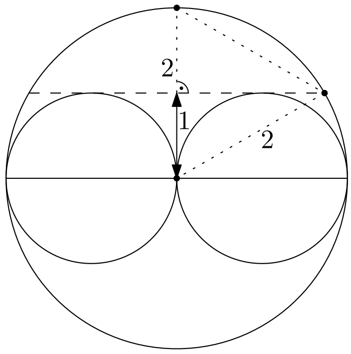
Another possible solution is to note directly that $n^2 - 5n + 6 = (n-2)(n-3)$ can be a prime number only if one of the brackets equals ± 1. Largest such number is 4 and the quadratic expression evaluated at 4 indeed yields the prime number 2.

Problema 7. Două cercuri de rază 1 sunt tangente în centrul unui cerc mare care este, de asemenea, tangent celor două cercuri mai mici, ca în figură. Determinați lungimea segmentului punctat, care este tangent celor două cercuri mici și ale cărui capete sunt pe cercul mare, ca în figură.



Rezultat. $2\sqrt{3} \doteq 3.46410$

Soluție.



The dashed segment is located 1 unit above the horizontal diameter of the big circle. The centre of the big circle, one of the endpoints of the dashed segment and the point "on the top" of the big circle thus form an isosceles triangle with vertical base and one other side of length 2. The result is thus twice the length of an altitude in the equilateral triangle of side length 2 and can be computed e.g. by the Pythagorean theorem.

Problema 8. Patru matematicieni stau în jurul unei mese și comandă un bol mare de covrigei. Daniel s-a ridicat de la masă și a plecat. În fiecare minut, Adam, Beatha și Cyril iau un covrigel, îl împart în trei bucăți egale și îl mănâncă. După un timp, Daniel se întoarce și toți continuă să mănânce un singur covrigel la fiecare minut: Daniel mănâncă 2/5 din fiecare covrigel, în timp ce ceilalți mănâncă 1/5 din fiecare covrigel. După un timp, Adam observă că Daniel a mâncat aceeași cantitate de covrigei ca și el. Care este raportul dintre timpul în care Daniel a fost absent și cel în care a fost prezent?

Rezultat. $\frac{3}{5} = 0.6$

Soluție. Let t_a be the time for which Daniel was absent and t_p the time for which he was present. Adam and Daniel ate the same amount of pretzels, so

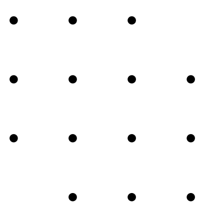
$$\frac{2}{5}t_p = \frac{1}{3}t_a + \frac{1}{5}t_p \Rightarrow \frac{t_a}{t_p} = \frac{3}{5}.$$

Problema 9. Un schimb valutar din Praga oferă următoarele monede: o monedă de 1 coroană cehă pentru 40 cenți, o monedă de 2 coroane pentru 50 cenți, o monedă de 5 coroane pentru 1 euro, o monedă de 10 coroane pentru 2 euro, o monedă de 20 coroane pentru 4.1 euro și o monedă de 50 coroane pentru 9.9 euro. Mark vrea să schimbe 11.8 euro, dar nu vrea să cumpere mai mult de o monedă de fiecare fel. Câte coroane va primi? Aflați suma tuturor soluțiilor.

Rezultat. 58

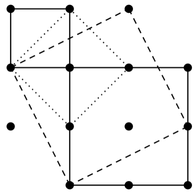
Soluție. We have to solve the equation $11.8 = 0.4 \cdot x_1 + 0.5 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 + 4.1 \cdot x_5 + 9.9 \cdot x_6$ where all x_i must be in the set $\{0, 1\}$. Since $0.4 + 0.5 + 1 + 2 + 4.1 < 11.8$, we know that x_6 must be 1. Therefore, the equation reads $1.9 = 0.4 \cdot x_1 + 0.5 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 + 4.1 \cdot x_5$. Since by choosing $x_4 = 1$ or $x_5 = 1$ the amount spent will exceed 11.8 euros, we need to set $x_4 = x_5 = 0$. Because of $0.4 + 0.5 + 1 = 1.9$, the only solution is $x_1 = x_2 = x_3 = x_6 = 1$ and $x_5 = x_4 = 0$. Therefore, Mark will get $1 + 2 + 5 + 50 = 58$ Czech crowns.

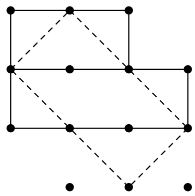
Problema 10. Într-o rețea de pătrate de latură 1 sunt marcate 14 puncte, ca în figură. Câte dreptunghiuri au ca vârfuri exact patru dintre punctele marcate?



Rezultat. 27

Soluție. Seven types of rectangles can be found in the shown part of the grid:





There are 7 unit squares, 2 squares of size 2×2, 4 squares like the one with dotted lines, and 2 like the one with dashed lines. In addition, there are 8 rectangles of size 1×2, 2 rectangles of size 1×3, and 2 rectangles like the one with the dashed lines.

Altogether, we count $7 + 2 + 4 + 2 + 8 + 2 + 2 = 27$ rectangles.

Problema 11. Care este valoarea numărului natural n pentru care cel mai mic multiplu comun al numerelor 60 și n este mai mare cu 777 decât cel mai mare divizor comun al numerelor 60 și n?

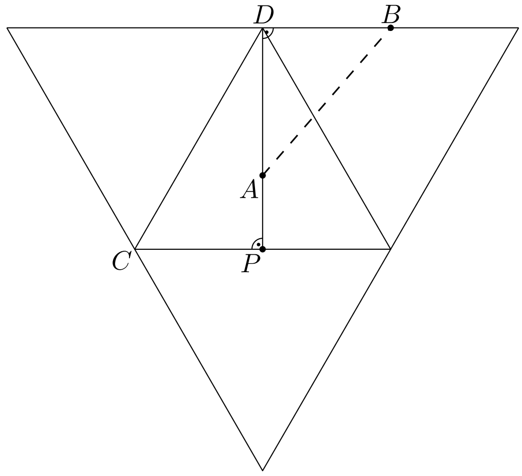
Rezultat. 39

Soluție. We wish to solve the equation $\operatorname{lcm}(60, n) = 777 + \gcd(60, n)$. The greatest common divisor must be a divisor of 60, i.e. it must be one of the numbers $1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30$, or 60. Of those divisors, only the number 3 can be added to 777 to obtain a multiple of 60. Thus $\gcd(60, n) = 3$ and $\operatorname{lcm}(60, n) = 780$. Then $60 \cdot n = 3 \cdot 780$, so $n = 39$.

Problema 12. O furnică stă în centrul unei fețe a unui tetraerdru cu lungimea muchiei 1. Mergând pe suprafața tetraedrului, furnica vrea să ajungă în mijlocul unei muchii care nu se află pe aceeași față cu fața pe care se află. Care este lungimea celui mai scurt drum pe care trebuie să îl parcurgă pentru a ajunge acolo?

Rezultat. $\sqrt{7/12} \doteq 0.76376$

Soluție.



Let us "unwrap" the surface of the tetrahedron as shown by the figure. The ant sits at the point A and want to get to B. Since the net is planar, the shortest way has to be a line segment (dashed line). We count $|PD|$ from Pythagorean theorem as $|PD|^2 = |CD|^2 - |CP|^2 = 1^2 - (1/2)^2 = 3/4$, i.e., $|PD| = \sqrt{3/4}$. Thus

$$|AD| = \frac{2}{3}|PD| = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{4}}.$$

Since $|DB| = 1/2$, we can apply Pythagorean theorem once again and compute

$$|AB|^2 = |AD|^2 + |DB|^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12},$$

which gives the answer

$$|AB| = \sqrt{\frac{7}{12}} \doteq 0.76376.$$

Problema 13. Agnieszka, Brunhilda, Cecilia și Doina au extras numerele 3, 6, 9 și 12 fără repetiție, într-o anumită ordine. (Niciun număr nu a fost extras de două sau mai multe fete.) Știm că două dintre ele mint mereu și două spun adevărul mereu. Ele au spus următoarele:

- Agnieszka: Am extras un număr de două ori mai mare decât al Doinei.
- Brunhilda: Am extras un număr de trei ori mai mare decât al Doinei.
- Cecilia: Am extras un număr de patru ori mai mare decât al Doinei.
- Doina: Nu am extras cel mai mic număr.

Care este produsul numerelor extrase de cele două fete care mint?

Rezultat. 27

Soluție. If Doina got 3, she would lie. Therefore, exactly one of the others would have to lie, which is not possible, since two ladies would have to have drawn the same number. If Doina got 9 or 12, all others would lie, since it is not possible to draw any multiple thereof, thus Doina got 6. The only one of the others who could tell the truth is Agnieszka. Thus she got 12. Therefore, the two liars are Brunhilda and Cecilia, who got 3 and 9 in some order. The product of their numbers is 27.

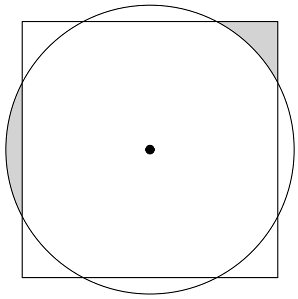
Problema 14. Determinați cel mai mic număr natural care are exact 24 de divizori pozitivi și exact 8 dintre ei sunt impari.

Rezultat. 420

Soluție. Recall that for any positive integer n with factorization $n = {p_1}^{a_1} \cdots {p_k}^{a_k}$ such that the p_i are distinct primes, the number of all positive divisors of n is equal to $(a_1 + 1) \cdots (a_k + 1)$.

Obviously, the number of odd divisors can be found by just omitting all factors 2 in the prime decomposition of n. Because $24 = 8 \cdot 3$ and with the fact that the number of odd divisors has to be 8, we get that the power of 2 must be 2. Since $2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8$, we have to consider either first powers of the three smallest prime numbers or the third power of the smallest one and the first power of the second smallest one or the 7-th power of the smallest one. But $3 \cdot 5 \cdot 7 < 3^3 \cdot 5 < 3^7$, so the smallest number n is equal to $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$.

Problema 15. Un cerc și un pătrat au același centru. Dacă regiunile de culoare gri au aceeași arie, care este raportul dintre latura pătratului și raza cercului?



Rezultat. $\sqrt{\pi} \doteq 1.77246$

Soluție. Since the grey regions have the same area, the circle and the square have the same area, because this area equals the area of the overlap plus the quadruple of the area of a single grey region. If a denotes the side length of the square and r the radius of the circle, we get $a^2 = r^2\pi$ and therefore $a : r = \sqrt{\pi}$.

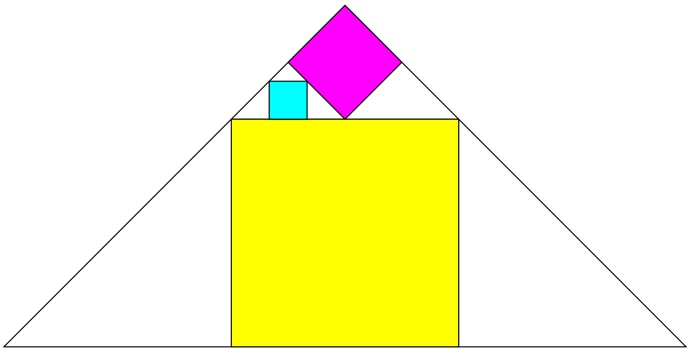
Problema 16. Lenka a scris secvența de numere $1, 2, 3, \ldots, 20$ și semnul plus sau semnul minus între oricare două numere consecutive astfel încât rezultatul obținut este egal cu 192. În câte moduri se poate obține acest rezultat ?

Rezultat. 5

Soluție. Note that one will be positive, since minuses were put only in between the numbers.

If all the signs are plus, the result is 210. She got 18 less, so she had to place a minus sign in front of numbers with combined sum 9. These are one triplet (the smallest one) $(2, 3, 4)$, three pairs $(2, 7)$, $(3, 6)$, $(4, 5)$ and the single number 9. Thus we are left with five possibilities.

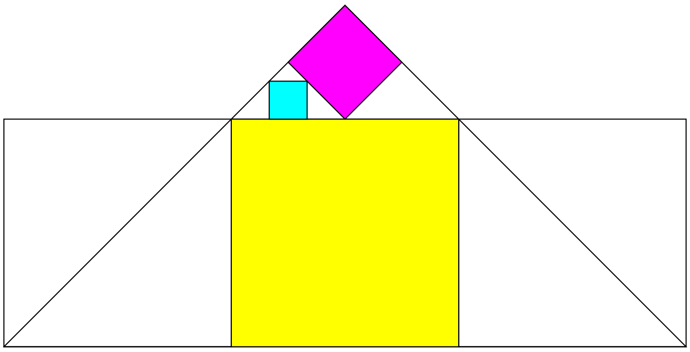
Problema 17. Trei pătrate au fost desenate într-un triunghi dreptunghic isoscel ca în figură:



Care este raportul dintre aria pătratului de culoare roz și aria triunghiului?

Rezultat. 1/81

Soluție. The key observation is that the length of the side of the yellow square is one third of the base of the triangle; this can be easily seen by extending the "outer" triangles to squares.



From this we conclude that the area ratio of the yellow square to the triangle is

$$2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Using the observation again, the side length of the cyan square is one sixth of that of the yellow square, hence their area ratio is 1/36. We get the desired ratio by multiplying these two, obtaining 1/81.

Problema 18. Determinați suma tuturor numerelor naturale nenule care nu se pot scrie sub forma $2a + 3b$, unde a și b sunt numere coprime.

Numerele naturale m și n se numesc coprime dacă $\gcd(m, n) = 1$.

Rezultat. 26

Soluție. We can easily see that we cannot get any of $1, 2, 3, 4, 6, 10$, since we have $a, b \geq 1$ and $\gcd(a, b) = 1$. On the other hand take the couples (a, b) of the form $(a, 1)$ to write all odd numbers $n \geq 5$, take $(2k-1, 2)$ to express all $n = 4l \geq 8$, and $(2k-1, 4)$ for numbers $n = 4l + 2 \geq 14$.

Therefore, the desired sum is $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 10 = 26$.

Problema 19. Un polinom se numește greu dacă admite două rădăcini întregi numere consecutive, are toți coeficienții numere întregi și suma coeficienților este 2020. Câte polinoame grele de gradul doi, $ax^2 + bx + c$, există?

Rezultat. 4

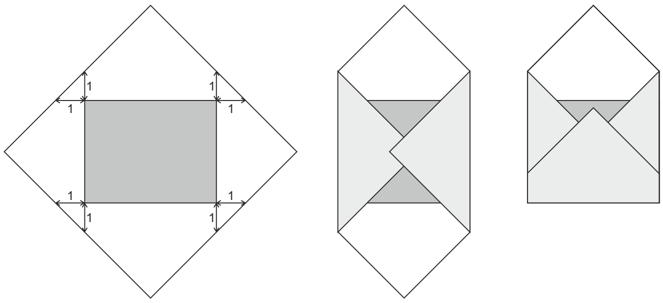
Soluție. Since the polynomial has two roots, it can be represented as $c(x-a)(x-b)$, where a, b are the integer roots and c is the leading coefficient, thus being integer as well. The sum of the coefficients is easily computed as $c(a-1)(b-1)$. Since this equals $2020 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$, and since $(a-1)$ and $(b-1)$ differ by one, we are left with four possibilities, namely $2020 = 1010 \cdot 1 \cdot 2$, $2020 = 1010 \cdot (-1) \cdot (-2)$, $2020 = 101 \cdot 4 \cdot 5$, and $2020 = 101 \cdot (-4) \cdot (-5)$.

Problema 20. Un tren este compus din 40 de vagoane numerotate de la 1 la 40, fiecare având capacitatea de 40 de pasageri. La început, era un pasager în vagonul 1, doi pasageri în vagonul 2 etc., și patruzeci de pasageri în vagonul 40. Din motive tehnice, ultimul vagon a trebuit să fie eliminat din garnitura de tren și toți pasagerii s-au mutat în vagoanele anterioare astfel: pasagerii ocupă locurile libere din vagonul anterior și când nu mai sunt locuri disponibile, restul de pasageri se deplasează în următorul vagon notat cu numărul consecutiv mai mic față de vagonul în care se află. În timpul călătoriei, probleme tehnice au avut succesiv vagoanele numerotate cu $39, 38, \ldots, 23$. Câți pasageri erau în vagonul 2 după ce și vagonul 23 a fost eliminat din garnitura de tren?

Rezultat. 19

Soluție. Note that there are altogether $40 \cdot 41/2 = 820$ passengers on the train. When the train consists of 22 carriages, its last 20 carriages have to be full, for otherwise there would have been only at most $1 + 2 + 39 + 19 \cdot 40 = 802$ passengers. This leaves 20 passengers to sit in the first two carriages and since the carriage 2 cannot be full, carriage 1 holds still only 1 passenger. It follows that there are 19 passengers in carriage 2.

Problema 21. Jacek nu poate cumpăra plicuri, așa că s-a hotărât să le facă singur. Pentru a putea face un plic dreptunghiular Jack folosește o bucată pătrată de hârtie cu diagonală egală cu 30 cm, îndoaie colțurile din stânga și dreapta, apoi îndoaie colțul de jos, iar pentru a închide plicul, îndoaie colțul de sus. Pentru a putea să lipească corect părțile îndoite, el trebuie să suprapună părțile îndoite pe 1 cm, ca în figură, și după închiderea plicului, vârful superior nu trebuie să se suprapună sub marginea inferioară a plicului. Care este lățimea maximă a plicului?



Rezultat. 18

Soluție. Let the side lengths of the envelope be a and b, and the diagonal of the square be equal to d. Looking at the diagonal of the square, we can see that $d = b + a + 2$. In order to fold properly, the inequality $\frac{1}{2}b + 1 \leq a$ must hold. Together it gives $b \leq \frac{2}{3}d - 2$.

Problema 22. Martha a ales trei numere naturale nenule a, b, c și a calculat sumele $a + b$, $b + c$, $c + a$, obținând trei numere pătrate perfecte distincte. Care este cea mai mică valoare a sumei $a + b + c$?

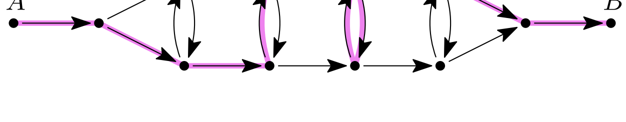
Rezultat. 55

Soluție. Let $a + b = d^2$, $b + c = e^2$, $c + a = f^2$ for (necessarily distinct) positive integers d, e, f. WLOG $d < e < f$ and since Martha's numbers are positive,

$$d^2 + e^2 = a + c + 2b > a + c = f^2. \tag{$\heartsuit$}$$

Moreover, the sought value equals $(d^2 + e^2 + f^2)/2$. Hence we are looking for a triple of squares satisfying ($\heartsuit$) and having its sum even and minimal at the same time. Such a triple is $(d^2, e^2, f^2) = (25, 36, 49)$ and the answer is 55.

Problema 23. În diagrama următoare, câte drumuri sunt de la punctul A la punctul B astfel încât fiecare săgeată să fie folosită cel mult o dată? (Un astfel de drum este desenat cu culoarea violet.)



Rezultat. $162 = 2 \cdot 3^4$

Soluție. The path is completely determined by the following choices: First go either up or down (2 options) and then for each of the 4 vertical pairs of nodes: either do not use any vertical arrow, or use one of them, or use both (3 options each). Hence the answer is $2 \cdot 3^4 = 2 \cdot 81 = 162$.

Problema 24. Câte numere naturale de patru cifre, cu proprietatea că oricare două cifre alăturate diferă prin 3, există? Un număr nu poate începe cu zero.

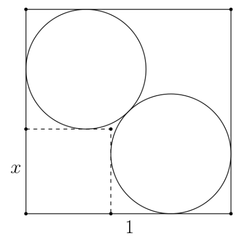
Rezultat. 29

Soluție. We code the numbers in the following way: we write U if the right digit is bigger than the left one and D if the right digit is smaller than the left one, e.g. 1474 is encoded as UUD and 1414 UDU. There are eight possible codes in total and for each of them the corresponding number is determined by the first digit:

code	UUU	UUD	UDU	UDD	DUU	DUD	DDU	DDD
possible first digits	none	1–3	1–6	3–6	3–6	3–9	6–9	9

In total, there are $3 + 6 + 4 + 4 + 7 + 4 + 1 = 29$ sought numbers.

Problema 25. Două cercuri identice sunt tangente între ele și tangente la două laturi ale unui pătrat de latură de lungime 1, ca în figură. Determinați lungimea laturii pătratului desenat punctat în figură, pătrat care este tangent cercurilor și are un vârf comun cu pătratul mare.



Rezultat. $\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$

Soluție. Let x be the side length of the small circle. The radii r of the circles are $\frac{1-x}{2}$. The diagonal of the unit square is divided by the centres of the circles and their point of tangency into four segments. Two of them are the radii and two of them are diagonals in squares of sides r. Altogether, we have

$$\sqrt{2} = 2r + 2\sqrt{2}r = (1 - x)(1 + \sqrt{2})$$

and solving this equation gives $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$.

Problema 26. Numerele reale $x_1, x_2, \ldots, x_{2020}$ au proprietățile:

- mereu suma tuturor numerelor cu excepția unui număr x_i cu i impar, este 2.
- mereu suma tuturor numerelor cu excepția unui număr x_i cu i par, este 0.

Care este valoare sumei $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2020}$?

Rezultat. 2020/2019

Soluție. If we sum all the given equations, we obtain

$$2019(x_1 + x_2 + \cdots + x_{2020}) = 1010 \cdot 2 + 1010 \cdot 0 = 2020,$$

so the sought result is 2020/2019.

Problema 27. Doi jucători joacă un joc, alternând mutările. Fiecare mutare constă în schimbarea unui număr natural n într-un alt număr natural din intervalul $[\frac{n}{3}, \frac{n}{2}]$. Un jucător care nu poate muta pierde. Pentru câte dintre numerele din intervalul $[1, 1000]$ folosite ca numere de începere a jocului, primul jucător câștigă jocul folosind strategii optime?

Rezultat. 620

Soluție. Let us call *winning* the numbers for which there exists a strategy guaranteeing victory, and the rest of the numbers *losing*. Observe that a number n is winning if and only if there is a losing number in the interval $[\frac{n}{3}, \frac{n}{2}]$; on the other hand, a number n is losing if and only if every number from the interval $[\frac{n}{3}, \frac{n}{2}]$ is winning (which includes the option that there is actually no integer in that interval).

Clearly, 1 is a losing number, so according to the rules above, 2 and 3 are winning. This in turn implies that the numbers $4, \ldots, 7$ are losing, since for each of these numbers we have $[\frac{n}{3}, \frac{n}{2}] \cap \mathbb{N} \subseteq \{2, 3\}$. Next we get that $8, \ldots, 21$ are winning etc. Continuing in the fashion, we obtain additional winning numbers $44, \ldots, 129$, $260, \ldots, 777$. Altogether there are 620 winning numbers.

Problema 28. Două cercuri cu diametrele $AB = 17$ și $AC = 7$ se intersectează în punctele A și D. Cunoaștem $CD = 4$. Considerând toate distanțele posibile dintre centrele celor două cercuri, determinați produsul acestor distanțe.

Rezultat. 60

Soluție. Thales theorem yields two right angles at the point D so the points B, C and D lie on one line. From the Pythagorean theorem we compute $BD^2 = 17^2 - (7^2 - 4^2) = 16^2$ and thus $BC = 16 \pm 4$ (indeed, the right angles can be either identical or form a straight line). Connecting the centres of the circles we obtain a similar (with ratio $\frac{1}{2}$) triangle with ABC and thus the desired distance equals either $20/2 = 10$ or $12/2 = 6$ and the desired product is 60.

Problema 29. Șapte autobuze parcurg un traseu ce are 14 stații. Fiecare autobuz pleacă dintr-o stație oarecare și se deplasează într-o singură direcție, spre unul dintre cele două capete de traseu, unde întoarce și se deplasează spre celălalt capăt. Fiecare autobuz păstrează viteza constantă și trece printr-o stație la fiecare minut. MSc Birne a plasat autobuzele astfel încât

1. există cel mult un autobuz în fiecare stație și,
2. există cel mult un autobuz în fiecare stație la fiecare minut, indiferent de direcția de mers.

În câte moduri se poate face plasarea autobuzelor în stații? Autobuzele sunt considerate identice.

Rezultat. 20

Soluție. The trolleybuses must not be in a distance of two stations. Obviously odd and even stations are independent and also obviously, both can accommodate at most 4 trolleybuses. Thus one has to accommodate 3 and the other 4, so the solution is $2 \cdot N$, where N is the number of ways in which 3 stones could be placed at seven places in a row such that they are separated by a free spaces. We first place the four free spaces in a line and then we place the three stones in between the free spaces. The first stone has 5 possibilities, the second 4 and the third 3, since the stones are indistinguishable the result reads $N = (5 \cdot 4 \cdot 3)/(3 \cdot 2 \cdot 1) = 10$. The final answer is therefore $2 \cdot 10 = 20$

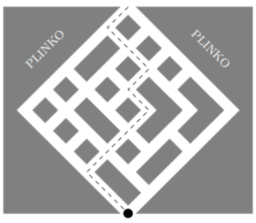
Problema 30. Marian a scris o carte de 2020 pagini numerotate $1, 2, 3, \ldots 2020$. După revizuire, a adăugat un rezumat de 11 pagini la începutul cărții. Câte cifre trebuie să rescrie astfel încât fiecare pagină să aibă numărul corect? Noile cifre scrise, cum ar fi cifra 1 care apare în schimbarea numărului 95 în 106, nu se numără.

Rezultat. 4251

Soluție. First, let us calculate how many digits will remain the same. It is easy to see that for every one or two digit number the operation $+11$ will not leave any digit intact. So every digit that will be intact has to be on position of hundreds or thousands. If the last two digits of a page are labelled from 00 to 88, the first two digits will be intact. This is the case for the hundreds digit for 89 numbers in each range of hundred. In addition, for every number from 1000 to 1988 we have one more stable digit—the thousand digit. So, considering all numbers up to 1999, we have $19 \cdot 89 + 989 = 2680$ digits that remain the same. From 2000 to 2020, there are 21 numbers that will not change their hundred or thousand digit which gives $2 \cdot 21 = 42$ stable digits. Hence $2680 + 42 = 2722$ digits remain the same.

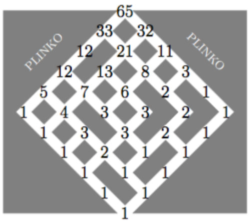
Now, how many digits are there in total? From 1 to 9 there are 9 digits. From 10 to 99 there are $90 \cdot 2$ digits. From 100 to 999 there are $900 \cdot 3$ digits and from 1000 to 2020 there are $1021 \cdot 4$ digits. So there are 6973 digits overall. Therefore, $6973 - 2722 = 4251$ digits have to be changed.

Problema 31. O biluță alunecă din partea de sus a cutiei de plinko până ajunge în partea de jos a cutiei, unde iese. Câte drumuri posibile există? Un exemplu este reprezentat în desen.



Rezultat. 65

Soluție. We label each intersection point with the number of paths the puck can take from that point on. We start from the bottom of the box where there is only 1 path, and work our way up. Each number is the sum of the number or numbers immediately below it.



Problema 32. Regele și cei 100 de cavaleri ai săi se așează la o masă rotundă. Vegetarienilor li se servește brânză iar tuturor celorlalți li se servește pui. Doar că regele are o porție mai mică de pui decât a cavalerului din stânga, așa că poruncește tuturor să dea farfuria lor celor din partea dreaptă. Acum regele are o porție rezonabilă de pui, dar 64 de cavaleri au meniurile greșite, așa că fiecare oferă din nou farfuria celui din dreapta sa. Din nou regele are o porție mai mică de pui decât a cavalerului din stânga, așa că fiecare își oferă farfuria pentru a treia oară celui din dreapta. Acum doar 2 cavaleri (și nu regele) au meniul greșit, așa că fac schimb de locuri între ei și începe sărbătoarea. Câți cavaleri ai regelui au mâncat pui?

Rezultat. 68

Soluție. Notice that the king and the three knights to his left were all served chicken. So after the third pass, the first vegetarian meal to the king's left was passed to a meat-eater, and the first vegetarian to the king's right received meat. These are the two knights who had to trade places.

$$\mathrm{V}\quad \mathrm{M}\quad \mathrm{M}\quad \mathrm{M}\quad \mathrm{M}\quad \cdots\quad \mathrm{M}\quad \mathrm{V}$$

Everyone else was served the same dish as the person 3 places to their left, so the seating arrangement was

$$\cdots\ \mathrm{M}\ \mathrm{M}\ \mathrm{V}\ \mathrm{M}\ \mathrm{M}\ \mathrm{V}\ \mathrm{M}\ \mathrm{M}\ \mathrm{M}\ \mathrm{M}\cdots\mathrm{M}\ \mathrm{V}\ \mathrm{M}\ \mathrm{M}\ \mathrm{V}\ \mathrm{M}\ \mathrm{M}\ \mathrm{V}\ \cdots$$

Then every vegetarian and every meat-eater to the right of a vegetarian had the wrong meal after the first pass. So there are $64/2 = 32$ vegetarians. The remaining $100 - 32 = 68$ knights (as well as the king) ate chicken.

Problema 33. David vrea să deseneze un triunghi ABC și punctele D, E pe laturile AB și, respectiv BC, astfel încât triunghiurile ABC, AEC, ADE, BDE sunt asemenea. Care este suma tuturor măsurilor posibile ale unghiului BAC, măsurate în grade?

Rezultat. 150

Soluție. All angles have to be α, β or γ (standard notation for angles of ABC). Obviously angle EAC equals β and AEC equals α. Angles EDA and EDB make up $180°$, so they have to be the same, so either α or γ is equal to $90°$. An easy check gives that the first possibility does not lead to an impossible configuration and the second one gives $\alpha = 60°$. Thus the result is $90° + 60° = 150°$.

Problema 34. Cinci lucrători pe tura de noapte doresc să își programeze schimburile pentru următoarele 10 nopți astfel încât în fiecare noapte exact doi muncitori să lucreze, iar aceștia să nu lucreze noaptea următoare. Câte programări care să conțină fiecare posibilă pereche de muncitori se pot face?

Rezultat. 240

Soluție. Let us draw the workers as nodes in a diagram, where a segment between two nodes represent the shift of the two workers. We are looking for the number of ways to draw all the $5 \cdot 4/2 = 10$ segments so that no two subsequent segments have a common node. The first segment can be chosen in 10 ways, the second in 3 ways and in the next two steps we always have two choices. However, no matter what choices we do, we get essentially the same situation, i.e. we can get any sequence of choices from any other by renumbering the nodes. The fifth choice may lead to two different outcomes: Either we obtain a cycle of five segments, or a cycle of four segments with a "tail". The former option leads to 1, 2, 1, 1, and 1 choices in the following steps, whereas the latter option cannot be completed in a valid way, since the final two segments would have to contain the "end of the tail". We conclude that there are

$$10 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 240$$

possible time schedules.

Problema 35. Lucia are un triunghi cu lungimile laturilor 32, 50, și x. Mai mult, există un triunghi asemenea cu acesta, dar nu congruent, care are două lungimi de laturi egale cu două lungimi de laturi ale triunghiului Luciei. Determinați suma tuturor valorilor posibile ale lui x.

Rezultat. 27721/200

Soluție. Let $a < b < c$ be the side lengths of Lucy's triangle. The situation described in the statement can happen only when lengths satisfy $a : b = b : c$. Now there are three options: (1) $a = 32$, $b = 50$, which leads to $x = c = 50 \cdot \frac{50}{32}$; (2) $a = 32$, $c = 50$, which leads to $x = b = \sqrt{32 \cdot 50} = 40$; (3) $b = 32$, $c = 50$, leading to $x = a = 32 \cdot \frac{32}{50}$. It is easy to check that none of these situations violate the triangle inequality. The result is the sum of the three values.

Problema 36. Un alergător se antrenează pe o pistă în formă de poligon regulat cu 40 de laturi. Antrenamentul său constă în următoarele: la început, aleargă în sensul acelor de ceas dintr-un vârf inițial în vârful adiacent unde ia o pauză. Continuă în această manieră până când ajunge în vârful inițial unde ia o pauză. Apoi, el începe să alerge din nou, dar de această dată se oprește pentru pauză după fiecare două laturi parcurse până când ajunge în vârful inițial pentru pauză. El continuă să alerge astfel, mărind sprintul cu o latură după fiecare pauză din vârful inițial. Câte pauze face alergătorul înainte de a face un sprint pe toate cele 40 de laturi fără pauze? Nu există pauză la începutul sau după terminarea acestui sprint.

Rezultat. 902

Soluție. Let us observe that the runner does exactly $\frac{40}{GCD(40,a)}$ steps (runs) of size a edges where $GCD(x, y)$ stands for the greatest common divisor of positive integers x, y. For all possible numbers $d = GCD(40, a)$ (divisors of 40) we list the possible values of a:

- $d = 1$ for $a \in \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 27, 29, 31, 33, 37, 39\}$,
- $d = 2$ for $a \in \{2, 6, 14, 18, 26, 34, 38\}$,
- $d = 4$ for $a \in \{4, 12, 28, 36\}$,
- $d = 5$ for $a \in \{5, 15, 25, 35\}$,
- $d = 8$ for $a \in \{8, 16, 24, 32\}$,
- $d = 10$ for $a \in \{10, 30\}$,
- $d = 20$ for $a \in \{20\}$,
- $d = 40$ for $a \in \{40\}$.

The total number of steps can now be obtained by summing the products of $\frac{40}{d}$ and the size of the set on the respective row[1] above. We obtain $40 \cdot 16 + 20 \cdot 8 + 10 \cdot 4 + 8 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 903$. It means that the runner rested 902 times.

Problema 37. Un doctorand ce locuiește pe o planetă de formă cubică are de cheltuit un buget de călătorii pentru a vizita universități ce se găsesc situate în vârfurile cubului. Bugetul acoperă 2020 de călătorii și trebuie cheltuit în totalitate. Doctorandul începe vizitarea universităților cu cea din orașul în care locuiește și de acolo pleacă în prima excursie spre unul din vârfurile învecinate (pe aceeași latură a cubului). Întotdeauna își alege următoarea universitate în mod aleatoriu cu singura condiție de a nu se întoarce acasă mai devreme de excursia 2020. Care este probabilitatea să ajungă acasă în excursia 2020?

Rezultat. 2/9

Soluție. Let us denote the initial vertex (i.e. the home university) by A, its neighbours by B_1, B_2 and B_3, their neighbours (different from A) by C_1, C_2 and C_3 and finally the last vertex by D. It is easy to see that after an odd number of steps (i.e. trips) the only possible positions are B_i or D and after an even number only C_i or A (which is not allowed before the 2020-th step) are possible. Let us denote $P_n(V)$ the probability of reaching vertex V after the n-th step. Due to symmetry, we have $P_n(B_1) = P_n(B_2) = P_n(B_3) =: P_n(B)$ for every n and analogously for vertices C_i. The only non-zero probabilities in the first steps are easy to compute by the given rules:

- $P_0(A) = 1$
- $P_1(B) = \frac{1}{3}$
- $P_2(C) = \frac{1}{3}$
- $P_3(D) = \frac{1}{3}$, $P_(B) = \frac{2}{9}$

[1]these sizes can be expressed using Euler's totient function as $\varphi(40/d)$.

- $P_4(C) = \frac{1}{3}$.

Observing that after 4 steps the situation is identical to the one after 2 steps, we infer that the process is periodic and $P_{2019}(B) = \frac{2}{9}$, hence (now returning to A is again possible)

$$P_{2020}(A) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{9}.$$

Problema 38. Definim operația $x \star n = (2-x)^n + x^3 - 6x^2 + 12x - 5$ pentru orice număr real x și un număr natural n. Determinați sima tuturor numerelor reale a care verifică ecuația

$$(a \star 2020) \star 2019) \star \cdots \star 2) \star 1 = a.$$

Rezultat. 27

Soluție. Noticing that $x \star 3 = 3$ for any real x we easily compute that $a = (3 \star 2) \star 1 = 5 \star 1 = 27$ is the only solution.

Problema 39. Patru prieteni se hotărăsc să participe la unul dintre cele patru cursuri diferite disponibile. Ei decid ca fiecare dintre ei să participe la cel puțin un curs și să existe exact un curs la care să participe mai mult de unul dintre ei. În câte moduri pot să facă acest lucru?

Rezultat. 2052

Soluție. Let us label the courses 1, 2, 3 and 4 while the friends A, B, C and D. Let us assume that course 1 is the one which is selected by more than one of them (after calculating the result with this assumption, it will only need to be multiplied by 4). Therefore we have only five ways of assigning course 2 (now it can be chosen by A, B, C and D or nobody). Similarly, we have five ways of assigning courses 3 and 4. On summary, there are $5^3 = 125$ ways of assigning these three courses. In one of these possibilities, no friends got no courses; in $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ possibilities, three of the friends got one course each.

Now, we have to calculate how many possibilities are there for exactly one student to get some courses. There are 4×3 possibilities where one of them got exactly one course and the remaining two courses were null (chosen by nobody); 4×3 possibilities where one of them chose exactly two courses and one course was null; and 4 possibilities where one of them got all three considered courses. In total, this gives $4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 4 = 28$ possibilities. It also means that there are $125 - 1 - 24 - 28 = 72$ possibilities for exactly two students to get some courses.

Having discovered that, we can get back to assigning course 1, the last of them, which is also the only multiple one. We know that every student without previous choices has to get this one, while every student with previous choices can get it or not, provided that there are at least two students with this course. It means that there is exactly 1 way of assigning course 1 if no students have previous courses; exactly 2 ways if one student has previous courses; exactly 4 ways if two students have previous courses; exactly 7 ways if three students have previous courses (seven because at least one of these three students has to choose course 1 nevertheless). This renders the final calculation: $4(1 \cdot 1 + 28 \cdot 2 + 72 \cdot 4 + 24 \cdot 7) = 2052$.

Problema 40. Considerăm suma tuturor numerelor care au exact 1000^{1000} cifre, toate cifrele fiind doar 1, 2, sau 4. Care sunt ultimele trei cifre ale acestei sume?

Rezultat. 259

Soluție. Let n be a number consisting only of digits 1, 2, and 4. If we replace all its digits 1 by 2, all 2 by 4, and all 4 by 1, we obtain another number having only these digits, and applying this operation two more times produces the original number n. Let us group all the summed numbers into triples, in which the numbers can be obtained from each other using this cyclic substitution.The sum of every such triplet is equal to the number B consisting of 1000^{1000} digits 7, because each digit is the sum of 1, 2, and 4 in some order. The total number of summed numbers is $3^{1000^{1000}}$, hence the number of triplets is $3^{1000^{1000}-1}$ and the sum in question is thus equal to

$$3^{1000^{1000}-1}B.$$

Since we are interested only in last three digits, let us compute remainders modulo 1000. Clearly, $B \equiv 777 \pmod{1000}$. Furthermore, as 3 and 1000 are coprime we may use Euler's Theorem to handle the large power of 3: We have $\varphi(1000) = 400$, which is clearly a divisor of 1000^{1000}, hence

$$3^{1000^{1000}-1} \equiv 3^{-1} \pmod{1000},$$

where the negative exponent stands for modular inverse. Since

$$3 \cdot 333 = 999 \equiv -1 \pmod{1000},$$

we conclude that the modular inverse of 3 is $-333 \equiv 667 \pmod{1000}$. Therefore, our sought number is

$$667 \cdot 777 \bmod 1000 = 259.$$

Problema 41. În triunghiul ABC, măsura unghiului din vârful A este de două ori mai mare decât măsura unghiului din vârful B. Toate lungimile laturilor sunt numere naturale și lungimea laturii BC este cea mai mică. Care este produsul lungimilor laturilor acestui triunghi?

Rezultat. 120

Soluție. Denoting the lengths of sides a, b and c in a usual way and β the angle by B. Form the sine law we get

$$\frac{a}{\sin 2\beta} = \frac{b}{\sin\beta},$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin 2\beta}{\sin\beta} = \frac{2\sin\beta\cos\beta}{\sin\beta} = 2\cos\beta,$$

which gives the value of $\cos\beta = \frac{a}{2b}$. Again from the sine law, trigonometric equalities and calculated value of $\cos\beta$ we get now

$$\frac{c}{\sin(180^\circ - 3\beta)} = \frac{c}{\sin 3\beta} = \frac{b}{\sin\beta},$$

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin 3\beta}{\sin\beta} = \frac{\sin 2\beta\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{\sin\beta\cos 2\beta}{\sin\beta} = \frac{a^2}{2b^2} + \cos^2\beta - \sin^2\beta \pm 1 = \frac{a^2}{2b^2} + 2\cos^2\beta - 1 = \frac{a^2}{b^2} - 1,$$

$$cb = a^2 - b^2.$$

The smallest a for which there exist b and c satisfying this equation and being the side lengths of a triangle is $a = 6$, with $b = 4$ and $c = 5$. Thus, the product of the side lengths is 120.

Problema 42. În câte moduri pot câțiva oameni (cel puțin unul) să se așeze în jurul unei mese rotunde cu 30 de scaune astfel încât să nu fie două persoane una lângă alta? Aranjările care diferă prin rotație se consideră diferite.

Rezultat. 1860497

Soluție. Let $A(n)$ be the number of such arrangements for a table with n seats; for convenience, we will also include the arrangement of zero people in this number. We will prove the recurrence relation

$$A(n) = A(n-1) + A(n-2), \tag{R}$$

for $n \geq 5$. Let us call a subset M of $\{1, \dots, n\}$ *cyclically sparse* if it contains no consecutive numbers and does not contain 1 and n at the same time. Clearly, $A(n)$ is equal to the number of cyclically sparse subsets of $\{1, \dots, n\}$.

Let $B(n)$ be the number of *sparse* subsets of $\{1, \dots, n\}$, i.e. those not containing consecutive numbers (there is no condition on 1 and n). Then $B(n)$ satisfies the relation $B(n) = B(n-1) + B(n-2)$ — indeed there are $B(n-1)$ such subsets not containing n and $B(n-2)$ such subsets containing n.

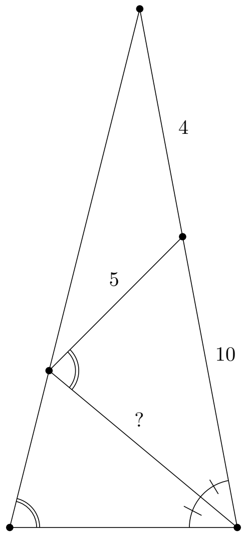
Let us perform a similar analysis on $A(n)$: The number of cyclically sparse subsets containing n is equal to $B(n-3)$, because such a subset does not contain 1 and $n-1$, while the rest of the elements form any sparse subset of $\{2, \dots, n-2\}$. Further, if a cyclically sparse subset does not contain n, then the remaining elements may form any sparse subset of $\{1, \dots, n-1\}$. Therefore

$$A(n) = B(n-1) + B(n-3),$$

a relation which holds for any integer $n \geq 3$. Since the (shifted) sequences $B(n-1)$ and $B(n-3)$ satisfy the desired relation, so does their sum $A(n)$, hence we have proved (R) for $n \geq 5$.

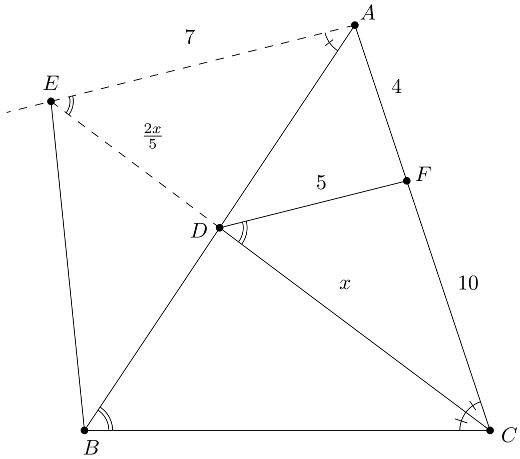
It is easy to see that $A(3) = 4$ and $A(4) = 7$. Using (R), we can now compute all further values, in particular $A(30) = 1860498$. Since the statement excludes the possibility of the empty table, the result is one less.

Problema 43. Martin a participat la un curs online de îndoire a sârmei și a primit ca temă fabricarea construcției din imagine. El și-a amintit cele două perechi de unghiuri de aceeași măsură și lungimile a trei dintre segmente. Din păcate, el a uitat lungimea segmentului notat pe desen cu “?” și de aceea se chinuie acum la această temă. Ajută-l să determine lungimea acestui segment.



Rezultat. $5\sqrt{\frac{7}{2}} \doteq 9.354134$

Soluție.



Let us draw a line parallel to DF through point A as in the figure and denote its intersection with the line CD by E. Denoting x the desired length CD, we conclude from similar triangles $CDF \sim CEA$ that $ED = \frac{4}{10}x = \frac{2x}{5}$ and $EA = \frac{10+4}{10} \cdot 5 = 7$. Since $\angle AEC = \angle FDC = \angle DBC$, the quadrilateral $AEBC$ is cyclic. It follows in turn that $\angle EAB = \angle ECB = \angle ACD$. Hence $EDA \sim EAC$ and thus

$$\frac{\frac{2x}{5}}{7} = \frac{7}{\frac{2x}{5} + x} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{7 \cdot 5 \cdot 5}{2}} = 5\sqrt{\frac{7}{2}}.$$

Problema 44. Se consideră funcția $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ce satisface condiția

$$f(m+n) \geq f(m) + f(f(n)) - 1$$

pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$. Determinați media aritmetică a tuturor valorilor posibile ale lui $f(2020)$.

Rezultat. 1011

Soluție. We claim that $f(n) \leq n+1$ for all $n \in \mathbb{N}$. Since $f(n+1) \geq f(n) + f(f(n)) - 1 \geq f(n)$ for any $n \in \mathbb{N}$, f is non-decreasing. Assume that

$$f(m) > m+1 \quad \text{for some } m \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

in other words $f(m) = m + c$ for some $c \in \mathbb{N}$, $c \geq 2$. Then

$$f(2m) \geq f(m) + f(f(m)) - 1 = m + c - 1 + f(m+c) \geq 2m + 2(c-1) + 1$$

and by applying this argument inductively we get $f(2^r m) \geq 2^r m + 2^r(c-1) + 1$. Combining this inequality, the one from statement and the fact that f is non-decreasing, we obtain

$$f(2^r m + 1) \geq f(f(2^r m)) \geq f(2^r m + 2^r(c-1) + 1),$$

so again by the monotonicity $f(2^r m+1) = f(2^r m+2) = \cdots = f(2^r m + 2^r(c-1)+1)$. For all $k \in \mathbb{N}$ choose $r_k \in \mathbb{N}$ such that $2^{r_k}(c-1) > k$. Then

$$f(2^{r_k}m+1+k) \geq f(2^{r_k}m+1) + f(f(k)) - 1 \geq f(2^{r_k}m+1+k) + f(f(k)) - 1$$

and hence $f(f(k)) \leq 1$ meaning $f(f(k)) = 1$ for all $k \in \mathbb{N}$. Hence also $1 = f(f(m)) = f(m+c) \geq f(m)$ and hence $f(m) = 1$ contradicting the assumption (1). Hence indeed $f(n) \leq n+1$ for all $n \in \mathbb{N}$.

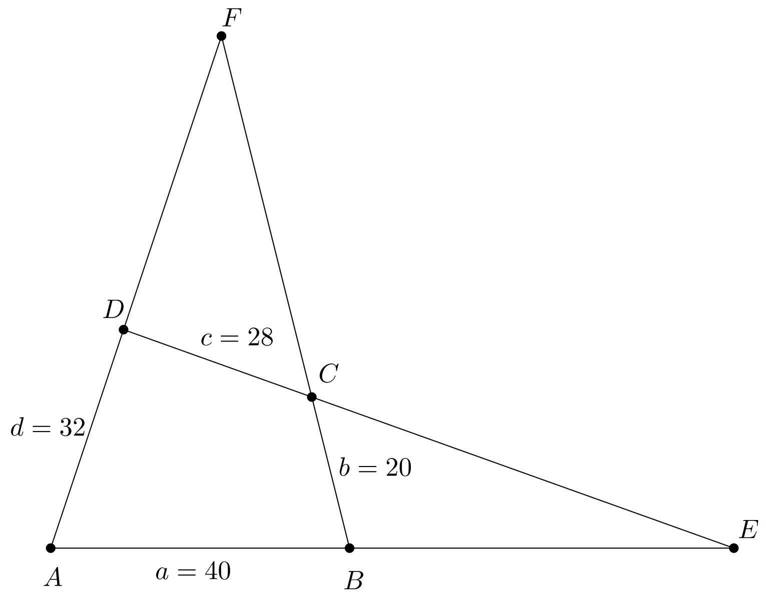
In fact, for a given positive integer $N > 1$, the value $f(N)$ can be any element of the set $\{1, 2, \ldots, N+1\}$. To see this, let first $A < N$. Define $f_1(n) = 1$ if $n \leq A$ and $f_1(n) = A$ if $n > A$. The function f_1 satisfies the condition and $f_1(N) = A$. Secondly, the function $f_2(n) = n$ also satisfies the condition and $f_2(N) = N$. Lastly, the function $f_3(n) = N\left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor + 1$ gives $f_3(N) = N+1$ and it also satisfies the condition. Indeed, we have

$$f_3(m) + f_3(f_3(n)) = N\left(\left\lfloor \frac{m}{N} \right\rfloor + \left\lfloor \left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor + \frac{1}{N} \right\rfloor\right) + 2 \leq N\left(\left\lfloor \frac{m}{N} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor\right) + 2 \leq N\left\lfloor \frac{m+n}{N} \right\rfloor + 2 = f_3(m+n) + 1$$

where we used that $\left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor + \frac{1}{N} < \left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor + 1$ for $N > 1$ and that $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor$ for any real numbers $x, y \in (0, \infty)$.

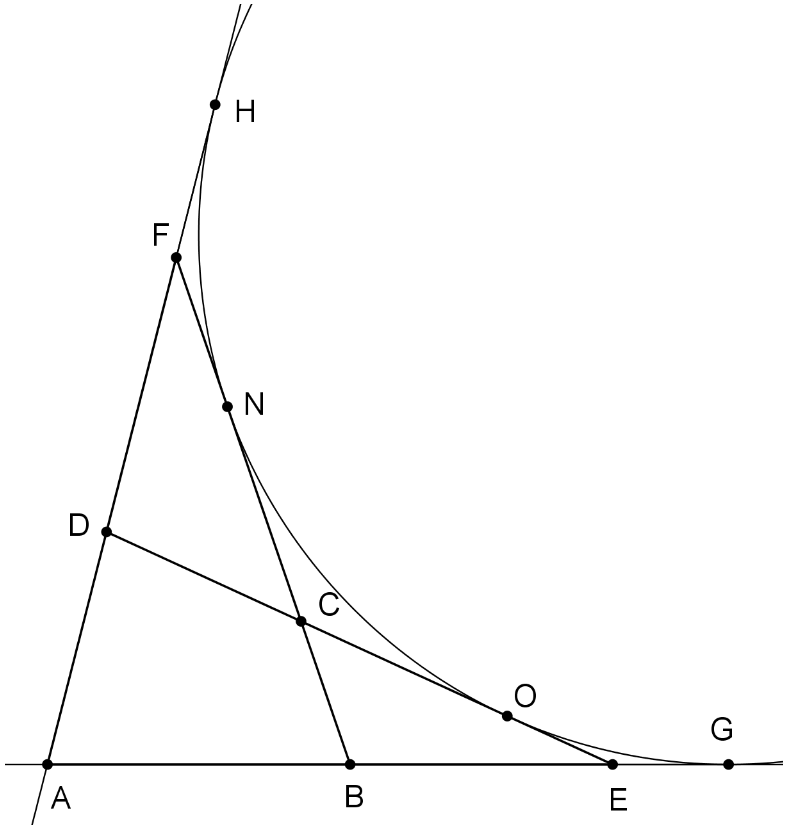
Since $2020 > 1$, the result is simply the average of all the positive integers from 1 to 2021, i.e. $\frac{2022}{2} = 1011$.

Problema 45. Fermierul Karl are un teren de formă patrulateră cu lungimile laturilor $a = 40$, $b = 20$, $c = 28$, $d = 32$ ca în figură. Prin moștenire el primește cele două bucăți triunghiulare BEC și DCF, ce sunt delimitate de două laturi și prelungirile celorlate două laturi ale terenului inițial. Dacă are nevoie de un gard cu lungimea egală cu 80 pentru secțiunea $BE + EC$, care este lungimea gardului pentru secțiunea $CF + FD$?



Rezultat. 88

Soluție. First of all, we show that the triangles $\triangle BEC$, $\triangle AED$, $\triangle DCF$ and $\triangle ABF$ have an identical excircle lying in the angle EAF.



Let G denote the tangent point of the B-excircle of triangle $\triangle BEC$ lying on AB. The distance between B and G is half the perimeter of the triangle, i.e. $BG = \frac{1}{2}(CB + BE + EC)$. Now let G' be the tangent point of the A-excircle of triangle $\triangle AED$ lying on AB. Using $a + b = 60 = c + d$ we get

$$\begin{aligned} AG' &= \frac{1}{2}(AE + ED + DA) \\ &= \frac{1}{2}(AB + BE + EC + CD + DA) \\ &= \frac{1}{2}(AB + BE + EC + AB + BC) \\ &= AB + \frac{1}{2}(BE + EC + BC), \end{aligned}$$

and hence $G = G'$. Therefore, the tangent point O on side CE is uniquely determined for both triangles and it follows that the triangles $\triangle BEC$ and $\triangle AED$ have an identical excircle. By analogy, we can show that the triangles $\triangle DCF$ and $\triangle ABF$ have also the same excircle. It is even identical for all four triangles under consideration since the center point of the excircle has to lie on the angular bisector of $\angle EAF$ and on the angular bisector of $\angle ECF$. Since the tangents to a circle have equal lengths, from $AG = AH$ we get that the triangles $\triangle AED$ and $\triangle ABF$ have perimeters of equal lengths. Hence we obtain

$$\begin{aligned} CF + FD &= AB + BF + FA - AB - BC - DA \\ &= AE + ED + DA - AB - BC - DA \\ &= BE + EC + CD - BC \\ &= 80 + 28 - 20 = 88 \end{aligned}$$

as the length of $CF + FD$.

Problema 46. Determinați pentru câte valori $k \in \{1, \ldots, 2020\}$ ecuația $p^3 + q^3 + r^3 = 3pqr + k$ are o soluție (p, q, r), unde p, q, r sunt numere naturale.

Rezultat. 1568

Soluție. Let us write the equation in the form

$$p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr = \frac{1}{2}(p + q + r)\left((p - q)^2 + (q - r)^2 + (r - p)^2\right) = k.$$

Note that if the last bracket is nonzero, then it equals at least two and the numbers p, q, r cannot be all equal. Hence $k \geq (1+1+2) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \geq 4$. The triple $(p, q, r) = (n, n, n+1)$ is a solution for $k = 3n + 1$ for any $n \geq 1$. Similarly, the triple $(p, q, r) = (n, n+1, n+1)$ is a solution for $k = 3n + 2$ for any $n \geq 1$. If $3 \mid k$ then by rewriting the equation as

$$k = p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr = (p + q + r)^3 - 3(p + q + r)(pq + qr + rp)$$

we see that also $3 \mid p + q + r$ and thus necessarily $9 \mid k$. On the other hand, the triple $(p, q, r) = (n - 1, n, n + 1)$ solves the equation with $k = 9n$ for any $n \geq 2$. It only remains to investigate the case $k = 9$ If the positive integers p, q, r are pairwise different, we have $k = \frac{1}{2}(p + q + r)\left((p - q)^2 + (q - r)^2 + (r - p)^2\right) \geq (1 + 2 + 3)\frac{1}{2}(1 + 1 + 4) = 18$ and if $p = q \neq r$ we have $9 = (2p + r)(p - r)^2$ and since $2p + r > 1$ we must have $2p + r = 9$ and $|p - r| = 1$ which is impossible as then $r = p \pm 1$ and $9 \neq 3p \pm 1$. In conclusion, all the admissible $k \in \{1, \ldots, 2020\}$ can be obtained by removing from the set the numbers smaller than 4 and multiples of 3 and then adding the multiples of 9 larger than 9. Hence the result is $2020 - 3 - 672 + 223 = 1568$.