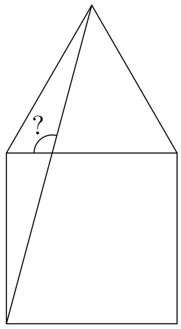
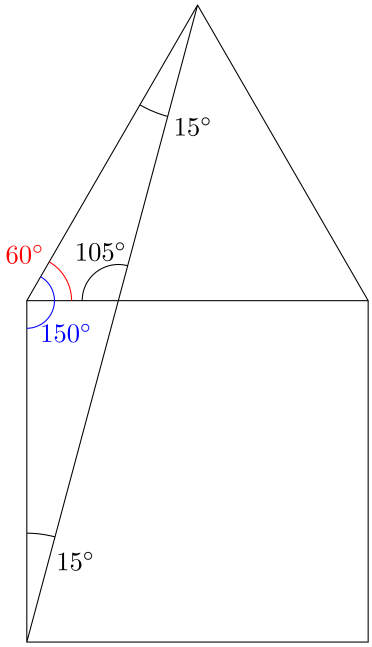
Задача 1. Схема дома состоит из квадрата и равностороннего треугольника одинаковой длины. Какова величина обозначенного угла в градусах?



Ответ. $105°$

Решение. Обратите внимание, что дополнительный отрезок является основанием равнобедренного треугольника с углами $150°$, $15°$, $15°$. Искомый угол равен $180° - 60° - 15° = 105°$.



Задача 2. Члены спортивной команды позируют для фотографии. Они стоят в ряд, и все они одеты в командные майки, пронумерованные какими-то различными целыми положительными числами. Фотограф замечает, что тот, кто стоит в правом конце ряда, имеет номер 72 и что номер любого другого члена команды делит номер его соседа справа (стороны даны с точки зрения фотографа). Сколько спортсменов в лучшем случае может стоять там?

Ответ. 6

Решение. Начиная с крайнего правого числа 72 и двигаясь влево, следующее число всегда равно первому, деленному на положительное целое число $n > 1$. Поскольку $72 = 2^3 \cdot 3^2$ и с каждым шагом степень одного простого числа уменьшается, следовательно, мы не можем получить больше $1 + 3 + 2 = 6$ спортсменов. Это достигается, например, последовательностью $1, 2, 4, 8, 24, 72$.

Задача 3. В ансамбле струнных инструментов каждый музыкант может играть на скрипке или альте, и ровно четверть всех участников может играть на обоих инструментах. Кроме того, мы знаем, что 32 человека могут играть на скрипке, а 23 — на альте. Сколько всего членов ансамбля?

Ответ. 44

Решение. Пусть n — искомое число членов ансамбля. Когда мы складываем числа 23 и 32, мы получаем общее число членов, но с подсчетом дважды каждого члена, который может играть на обоих инструментах. Поскольку существует $n/4$ таких членов, мы делаем вывод, что

$$23 + 32 = 55 = n + \tfrac{n}{4} = \tfrac{5}{4}n,$$

следовательно $n = 44$.

Задача 4. Сесил умножил пять последовательных положительных целых чисел, получив число C. Дэвид сделал то же самое, но его последовательность начиналась с числа на единицу больше, чем у Сесила, что привело к произведению D. Какое было наименьшее из чисел, которые Дэвид умножил, при условии, что $C/D = 4/5$?

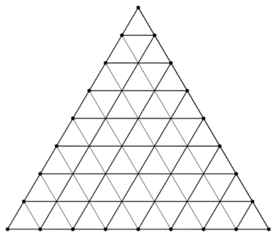
Ответ. 21

Решение. Предположим, что n – первое число Сесила, тогда $C = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$. Дэвид начинает с$n+1$, так, что $D = (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$. У нас есть

$$\frac{4}{5} = \frac{C}{D} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} = \frac{n}{n+5}.$$

Решение этого уравнения для n приводит к $n = 20$. Поскольку мы ищем наименьшее число Давида, ответ — 21.

Задача 5. Каждому маленькому треугольнику назначьте число треугольников, с которыми он разделяет ребро. Определите сумму всех этих чисел..



Ответ. 168

Решение. Существует 18 ограничных треугольников с двумя соседями и 3 треугольника только с одним соседом. Оставшиеся $64-18-3 = 43$ треугольника имеют трех соседей, и, следовательно, результат $3\cdot43+2\cdot18+3 = 168$.

Задача 6. Найдите наибольшее положительное целое число n такое, что $n^2 - 5n + 6$ – простое число.

Ответ. 4

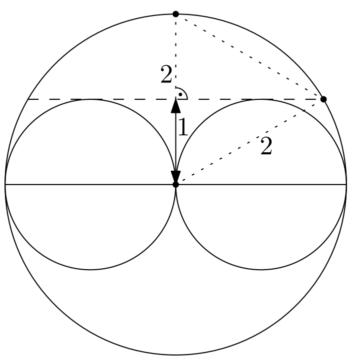
Решение. Поскольку для любого целого числа n число $n(n-5)$ является произведением нечетного и четного чисел, мы заключаем, что $n^2 - 5n + 6 = n(n-5) + 6$ четно. Поскольку единственное четное простое число равно 2, , мы получаем уравнение $n^2 - 5n + 6 = 2$, решения которого равны 1 и 4. Таким образом, искомое наибольшее целое число равно 4.

Другое возможное решение состоит в том, чтобы прямо отметить, что $n^2 - 5n + 6 = (n-2)(n-3)$ может быть простым числом только в том случае, если одна из скобок равна ±1. Наибольшее такое число равно 4 и квадратный трехчлен, вычисленный при 4 действительно дает простое число 2.

Задача 7. Два круга радиусов 1 соприкасаются в центре большого круга, который также имеет точки касания с двумя меньшими кругами, как на рисунке. Определите длину пунктирного отрезка, который является касательным к меньшим окружностям, а его конечные точки лежат на большом круге, как изображено на рисунке.

Ответ. $2\sqrt{3} \doteq 3.46410$

Решение.



Пунктирный угол расположен на 1 1 единицу выше горизонтального диаметра большого круга. Центр большого круга, одна из конечных точек пунктирного отрезка и точка"на вершине "большого круга образуют, таким образом, равнобедренный треугольник с вертикальным основанием и одной из сторон длины 2. Результат, таким образом, в два раза больше длины высоты в равностороннем треугольнике с длиной стороны 2 и может быть вычислен, например, по теореме Пифагора.

Задача 8. Четверо математиков сели за стол и заказали большую миску кренделей. Дэниел ушел в туалет. Каждую минуту Адам, Беата и Сирил брали по одному кренделю, делили его на три равные части и съедали. Через некоторое время Дэниел вернулся к столу, и они все продолжали есть по одному кренделю каждую минуту, но Дэниел съел 2/5 кренделей, в то время как остальные съели 1/5. Через некоторое время Адам заметил, что Дэниел съел точно такую же порцию, как и он сам. Каково отношение времени, в течение которого Даниил отсутствовал, к тому времени, когда он присутствовал?

Ответ. $\frac{3}{5} = 0.6$

Решение. Пусть t_a будет время, в течение которого Даниил отсутствовал, и t_p – время, в течение которого он присутствовал. Адам и Даниил съели то же самое количество кренделей, тогда

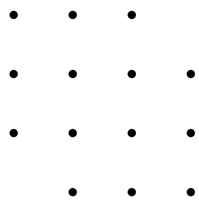
$$\frac{2}{5}t_p = \frac{1}{3}t_a + \frac{1}{5}t_p \Rightarrow \frac{t_a}{t_p} = \frac{3}{5}.$$

Задача 9. Биржа в Праге предлагает следующие монеты: 1 чешская крона за 40 центов, 2 кроны за 50 центов, 5 крон за 1 евро, 10 крон за 2 евро, 20 крон за 4.1 евро и 50 крон за 9.9 евро. Марк хочет обменять все свои 11.8 евро, но он не хочет покупать больше одной монеты каждого типа. Сколько крон он получит? Найдите сумму всех решений.

Ответ. 58

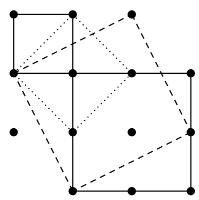
Решение. Мы должны решить уравнение $11.8 = 0.4 \cdot x_1 + 0.5 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 + 4.1 \cdot x_5 + 9.9 \cdot x_6$ где все x_i должны быть из множества $\{0, 1\}$. Так как $0.4 + 0.5 + 1 + 2 + 4.1 < 11.8$, мы знаем, что x_6 должно равняться 1. . Таким образом, уравнение примет вид $1.9 = 0.4 \cdot x_1 + 0.5 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 + 4.1 \cdot x_5$. Так как при выборе $x_4 = 1$ или $x_5 = 1$ потраченная сумма превысит 11.8 евро, нам нужно установить $x_4 = x_5 = 0$. Так из равенства $0.4 + 0.5 + 1 = 1.9$, получаем единственное решение $x_1 = x_2 = x_3 = x_6 = 1$ и $x_5 = x_4 = 0$. Таким образом, Марк получит $1 + 2 + 5 + 50 = 58$ чешских крон.

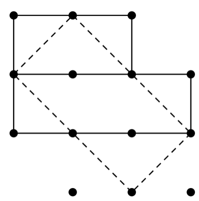
Задача 10. В правильной сетке из единичных квадратов отмечены четырнадцать точек. Сколько существует прямоугольников, вершинами которых являются четыре отмеченные точки?



Ответ. 27

Решение. В показанной части сетки можно найти семь типов прямоугольников:





Есть 7 единичных квадратов, 2 квадрата размером 2×2, 4 квадрата, как тот, с линиями из точек, и 2 как тот, с пунктирными линиями. Кроме того, есть 8 прямоугольников размером 1×2, 2 прямоугольника размером 1×3, и 2 прямоугольника, подобных тому с пунктирными линиями.

В целом, мы насчитаем $7 + 2 + 4 + 2 + 8 + 2 + 2 = 27$ прямоугольника.

Задача 11. Каково значение положительного целого числа n для которого наименьшее общее кратное 60 и n больше на 777 чем наибольший общий делитель 60 и n?

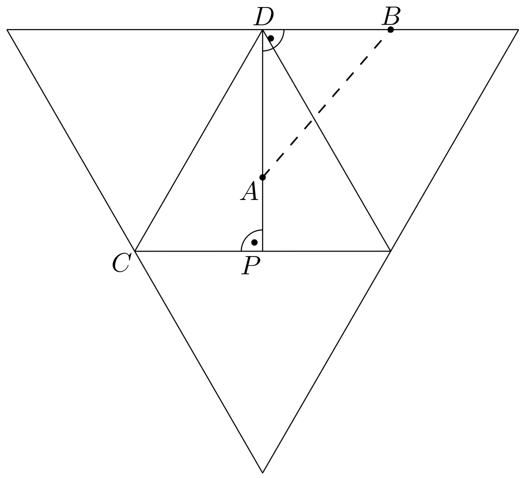
Ответ. 39

Решение. Мы хотим решить уравнение $\text{НОК}(60, n) = 777 + \text{НОД}(60, n)$. Наибольший общий делитель должен быть делителем 60, то есть это должно быть одно из чисел $1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30$, или 60. Из этих делителей только число 3 может быть добавлено к 777 чтобы получить кратное 60. Таким образом, $\text{НОД}(60, n) = 3$ and $\text{НОК}(60, n) = 780$. Тогда $60 \cdot n = 3 \cdot 780$, знасит $n = 39$.

Задача 12. Муравей сидит в центре грани правильного тетраэдра с длиной ребра 1. Ползая по поверхности тетраэдра, он хочет добраться до центра края, который не лежит на той же грани, на которой сидит муравей. Какова длина кратчайшего пути, который ему нужно пройти, чтобы добраться туда?

Ответ. $\sqrt{7/12} \doteq 0.76376$

Решение.



Давайте "развернем"поверхность тетраэдра, как показано на рисунке. Муравей сидит в точке A и хочет добраться до точки B. Поскольку сеть плоская, кратчайшим путем должен быть отрезок прямой (пунктирная линия). Мы считаем длину $|PD|$ по теореме Пифагора как $|PD|^2 = |CD|^2 - |CP|^2 = 1^2 - (1/2)^2 = 3/4$, то есть $|PD| = \sqrt{3/4}$. Таким образом

$$|AD| = \frac{2}{3}|PD| = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{4}}.$$

Поскольку $|DB| = 1/2$, мы можем еще раз применить теорему Пифагора и вычислить

$$|AB|^2 = |AD|^2 + |DB|^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12},$$

что дает ответ

$$|AB| = \sqrt{\frac{7}{12}} \doteq 0.76376.$$

Задача 13. Агнешка, Брунгильда, Сесилия и Дойна без повторений в определенном порядке нарисовали цифры 3, 6, 9 и 12. (Ни один номер не был повторен двумя или более женщинами.) Мы знаем, что двое из них всегда лгут, а двое говорят правду. Они сказали следующее:

- Агнешка: я получила вдвое больше, чем Дойна.
- Брунгильда: я получила в три раза больше, чем Дойна.
- Сесилия: я получила в четыре раза больше, чем Дойна.
- Дойна: я не получила меньше всех.

Каково произведение чисел, которые получили два лжеца?

Ответ. 27

Решение. Если бы Дойна получила 3, она бы солгала. Следовательно, точно одна из других должна была бы солгать, что невозможно, так как две дамы должны были бы нарисовать одно и то же число. Если бы Дойна получила 9 или 12, все остальные лгали бы, так как невозможно нарисовать их кратное. Таким образом, Дойна получила 6. Единственный из остальных, кто мог бы сказать правду, это Агнешка. Таким образом, она получила 12. Таким образом, два лжеца — это Брунгильда и Сесилия, которые получили 3 и 9 в некотором порядке. Произведение их чисел равно 27.

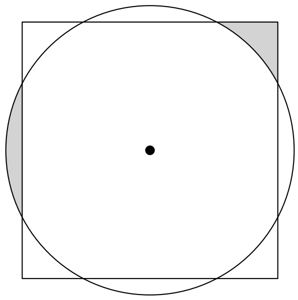
Задача 14. Найдите наименьшее положительное целое число, которое имеет ровно 24 положительных делителя и ровно 8 из них нечетные.

Ответ. 420

Решение. Напомним, что для любого положительного целого числа n с факторизацией $n = {p_1}^{a_1} \cdots {p_k}^{a_k}$, где p_i являются всеми простыми делителями числа, количество всех положительных делителей n равно $(a_1+1) \cdots (a_k+1)$.

Очевидно, что число нечетных делителей можно найти, просто опустив все множители 2 в разложении n на простые множители. Поскольку $24 = 8 \cdot 3$ и с тем фактом, что число нечетных делителей должно быть 8, мы получаем, что степень 2 должна равняться 2. Поскольку $2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8$, мы должны рассмотреть либо три наименьших простых числа в первой степени, либо куб наименьшего простого делителя и первую степень второго наименьшего делителя, или 7- ю степень наименьшего простого делителя. Но $3 \cdot 5 \cdot 7 < 3^3 \cdot 5 < 3^7$, поэтому наименьшее число n равно $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$.

Задача 15. Круг и квадрат имеют один и тот же центр. Если серые области имеют одинаковую площадь, то каково отношение стороны квадрата к радиусу окружности?



Ответ. $\sqrt{\pi} \doteq 1.77246$

Решение. Поскольку серые области имеют одинаковую площадь, круг и квадрат имеют одинаковую площадь, потому что эта площадь равна общей площади перекрытия плюс четыре площади одной серой области. Если a обозначает длину стороны квадрата, а r – радиус окружности, то получим $a^2 = r^2\pi$ и, следовательно, $a : r = \sqrt{\pi}$.

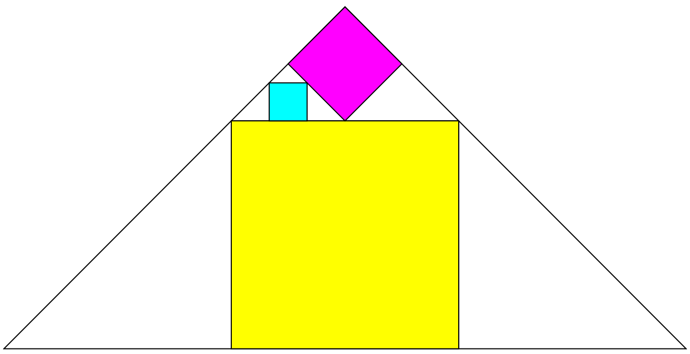
Задача 16. Ленка записала последовательность чисел $1, 2, 3, \ldots, 20$ и знак плюс или минус между каждой парой последовательных чисел таким образом, чтобы полученная сумма равнялась 192. Сколько есть у нее способов это сделать?

Ответ. 5

Решение. Обратите внимание, что единица будет положительным числом, так как минусы были поставлены только между числами.

Если все знаки плюс, то получается 210. Она получила на 18 меньше, поэтому ей пришлось поставить знак минус перед цифрами с общей суммой 9. Это одна тройка (самая маленькая) $(2, 3, 4)$, три пары $(2, 7)$, $(3, 6)$, $(4, 5)$ и единственное число 9. Таким образом, нам остается 5 возможностей выполнить условие задания.

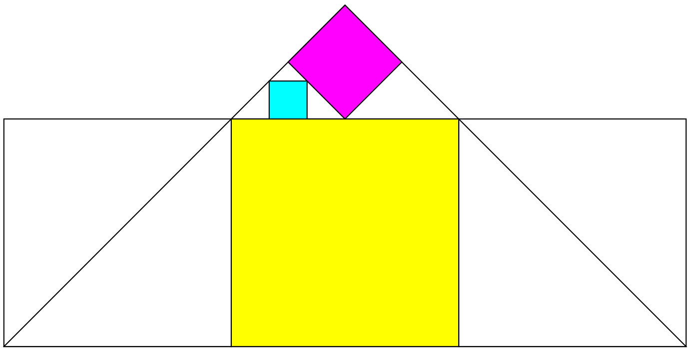
Задача 17. Три квадрата были помещены в равнобедренный прямоугольный треугольник как на картинке:



Какую долю площади треугольника занимает голубой квадрат?

Ответ. 1/81

Решение. Ключевое наблюдение состоит в том, что длина стороны желтого квадрата составляет одну треть основания треугольника; это можно легко увидеть, достроив "внешние"треугольники до квадратов.



Из этого мы заключаем, что отношение площади желтого квадрата к треугольнику равно

$$2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Используя предыдущее наблюдение снова, длина стороны голубого квадрата составляет одну шестую от длины желтого квадрата, следовательно, их отношение площадей равно 1/36 Мы получаем желаемое соотношение, умножая эти два числа, получая 1/81.

Задача 18. Найдите сумму всех положительных целых чисел, которые не могут быть записаны как $2a + 3b$ для некоторых взаимно простых положительных целых чисел a и b.

Напомним, что положительные целые числа m и n являются взаимно простыми, если НОД$(m, n) = 1$.

Ответ. 26

Решение. Мы можем легко увидеть, что нельзя получить любое из чисел $1, 2, 3, 4, 6, 10$, поскольку у нас есть $a, b \geq 1$ и НОД$(a, b) = 1$. С другой стороны, возьмите пары (a, b) вида $(a, 1)$ для всех нечетных чисел $n \geq 5$, возьмите $(2k - 1, 2)$ для выражения всех $n = 4l \geq 8$, и $(2k - 1, 4)$ для чисел $n = 4l + 2 \geq 14$.

Таким образом, искомая сумма равна $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 10 = 26$.

Задача 19. Многочлен называется тяжелым, если он имеет два целых корня, отличающихся на единицу, все его коэффициенты являются целыми числами и их сумма равна 2020. Сколько существует тяжелых квадратичных многочленов, т. е. выражений вида $ax^2 + bx + c$, are there?

Ответ. 4

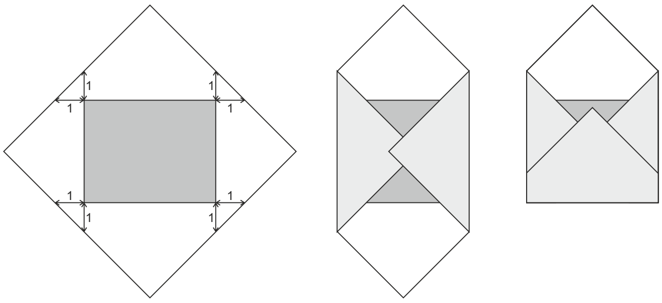
Решение. Поскольку многочлен имеет два корня, он может быть представлен как $c(x - a)(x - b)$, где a, b — целочисленные корни, и c — старший коэффициент также является целым числом. Сумма коэффициентов легко вычисляется как $c(a-1)(b-1)$. Поскольку верно равенство $2020 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$, и так как $(a-1)$ и $(b-1)$ различны, мы останемся с четырьмя возможностями, а именно $2020 = 1010 \cdot 1 \cdot 2$, $2020 = 1010 \cdot (-1) \cdot (-2)$, $2020 = 101 \cdot 4 \cdot 5$, and $2020 = 101 \cdot (-4) \cdot (-5)$.

Задача 20. Поезд состоял из 40 вагонов, пронумерованных от 1 до 40, каждый из которых вмещал 40 пассажиров. Вначале в вагоне 1 сидел один пассажир, в вагоне 2 — два пассажира и т. д., до вагона 40 с сорока пассажирами. Однако по техническим причинам последний вагон пришлось снять с поезда, и все его пассажиры пересели в вагоны с меньшим количеством пассажиров таким образом, чтобы они заняли ближайшее свободное место, а если вагон был уже заполнен, то они приступили к проверке следующего вагона с меньшим количеством пассажиров. Во время путешествия то же самое случилось впоследствии с вагонами $39, 38, \ldots, 23$. Сколько пассажиров окончательно было в вагоне 2 после того, как это произошло?

Ответ. 19

Решение. Обратите внимание, что всего в поезде $40 \cdot 41/2 = 820$ пассажиров. Когда поезд состоит из 22 вагонов, его последние 20 вагонов должны быть полны, потому что в противном случае в них было бы не больше $1 + 2 + 39 + 19 \cdot 40 = 802$ пассажира. Это оставляет 20 пассажиров сидеть в первых двух вагонах, и поскольку вагон 2 не может быть полным, вагон 1 вмещает по-прежнему только 1 пассажира. Из этого следует, что в вагоне 2 находятся 19 пассажиров.

Задача 21. Яцек не может купить конверты, поэтому он планирует сделать их сам. Для изготовления прямоугольного конверта Яцек берет квадратный лист бумаги с диагональю, равной 30 см, складывает левый и правый угол, затем складывает нижний угол и закрывает конверт, складывая верхний угол. Для того чтобы правильно приклеить конверт, нужно, чтобы он был склеен внахлест на 1 см, как на картинке, и после закрытия конверта верхний угол не мог быть ниже нижнего края конверта. Какова максимально возможная ширина конверта?



Ответ. 18

Решение. Пусть длины сторон огибающей равны a b b, b диагональ квадрата равна d. Глядя на диагональ квадрата, мы заметим, что $d = b + a + 2$. Для того чтобы правильно сложить конверт, неравенство $\frac{1}{2}b + 1 \leq a$ должно выполняться. Вместе это дает неравенство $b \leq \frac{2}{3}d - 2$.

Задача 22. Марта выбрала три целых положительных числа a, b, c и вычислила три суммы от пар $a+b$, $b+c$, $c+a$, получив три квадрата целых чисел. Какое наименьшее возможное значение $a+b+c$?

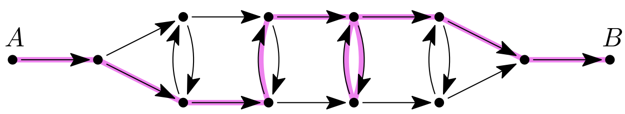
Ответ. 55

Решение. Пусть $a + b = d^2$, $b + c = e^2$, $c + a = f^2$ для (обязательно различных) натуральных чисел d, e, f. Положим, не нарушая общности, что $d < e < f$ и поскольку числа Марты положительные,

$$d^2 + e^2 = a + c + 2b > a + c = f^2. \qquad (\heartsuit)$$

Причем искомое значение равно $(d^2 + e^2 + f^2)/2$. Следовательно, мы ищем тройку квадратов, удовлетворяющих ($\heartsuit$) и имеющих четную сумму и минимальную одновременно. Такая тройка существует $(d^2, e^2, f^2) = (25, 36, 49)$, и ответ равен 55.

Задача 23. На следующей диаграмме определите, сколько существует путей от точки A до точки B, которые используют каждую стрелку не более одного раза? (Один такой путь нарисован фиолетовым цветом.)



Ответ. $162 = 2 \cdot 3^4$

Решение. Путь полностью определяется следующими вариантами: сначала идете либо вверх, либо вниз (2 варианта), а затем для каждой из 4 вертикальных пар вершин: либо не используйте ни одной вертикальной стрелки, либо используйте одну из них, либо используйте обе (по 3 варианта). Следовательно, ответ $2 \cdot 3^4 = 2 \cdot 81 = 162$.

Задача 24. Сколько существует четырехзначных чисел со свойством, что любые две соседние цифры отличаются ровно на 3? Число не может начинаться с нуля.

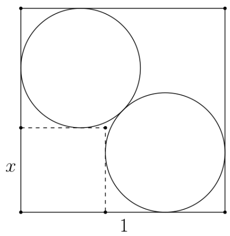
Ответ. 29

Решение. Мы кодируем числа следующим образом: мы пишем U, если правая цифра больше левой, и D, если правая цифра меньше левой, например, число 1474 кодируется как UUD и 1414 UDU. Всего существует восемь возможных кодов и для каждого из них соответствующее число определяется первой цифрой:

code	UUU	UUD	UDU	UDD	DUU	DUD	DDU	DDD
possible first digits	none	1–3	1–6	3–6	3–6	3–9	6–9	9

В общей сложности их насчитывается $3 + 6 + 4 + 4 + 7 + 4 + 1 = 29$ искомых чисел.

Задача 25. Каждый из двух кругов одинакового размера касается другого круга, а также двух сторон единичного квадрата, как на рисунке. Вычислите длину стороны пунктирного квадрата, который разделяет один угол с единичным квадратом и касается окружностей.



Ответ. $\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \doteq 0.41421$

Решение. Пусть x — длина стороны маленького квадрата. Радиусы r окружностей равны $\frac{1-x}{2}$. Диагональ единичного квадрата делится центрами окружностей и точкой их касания на четыре части. Две из них являются радиусами и две другие — диагоналями квадратов со стороной r. В целом, мы имеем

$$\sqrt{2} = 2r + 2\sqrt{2}r = (1-x)(1+\sqrt{2})$$

и решение данного уравнения дает $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$.

Задача 26. Действительные числа $x_1, x_2, \dots, x_{2020}$ обладают следующими свойствами:

- Всякий раз, когда мы суммируем все числа, кроме одного x_i с нечетным i, результат равен 2.
- Всякий раз, когда мы суммируем все числа, кроме одного x_i четным i, результат равен 0.

Чему равна сумма $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2020}$?

Ответ. 2020/2019

Решение. Если суммировать все приведенные уравнения, то получим

$$2019(x_1 + x_2 + \cdots + x_{2020}) = 1010 \cdot 2 + 1010 \cdot 0 = 2020,$$

итак, искомый результат равен 2020/2019.

Задача 27. Два игрока играют в игру, чередуя ходы. Каждый ход состоит из изменения положительного целого числа n на другое положительное целое число в диапазоне $[\frac{n}{3}, \frac{n}{2}]$. Игрок, который не может двигаться, проигрывает. Для какого количества стартовых чисел в диапазоне $[1, 1000]$ способен выиграть первый игрок с оптимальной стратегией?

Ответ. 620

Решение. Назовем *выигрышными* числа, для которых существует стратегия, гарантирующая победу, а остальные числа *проигрышными*. Обратите внимание, что число n выигрывает тогда и только тогда, когда есть проигрышное число в интервале $[\frac{n}{3}, \frac{n}{2}]$; с другой стороны, число n проигрывает тогда и только тогда, когда каждое число из интервала $[\frac{n}{3}, \frac{n}{2}]$ выигрывает (что включает в себя вариант, что на самом деле нет целого числа в этом интервале).

Очевидно, что 1 — это проигрышное число, поэтому, согласно приведенным выше правилам, 2 и 3 выигрывают. Это, в свою очередь, означает, что числа $4, \dots, 7$ проигрывают, так как для каждого из этих чисел мы имеем $[\frac{n}{3}, \frac{n}{2}] \cap \mathbb{N} \subseteq \{2, 3\}$. Далее мы получаем, что $8, \dots, 21$ выигрывают и т. д. Продолжая в том же духе, мы получаем дополнительные выигрышные номера $44, \dots, 129$, $260, \dots, 777$. Всего есть 620 выигрышных номеров.

Задача 28. Две окружности с диаметрами $AB = 17$ and $AC = 7$ пересекаются в точках A and D. Известно, что $CD = 4$. Определите все возможные расстояния между центрами окружностей и вычислите их произведение.

Ответ. 60

Решение. По теореме Фалеса получаем два прямых угла в точке D, поэтому точки B, C и D лежат на одной прямой. По теореме Пифагора вычисляем $BD^2 = 17^2 - (7^2 - 4^2) = 16^2$ и имеем $BC = 16 \pm 4$ (действительно, прямые углы могут либо совпадать, либо образовывать прямую линию). Соединяя центры окружностей, мы получаем подобный (с коэффициентом $\frac{1}{2}$) треугольник ABC, и поэтому искомое расстояние равно либо $20/2 = 10$ либо $12/2 = 6$, а искомое произведение есть 60.

Задача 29. Семь троллейбусов курсируют между четырнадцатью станциями на одной линии. Каждый троллейбус стартует на одной из станций и движется в одном направлении, пока не достигнет конца линии, которая является либо первой, либо последней станцией на линии, где он разворачивается и продолжает движение в другом направлении. Все троллейбусы поддерживают постоянную скорость и проезжают ровно одну станцию в минуту. Мистер Бирне разместил их таким образом, что

1. на каждой станции находится не более одного троллейбуса, и
2. на каждой станции будет не более одного троллейбуса в течение одной минуты, независимо от того, в каком направлении идут троллейбусы.

Какими способами это можно было сделать? Троллейбусы считаются идентичными.

Ответ. 20

Решение. Троллейбусы не должны находиться на расстоянии двух станций. Очевидно, что четные и нечетные станции являются независимыми, и также очевидно, что обе станции могут принять не более 4 троллейбусов. Таким образом, одна должна разместить 3, а другая 4, поэтому решение $2 \cdot N$, где N — количество способов, которыми 3 элемента могут быть размещены на семи местах в ряд так, чтобы они были разделены свободным пространством. Сначала мы помещаем четыре свободных места в линию, а затем помещаем три троллейбуса между свободными местами. Первый троллейбус имеет 5 возможностей, второй 4 и третий 3. Поскольку троллейбусы неразличимы, то число способов равно $N = (5 \cdot 4 \cdot 3)/(3 \cdot 2 \cdot 1) = 10$. Таким образом, окончательный ответ $2 \cdot 10 = 20$

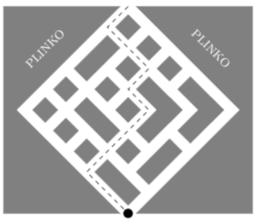
Задача 30. Мэриан написал книгу с 2020 страницами, помеченными $1, 2, 3, \ldots 2020$. После доработки он добавил перед книгой реферат, состоящий из 11 страниц. Сколько цифр он должен переписать, чтобы каждая страница получила соответствующий номер? Вновь записанные цифры, такие как первая 1 появляющаяся при изменении $95 \to 106$, не учитываются.

Ответ. 4251

Решение. Сначала посчитаем, сколько цифр останется прежними. Нетрудно заметить, что для каждого одно- или двухзначного числа операция $+11$ не оставляет нетронутой ни одной цифры. Таким образом, каждая цифра, которая будет неизменной, должна быть на позиции сотен или тысяч. Если последние две цифры страницы помечены от 00 до 88, первые две цифры останутся без изменений. Это относится к сотням цифр для чисел 89 в каждом диапазоне сотен. Кроме того, для каждого числа от 1000 до 1988 у нас есть еще одна стабильная цифра — цифра тысячit. Итак, учитывая все числа до 1999, имеем $19 \cdot 89 + 989 = 2680$ цифр, которые остаются неизменными. От 2000 до 2020, есть 21 число, которые не изменят свою сотню или тысячную цифру, что дает $2 \cdot 21 = 42$ неизменных цифр. Поэтому $2680 + 42 = 2722$ цифр остаются без изменений.

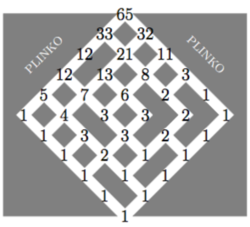
Итак, сколько всего цифр? От 1 до 9 есть 9 цифр. От 10 до 99 имеем $90 \cdot 2$ цифр. От 100 до 999 есть $900 \cdot 3$ цифр и от 1000 до 2020 имеем $1021 \cdot 4$ цифр. В целом получаем 6973 цифр. Следовательно, необходимо изменить $6973 - 2722 = 4251$ цифр.

Задача 31. Шайба опускается в верхнюю часть коробки для плинко и скользит вниз, пока не выпадет из нижней части. Сколько различных путей через коробку возможно? Показан один пример пути.



Ответ. 65

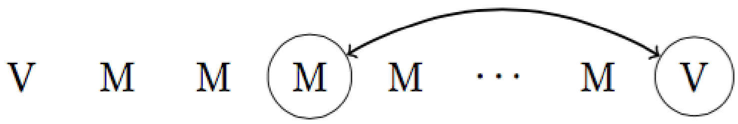
Решение. Мы помечаем каждую точку пересечения количеством путей, которые шайба может пройти с этой точки. Мы начинаем с нижней части коробки, где есть только 1 путь, и продвигаемся вверх. Каждое число является суммой числа или чисел непосредственно под ним.



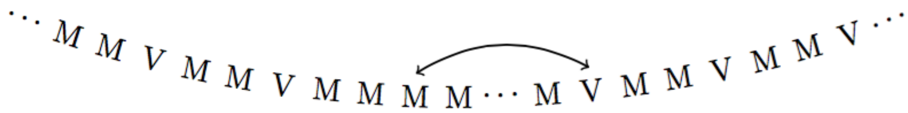
Задача 32. Король и его 100 рыцарей садятся за круглый стол. Вегетарианцам подают сыр, а всем остальным - курицу. Но у короля оказалась меньшая порция курицы, чем у рыцаря слева от него, поэтому он приказывает всем передать свою тарелку вправо. Теперь у короля есть нормальная порция курицы, но 64 рыцаря едят не ту еду, поэтому все снова передают свою тарелку вправо. И снова у короля оказалась меньшая порция курицы, чем у рыцаря слева от него, поэтому каждый передает свою тарелку вправо в третий раз. Теперь только 2 рыцаря (и не король) едят не ту еду

Ответ. 68

Решение. Обратим внимание, что королю и трём рыцарям слева от него подали курицу. Итак, после третьего обмена первое вегетарианское блюдо слева от короля было передано мясоеду, а первый вегетарианец справа от короля получил мясо. Это те два рыцаря, которым пришлось поменяться местами.



Всем остальным подавали то же самое блюдо, что и человеку на 3 места слева от них, так что рассадка была



Затем каждый вегетарианец и все мясоеды справа от вегетарианца после первого прохода ели не ту еду. Итак, имеем $64/2 = 32$ вегетарианцев. Оставшиеся $100 - 32 = 68$ рыцари (как и король) ели курицу.

Задача 33. Дэвид хотел бы нарисовать треугольник ABC и точки D, E іна сторонах AB и BC таким образом, что треугольники ABC, AEC, ADE, BDE были подобны. Какова сумма всех возможных значений размера угла BAC в градусах?

Ответ. 150

Решение. Все углы должны быть α, β или γ (стандартное обозначение углов ABC). Очевидно, что угол EAC равен β и AEC равен α. Углы EDA и EDB составляют $180°$, поэтому они должны быть одинаковыми, либо α либо γ равны $90°$. Простая проверка показывает, что первый случай не приводит к невозможной ситуации, а второй дает $\alpha = 60°$. Таким образом результат равен $90° + 60° = 150°$.

Задача 34. Пять ночных рабочих должны запланировать свои смены на следующие 10 ночей так, чтобы каждую ночь ровно у двух рабочих была смена, и эти два работника не могли иметь смену ночью после нее. Сколько существует графиков времени (способов), содержащих каждую возможную пару рабочих?

Ответ. 240

Решение. Давайте нарисуем рабочих как узлы на диаграмме, где сегмент между двумя узлами представляет сдвиг двух рабочих. Мы ищем количество способов нарисовать все сегменты $5 \cdot 4/2 = 10$ так, чтобы ни один из двух последующих сегментов не имел общего узла. Первый сегмент можно выбрать 10 способами, второй 3 способами и в следующих двух шагах у нас всегда есть два варианта. Однако независимо от того, какой выбор мы делаем, мы получаем по существу одну и ту же ситуацию, то есть мы можем получить любую последовательность вариантов из любой другой, перенумеровав узлы. Пятый выбор может привести к двум различным результатам: либо мы получим цикл из пяти сегментов, либо цикл из четырех сегментов с "хвостом". Первый вариант приводит к 1, 2, 1, 1, и 1 выборам на следующих шагах, в то время как последний вариант не может быть завершен действительным образом, так как последние два сегмента должны были бы содержать "конец хвоста". Мы приходим к выводу, что существуют

$$10 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 240$$

возможных временных графиков.

Задача 35. У Люси есть треугольник с длиной сторон 32, 50, и x. Кроме того, существует подобный треугольник, и имеющий две стороны той же длины, что и у Люси, но он не конгруэнтен ему. Найдите сумму всех возможных значенийx.

Ответ. $27721/200$

Решение. Пусть $a < b < c$ длины сторон треугольника Люси. Ситуация, описанная в условии, может произойти только тогда, когда длины удовлетворяю $a : b = b : c$. Теперь есть три варианта: (1) $a = 32$, $b = 50$, что приводит к $x = c = 50 \cdot \frac{50}{32}$; (2) $a = 32$, $c = 50$, что приводит к $x = b = \sqrt{32 \cdot 50} = 40$; (3) $b = 32$, $c = 50$, что приводит к $x = a = 32 \cdot \frac{32}{50}$. Легко проверить, что ни одна из этих ситуаций не нарушает неравенство треугольника. В результате получается сумма трех значений.

Задача 36. Бегун тренируется на дорожке, имеющей форму периметра правильного 40-угольника. Его тренировочный план таков: сначала он бежит от начальной вершины к соседней по часовой стрелке и делает там небольшой перерыв. Он продолжает в том же духе до тех пор, пока не сделает перерыв в начальной вершине. Затем он начинает снова, на этот раз с перерывом после прохождения каждого другого ребра и снова продолжается до перерыва в начальной вершине, где он еще больше увеличивает длину одного спринта на один и т. д. Сколько раз бегун будет отдыхать, прежде чем завершить весь цикл без перерыва вокруг 40-угольника? Нет перерыва ни в начале, ни после этого последнего пробега.

Ответ. 902

Решение. Заметим, что бегун делает ровно $\frac{40}{\text{НОД}(40,a)}$ шагов (пробегов) размера a ребер, где НОД(x, y) обозначает наибольший общий делитель положительных целых чисел x, y. Для всех возможных чисел $d = \text{НОД}(40, a)$ (делителей 40) перечислим возможные значения a:

- $d = 1$ для $a \in \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 27, 29, 31, 33, 37, 39\}$,
- $d = 2$ для $a \in \{2, 6, 14, 18, 26, 34, 38\}$,
- $d = 4$ для $a \in \{4, 12, 28, 36\}$,
- $d = 5$ для $a \in \{5, 15, 25, 35\}$,
- $d = 8$ для $a \in \{8, 16, 24, 32\}$,
- $d = 10$ для $a \in \{10, 30\}$,
- $d = 20$ для $a \in \{20\}$,
- $d = 40$ для $a \in \{40\}$.

Общее число шагов теперь может быть получено суммированием произведений $\frac{40}{d}$ и размера множества в соответствующей строке[1] выше. Мы получаем $40 \cdot 16 + 20 \cdot 8 + 10 \cdot 4 + 8 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 903$. Это значит, что бегун отдыхал 902 раза.

Задача 37. Докторанту, живущему на кубической планете, приходится тратить бюджет на дорогу, посещая университеты, расположенные в вершинах куба. Бюджет покрывает 2020 поездок и должен быть использован полностью. Студент начинает в своем родном университете и осуществляет первую поездку, перемещаясь в один из соседних (по краю куба) университетов. Он всегда выбирает следующий университет для посещения случайным образом с единственным условием, что он не может вернуться домой раньше, чем к 2020-й поездке. Какова вероятность того, что он вернется домой к 2020-й поездке?

Ответ. 2/9

Решение. Обозначим начальную вершину (т.е. домашний университет) через A, ее соседей через B_1, B_2 и B_3, их соседей (отличных от A) через C_1, C_2 и C_3 и, наконец, последнюю вершину через D. Легко видеть, что после нечетного числа шагов (т.е. поездок) единственно возможными позициями являются B_i или D, а после четного числа возможны только C_i или A (что не допускается до 2020-го шага). Обозначим $P_n(V)$ вероятность достижения вершины V после n-го шага. Благодаря симметрии имеем $P_n(B_1) = P_n(B_2) = P_n(B_3) =: P_n(B)$ для каждого n, и аналогично для вершин C_i. Единственные ненулевые вероятности на первых шагах легко вычисляются по заданным правилам:

- $P_0(A) = 1$
- $P_1(B) = \frac{1}{3}$
- $P_2(C) = \frac{1}{3}$
- $P_3(D) = \frac{1}{3}$, $P_3(B) = \frac{2}{9}$
- $P_4(C) = \frac{1}{3}$.

[1]эти размеры могут быть выражены через значения функции Эйлера как $\varphi(40/d)$

Заметим, что после 4 шагов шагов ситуация идентична ситуации после 2 шагов, мы делаем вывод, что процесс является периодическим и $P_{2019}(B) = \frac{2}{9}$, поэтому (теперь возврат к A снова возможен)

$$P_{2020}(A) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{9}.$$

Задача 38. Определим $x \star n = (2-x)^n + x^3 - 6x^2 + 12x - 5$ для любого действительного числа x и положительного целого числа n. Определите сумму всех действительных чисел a, которые являются решением уравнения

$$(a \star 2020) \star 2019) \star \cdots \star 2) \star 1 = a.$$

Ответ. 27

Решение. Заметив, что $x \star 3 = 3$ для любого действительного x легко вычисляем, что $a = (3 \star 2) \star 1 = 5 \star 1 = 27$ есть единственное решение.

Задача 39. Четверо друзей решили записаться на некоторые из четырех доступных курсов. Они решили, что каждый из них зарегистрируется хотя бы на один курс и что будет ровно один курс, на который будет записано более одного из них. Какими способами они могут это сделать?

Ответ. 2052

Решение. Обозначим курсы 1, 2, 3 и 4 и друзей A, B, C и D. Предположим, что курс 1 - это курс, который выбран более чем одним из друзей (после вычисления результата с этим предположением его нужно будет только умножить на 4). Поэтому у нас есть только пять способов назначения курса 2 (теперь его могут выбрать A, B, C и D или никто). Аналогично, у нас есть пять способов назначения курсов 3 и 4. В общем, есть $5^3 = 125$ способов назначения этих трех курсов. В одной из этих возможностей ни у кого из друзей не было курсов; в $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ вариантах трое друзей получили по одному курсу. Теперь мы должны рассчитать, сколько вариантов есть у одного студента получить некоторые курсы. Есть 4×3 возможности, где один из них получил ровно один курс, а остальные два курса были нулевыми (никем не выбранными); 4×3 возможности, где один из них выбрал ровно два курса, а один курс был нулевым; и 4 возможности, где один из них получил все три рассматриваемых курса. В общей сложности это дает $4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 4 = 28$ возможностей. Также это означает ,что есть $125 - 1 - 24 - 28 = 72$ возможности для ровно двух студентов получить некоторые курсы. Обнаружив это, мы можем вернуться к назначению курса 1, последнего из них, который также является единственным кратным. Мы знаем, что каждый студент без предыдущего выбора должен получить этот курс, в то время как каждый студент с предыдущим выбором может получить его или нет, при условии, что есть по крайней мере два студента с этим курсом. Это означает, что существует ровно 1 способ назначения курса 1 если ни один студент не имеет предыдущих курсов; ровно 2 способа, если один студент имеет предыдущие курсы; ровно 4 способа, если два студента имеют предыдущие курсы; ровно 7 способов, если у трех студентов есть предыдущие курсы (семь, потому что по крайней мере один из этих трех студентов должен выбрать курс 1 тем не менее). Это позволяет сделать окончательный расчет: $4(1 \cdot 1 + 28 \cdot 2 + 72 \cdot 4 + 24 \cdot 7) = 2052$.

Задача 40. Рассмотрим сумму всех чисел, имеющих ровно 1000^{1000} цифр, ричем все они равны только 1, 2, или 4. Каковы последние три цифры этой суммы?

Ответ. 259

Решение. Пусть n число, состоящее только из цифр 1, 2, and 4. Если в числе заменим все цифры 1 на 2, все 2 на 4, и все 4 на 1, то получим число, имеющее только эти цифры, и применяя эту операцию еще два раза, получим исходное число n. Сгруппируем все просуммированные числа в тройки, в которых числа могут быть получены друг от друга с помощью этой циклической подстановки. Сумма каждой такой тройки равна числу B состоящему из 1000^{1000} цифр 7, потому что каждая цифра является суммой 1, 2, и 4 в некотором порядке. Общее количество суммированных чисел составляет $3^{1000^{1000}}$, поэтому количество троек равно $3^{1000^{1000}-1}$ и, таким образом, рассматриваемая сумма равна

$$3^{1000^{1000}-1}B.$$

Поскольку нас интересуют только последние три цифры, давайте вычислим остаток по модулю 1000. Очевидно, $B \equiv 777 \pmod{1000}$. Кроме того, поскольку 3 и 1000 взаимно просты, то можно использовать теорему Эйлера для обработки большой степени 3: мы имеем $\varphi(1000) = 400$, который очевидно является делителем 1000^{1000}, поэтому

$$3^{1000^{1000}-1} \equiv 3^{-1} \pmod{1000},$$

где отрицательный показатель означает обратное по модулю. Поскольку

$$3 \cdot 333 = 999 \equiv -1 \pmod{1000},$$

мы заключаем, что обратное по модулю значение 3 равно $-333 \equiv 667 \pmod{1000}$. Таким образом, искомый номер равен

$$667 \cdot 777 \bmod 1000 = 259.$$

Задача 41. В треугольнике ABC угол в вершине A в два раза больше угла в вершине B. Все стороны имеют целочисленное значение, и длина стороны BC наименьшая. Каково произведение длин сторон треугольника?

Ответ. 120

Решение. Обозначив длины сторон a, b и c, а также β угол B. По теореме синусов получим

$$\frac{a}{\sin 2\beta} = \frac{b}{\sin\beta},$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin 2\beta}{\sin\beta} = \frac{2\sin\beta\cos\beta}{\sin\beta} = 2\cos\beta,$$

что дает $\cos\beta = \frac{a}{2b}$. Используя еще раз теорему синуса и выражение для $\cos\beta$, получим

$$\frac{c}{\sin(180^\circ - 3\beta)} = \frac{c}{\sin 3\beta} = \frac{b}{\sin\beta},$$

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin 3\beta}{\sin\beta} = \frac{\sin 2\beta\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{\sin\beta\cos 2\beta}{\sin\beta} = \frac{a^2}{2b^2} + \cos^2\beta - \sin^2\beta \pm 1 = \frac{a^2}{2b^2} + 2\cos^2\beta - 1 = \frac{a^2}{b^2} - 1,$$

$$cb = a^2 - b^2.$$

Наименьшее a для которого существуют b and c удовлетворяющие этому уравнению и являющиеся длинами сторон треугольника, равно l$a = 6$, with $b = 4$ and $c = 5$. Таким образом, произведение длин сторон равно 120.

Задача 42. Каким образом некоторые люди (по крайней мере один) могут сидеть вокруг круглого стола на тридцать местах таким образом, что ни один человек не сидит рядом друг с другом? Механизмы, отличающиеся вращением, считаются различными.

Ответ. 1860497

Решение. Пуст $A(n)$ количество таких расположений для стола с n местами; для удобства мы также включим в это число расположение нулевых людей. Докажем рекуррентное соотношение

$$A(n) = A(n-1) + A(n-2), \tag{R}$$

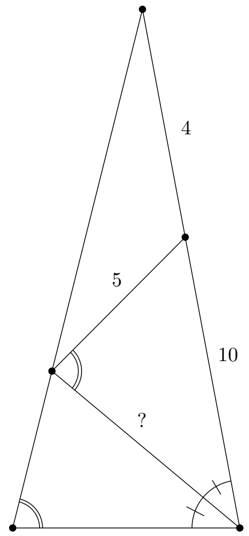
для $n \geq 5$. Назовем подмножество M из $\{1, \ldots, n\}$ *циклически разреженным* если оно не содержит последовательных чисел и не содержит 1 и n в то же время. Очевидно, $A(n)$ равно количеству циклически разреженных подмножеств $\{1, \ldots, n\}$.

Пусть $B(n)$ число *разреженности* подмножества $\{1, \ldots, n\}$, то есть те, которые не содержат последовательных чисел (нет условий на 1 and n). Тогда $B(n)$ удовлетворяет соотношению $B(n) = B(n-1) + B(n-2)$ — действительно существует $B(n-1)$ таких подмножеств, не содержащих n и $B(n-2)$ таких подмножеств, содержащих n. Проведем аналогичный анализ на $A(n)$: число циклически разреженных подмножеств, содержащих n равно $B(n-3)$, поскольку такое подмножество не содержит 1 и $n-1$, в то время как остальные элементы образуют любое разреженное подмножество $\{2, \ldots, n-2\}$. Далее, если циклически разреженное подмножество не содержит n, то остальные элементы могут образовывать любое разреженное подмножество $\{1, \ldots, n-1\}$. Следовательно,

$$A(n) = B(n-1) + B(n-3),$$

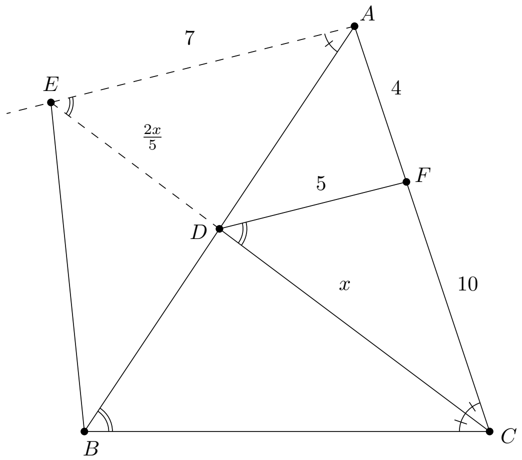
отношение, которое справедливо для любого целого числа $n \geq 3$. Поскольку (сдвинутые) последовательности $B(n-1)$ и $B(n-3)$ удовлетворяют желаемому соотношению, то же самое и их сумма $A(n)$, следовательно, мы доказали (R) для $n \geq 5$. Легко видеть, что $A(3) = 4$ and $A(4) = 7$. Используя (R), мы можем теперь вычислить все значения, в частности $A(30) = 1860498$. Поскольку оператор исключает возможность пустой таблицы, результат меньше на единицу.

Задача 43. Мартин посетил онлайн-семинар по изгибу проволоки и получил домашнее задание по изготовлению конструкции из рисунка. Он вспомнил две отмеченные пары одинаково больших углов и длины трех отрезков. К сожалению, он забыл четвертый (помеченный "?") и теперь борется с домашним заданием. Помогите ему и определите недостающую длину.



Ответ. $5\sqrt{\frac{7}{2}} \doteq 9.354134$

Решение.



Проведем прямую, параллельную DF через точку A как на рисунке, и обозначим ее пересечение с прямой CD через E. Обозначим x искомую дину CD, заключим из подобных треугольников s $CDF \sim CEA$ что $ED = \frac{4}{10}x = \frac{2x}{5}$ и $EA = \frac{10+4}{10} \cdot 5 = 7$. Поскольку $\angle AEC = \angle FDC = \angle DBC$, четырехугольник $AEBC$ вписанный в окружность. Из этого, в свою очередь, следует, что $\angle EAB = \angle ECB = \angle ACD$. Следовательно, $EDA \sim EAC$ таким образом

$$\frac{\frac{2x}{5}}{7} = \frac{7}{\frac{2x}{5} + x} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{7 \cdot 5 \cdot 5}{2}} = 5\sqrt{\frac{7}{2}}.$$

Задача 44. Рассмотрим функции $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ удовлетворяющих условию

$$f(m+n) \geq f(m) + f(f(n)) - 1$$

для всех $m, n \in \mathbb{N}$. Найти среднее арифметическое всех возможных значений $f(2020)$.

Ответ. 1011

Решение. Мы утверждаем, что $f(n) \leq n+1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $f(n+1) \geq f(n) + f(f(n)) - 1 \geq f(n)$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то f не убывает. Предположим, что

$$f(m) > m + 1 \quad \text{для некоторых } m \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

иначе говоря $f(m) = m + c$ для некоторых $c \in \mathbb{N}$, $c \geq 2$. Затем

$$f(2m) \geq f(m) + f(f(m)) - 1 = m + c - 1 + f(m+c) \geq 2m + 2(c-1) + 1$$

и применяя это рассуждение индуктивно, получаем $f(2^r m) \geq 2^r m + 2^r(c-1)+1$. Комбинируя это неравенство, одно из утверждений и тот факт, что f не убывает, мы получаем

$$f(2^r m+1) \geq f(f(2^r m)) \geq f(2^r m + 2^r(c-1)+1),$$

так опять же по монотонности $f(2^r m+1) = f(2^r m+2) = \cdots = f(2^r m + 2^r(c-1)+1)$. Для всех $k \in \mathbb{N}$ выбирем $r_k \in \mathbb{N}$ такое, что $2^{r_k}(c-1) > k$. Затем

$$f(2^{r_k} m+1+k) \geq f(2^{r_k} m+1) + f(f(k)) - 1 \geq f(2^{r_k} m+1+k) + f(f(k)) - 1$$

и, следовательно, $f(f(k)) \leq 1$ значение $f(f(k)) = 1$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Отсюда также $1 = f(f(m)) = f(m+c) \geq f(m)$ и, значит, $f(m) = 1$ contradicting the assumption (1). Следовательно, действительно $f(n) \leq n+1$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

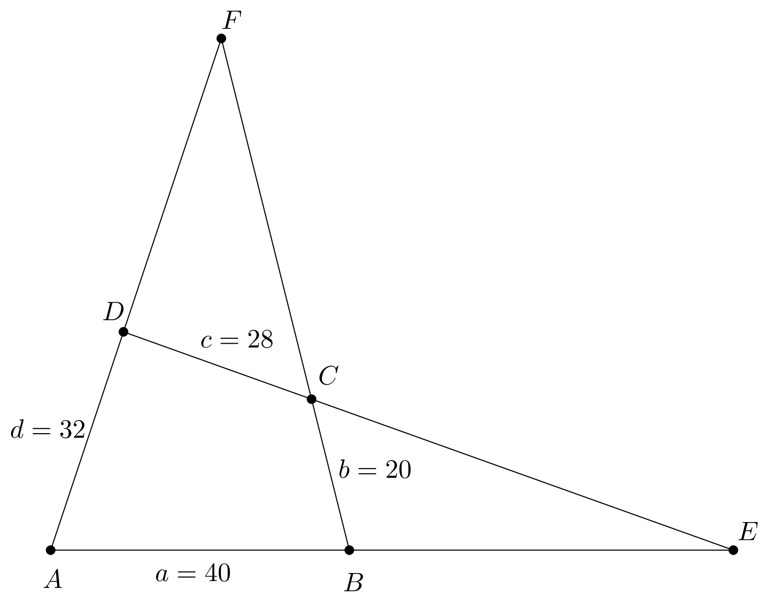
Фактически, для данного положительного целого числа $N > 1$, значение $f(N)$ может быть любым элементом множества $\{1, 2, \ldots, N+1\}$. Чтобы увидеть это, сначала $A < N$. Определим $f_1(n) = 1$ if $n \leq A$ и $f_1(n) = A$ if $n > A$. Функция f_1 удовлетворяет условию и $f_1(N) = A$. Во-вторых, функция $f_2(n) = n$ также удовлетворяет условию и $f_2(N) = N$. Наконец, функция $f_3(n) = N\left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor + 1$ gives $f_3(N) = N+1$ и также удовлетворяет условию. Действительно, имеем

$$f_3(m) + f_3(f_3(n)) = N\left(\left\lfloor \frac{m}{N} \right\rfloor + \left\lfloor \left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor + \frac{1}{N} \right\rfloor\right) + 2 \leq N\left(\left\lfloor \frac{m}{N} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor\right) + 2 \leq N\left\lfloor \frac{m+n}{N} \right\rfloor + 2 = f_3(m+n)+1$$

где мы это использовали $\left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor + \frac{1}{N} < \left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor + 1$ for $N > 1$ и это $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor$ for any real numbers $x, y \in (0, \infty)$.

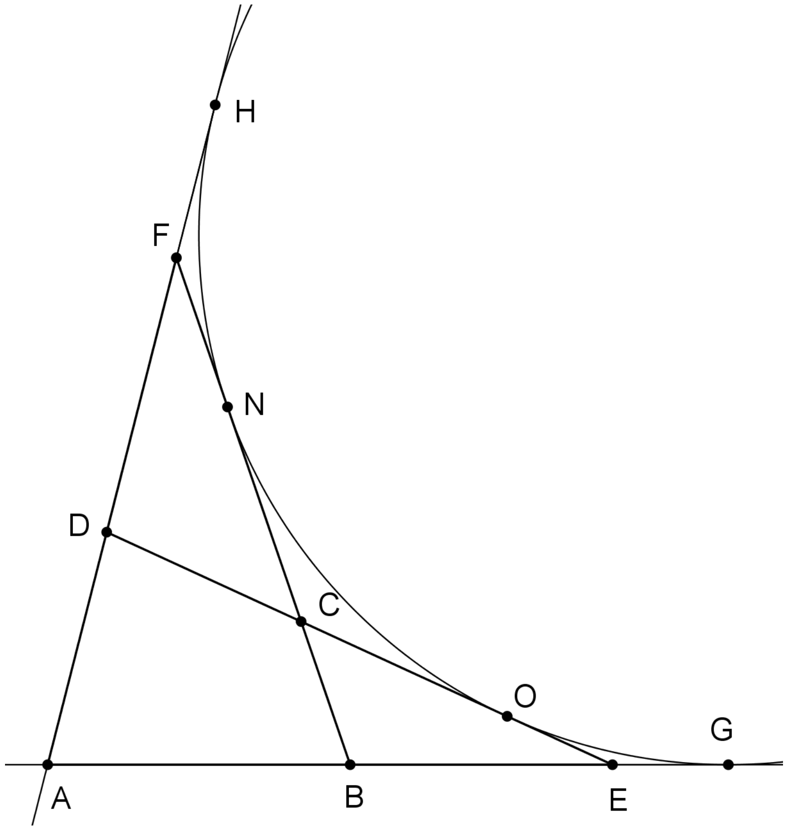
Поскольку $2020 > 1$, то результат - это просто среднее значение всех положительных целых чисел из 1 to 2021, то есть $\frac{2022}{2} = 1011$.

Задача 45. Фермер Карл владеет четырехугольным участком земли с длинами сторон $a = 40$, $b = 20$, $c = 28$, $d = 32$ как на рисунке. По наследству он получает два треугольных куска земли BEC и DCF, которые разграничены первоначальными сторонами его земли и их продолжениями соответственно. Если ему нужен забор длиной 80 для секции $\overline{BE} + \overline{EC}$, то какой длины будет забор для секции $\overline{CF} + \overline{FD}$?



Ответ. 88

Решение. Прежде всего, мы покажем, что треугольники $\triangle BEC$, $\triangle AED$, $\triangle DCF$ и $\triangle ABF$ имеют общую внеописанную окружность, лежащую в углу EAF.



Пусть G точка касания B-окружности треугольника $\triangle BEC$. Расстояние между B и G составляет половину периметра треугольника, то есть, $\overline{BG} = \frac{1}{2}(\overline{CB} + \overline{BE} + \overline{EC})$. Теперь пусть G' be точка касания A-excircle of triangle $\triangle AED$. Используя $a + b = 60 = c + d$ мы получим

$$\begin{aligned}
\overline{AG'} &= \frac{1}{2}(\overline{AE} + \overline{ED} + \overline{DA}) \\
&= \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BE} + \overline{EC} + \overline{CD} + \overline{DA}) \\
&= \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BE} + \overline{EC} + \overline{AB} + \overline{BC}) \\
&= \overline{AB} + \frac{1}{2}(\overline{BE} + \overline{EC} + \overline{BC}),
\end{aligned}$$

и, значит, $G = G'$. Следовательно, точка касания O на стороне CE однозначно определена для обоих треугольников, и из этого следует, что треугольники $\triangle BEC$ и $\triangle AED$ имеют общую вписанную окружность. По аналогии мы можем показать, что треугольники $\triangle DCF$ и $\triangle ABF$ также имеют одну и ту же вписанную окружность. Она даже будет идентична для всех четырех рассматриваемых треугольников, поскольку центр вписанной окружности должн лежать на биссектрисе угла $\angle EAF$ и на биссектрисе угла $\angle ECF$. Поскольку касательные к окружности имеют равную длину, из $\overline{AG} = \overline{AH}$ мы получаем, что треугольники $\triangle AED$ and $\triangle ABF$ имеют периметры равной длины. Следовательно, мы получаем

$$\begin{aligned}
\overline{CF} + \overline{FD} &= \overline{AB} + \overline{BF} + \overline{FA} - \overline{AB} - \overline{BC} - \overline{DA} \\
&= \overline{AE} + \overline{ED} + \overline{DA} - \overline{AB} - \overline{BC} - \overline{DA} \\
&= \overline{BE} + \overline{EC} + \overline{CD} - \overline{BC} \\
&= 80 + 28 - 20 = 88
\end{aligned}$$

так как длина $\overline{CF} + \overline{FD}$.

Задача 46. Определите для какого количества $n \in \{1, \ldots, 2020\}$ уравнение $p^3 + q^3 + r^3 = 3pqr + k$ имеет решение (p, q, r) для некоторых целых положительных p, q, r.

Ответ. 1568

Решение. Запишем уравнение в виде

$$p^3+q^3+r^3-3pqr=\frac{1}{2}(p+q+r)\left((p-q)^2+(q-r)^2+(r-p)^2\right)=k.$$

Обратите внимание, что если последняя скобка ненулевая, то она равна как минимум двум и числа p,q,r не могут быть все равны. Следовательно, $k\geq(1+1+2)\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\geq 4$. Тройка $(p,q,r)=(n,n,n+1)$ является решением для $k=3n+1$ для любого $n\geq 1$. Аналогично, тройка $(p,q,r)=(n,n+1,n+1)$ является решением $k=3n+2$ для любого $n\geq 1$. Если $3\mid k$, то переписав уравнение в виде

$$k=p^3+q^3+r^3-3pqr=(p+q+r)^3-3(p+q+r)(pq+qr+rp)$$

мы также видим $3\mid p+q+r$ и при этом обязательно $9\mid k$. С другой стороны, тройка $(p,q,r)=(n-1,n,n+1)$ является решением уравнения для $k=9n$ для всех $n\geq 2$. Остается исследовать случай $k=9$. Если положительные целые числа p,q,r попарно различны, то мы имеем $k=\frac{1}{2}(p+q+r)\left((p-q)^2+(q-r)^2+(r-p)^2\right)\geq(1+2+3)\frac{1}{2}(1+1+4)=18$ и если $p=q\neq r$, то мы имеем $9=(2p+r)(p-r)^2$ и при $2p+r>1$ мы будем иметь $2p+r=9$ и $|p-r|=1$, что невозможно $r=p\pm 1$ and $9\neq 3p\pm 1$. В итоге все допустимые $k\in\{1,\ldots,2020\}$ могут быть получены путем удаления из набора чисел меньших, чем 4 и кратных 3, а затем сложением кратных 9 больше, чем 9. Следовательно, результат таков $2020-3-672+223=1568$.