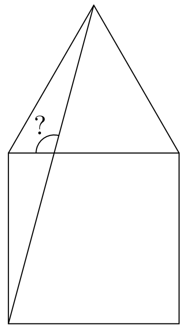
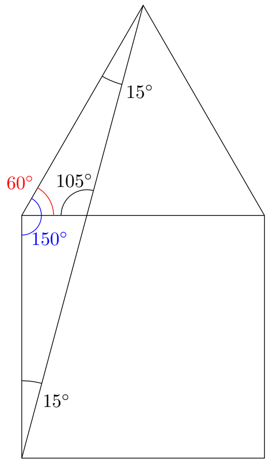
Problem 1. Nakreslený domček pozostáva zo štvorca a rovnostranného trojuholníka s rovnakými dĺžkami strán. Aká je veľkosť vyznačeného uhla v stupňoch?



Result. 105°

Solution. Všimnime si, že vyznačená úsečka je základňou rovnoramenného trojuholníka so veľkosťami uhlov 150°, 15°, 15°. Hľadaný uhol je teda $180° - 60° - 15° = 105°$.



Problem 2. Atléti sa chcú odfotiť. Stoja v jednom rade a každý z nich má na sebe dres očíslovaný kladným celým číslom. Všetky dresy majú rôzne čísla. Fotograf si všimol, že atlét úplne napravo (z pohľadu fotografa) má číslo 72 a číslo ľubovoľného iného atléta delí číslo atléta napravo (z pohľadu fotografa). Koľko najviac atlétov môže byť na fotke?

Result. 6

Solution. Ak má nejaký hráč číslo x, tak hráč naľavo od neho musí mať číslo x vydelené niektorým jeho deliteľom väčším ako 1. Keďže $72 = 2^3 \cdot 3^2$, každý ďalší hráč má súčet exponentov aspoň o jedna menší od hráča napravo a najviac jedno číslo je rovné 1, tak hľadaný počet je $2 + 3 + 1 = 6$. To nájdeme napríklad ako postupnosť $1, 2, 4, 8, 24, 72$.

Problem 3. V hudobnom zbore strunových nástrojov vie každý hrať na violu alebo husle a presne jedna štvrtina všetkých členov vie hrať na oba nástroje. Navyše vieme, že 32 ľudí vie hrať na husle a 23 vie hrať na violu. Koľko členov má hudobný zbor?

Result. 44

Solution. Nech n označuje hľadaný počet členov. Keď sčítame 23 a 32 dostaneme počet členov, ale započítali sme dvakrát každého hráča, ktorý vie hrať na oba nástroje. Tých je je štvrtina, takže

$$23 + 32 = 55 = n + \tfrac{n}{4} = \tfrac{5}{4}n,$$

preto $n = 44$.

Problem 4. Tom vynásobil päť po sebe idúcich kladných celých čísel a dostal číslo T. Jerry spravila to isté, ale jej postupnosť začala s číslom o jedna väčším ako Tomova postupnosť a dostala súčin J. Ak $T/J = 4/5$, aké je najmenšie z čísel, ktoré Jerry násobila?

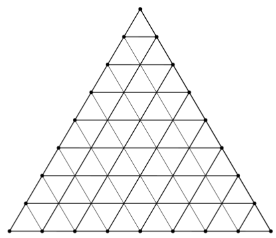
Result. 21

Solution. Nech n je Tomovo prvé číslo, potom $T = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$. Jerry začala s číslom $n+1$ takže $J = (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$. Máme

$$\frac{4}{5} = \frac{T}{J} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} = \frac{n}{n+5}.$$

Vyriešením rovnice dostaneme $n = 20$. Keďže Jerryno najmenšie číslo je o jedna väčšie, odpoveď je 21.

Problem 5. Každému malému trojuholníku priradíme číslo, ktoré zodpovedá počtu malých trojuholníkov, s ktorými susedí stranou. Určte súčet všetkých týchto čísel.



Result. 168

Solution. Na obrázku je 18 trojuholníkov, ktoré majú len dvoch susedov a 3 trojuholníky, ktoré majú iba jedného suseda. Zostávajúcich $64 - 18 - 3 = 43$ trojuholníkov má všetkých troch susedov, preto je výsledok $3 \cdot 43 + 2 \cdot 18 + 1 \cdot 3 = 168$.

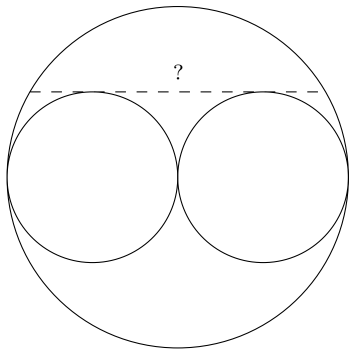
Problem 6. Nájdite najväčšie kladné celé číslo n také, že $n^2 - 5n + 6$ je prvočíslo.

Result. 4

Solution. Keďže pre ľubovoľné celé číslo je $n(n-5)$ súčin párneho a nepárneho čísla, tak tvrdíme, že $n^2 - 5n + 6 = n(n-5) + 6$ je párne. Keďže jediné párne prvočíslo je 2, dostaneme rovnicu $n^2 - 5n + 6 = 2$, ktorej riešenia sú 1 a 4. Hľadané je väčšie z nich, teda 4.

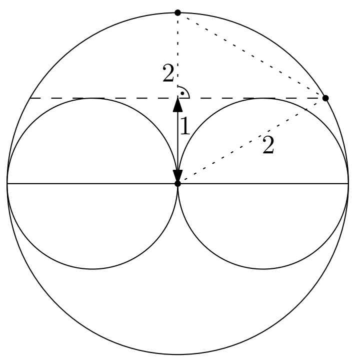
Iné riešenie je, že si všimneme, že rozklad $n^2 - 5n + 6 = (n-2)(n-3)$ môže byť prvočíslo iba ak jedna zo zátvoriek je ± 1. Najväčšie také číslo je teda 4 a skúškou skutočne dostaneme hodnotu 2, čo je prvočíslo.

Problem 7. Dve kružnice s polomerom 1 sa dotýkajú v strede veľkej kružnice, ktorá sa dotýka dvoch malých kružníc (viď obrázok). Nájdite dĺžku čiarkovanej úsečky, ktorá je spoločnou dotyčnicou oboch malých kružníc a jej konce ležia na veľkej kružnici ako na obrázku.



Result. $2\sqrt{3} \doteq 3.46410$

Solution.



Čiarkovaná úsečka leží 1 „nad“ spojnicou stredov kružníc. Stred veľkej kružnice, jeden z koncových bodov čiarkovanej úsečky a bod "na vrchu"veľkej kružnice tvoria rovnostranný trojuholník s dĺžkami strán 2. Výsledok je dvojnásobok dĺžky výšky tohto trojuholníka. Tú spočítame pomocou Pytagorovej vety $x^2 + 1^2 = 2^2$ a dostaneme výsledok $2\sqrt{3} \doteq 3.46410$

Problem 8. Štyria matematici sedeli pri stole a objednali si veľkú misku praclíkov. Pedro odišiel na toaletu. Každú minútu, čo bol Pedro na toalete, si Adam, Matúš a Jožo vzali jeden praclík, rozdelili ho na tretiny a každý zjedol svoju časť. Po niekoľkých minútach sa Pedro vrátil a všetci ďalej jedli jeden praclík za minútu, ale Pedro vždy zjedol 2/5 praclíka, kým ostatní zjedli po 1/5 praclíka. Po nejakej dobe si Adam uvedomil, že Pedro zjedol presne toľko praclíkov, čo on. Aký je pomer času, kedy bol Pedro preč, k času, kedy bol Pedro pri stole?

Result. 3/5

Solution.

Nech t_n je čas, kedy Pedro nebol pri stole a t_p čas, kedy bol prítomný. Adam a Pedro zjedli rovnaké množstvo praclíkov, čiže

$$\frac{2}{5}t_p = \frac{1}{3}t_n + \frac{1}{5}t_p \Rightarrow \frac{t_n}{t_p} = \frac{3}{5}.$$

Problem 9. Zmenáreň v Prahe ponúka tieto mince: 1 Česká koruna za 40 centov, 2 koruny za 50 centov, 5 korún za 1 euro, 10 korún za 2 eurá, 20 korún za 4,1 eura a 50 korún za 9,9 eura. Marek si chce vymeniť všetkých 11,8 eur, ktoré má, ale nechce si kúpiť viac, než jednu mincu z každého druhu. Koľko korún dostane? Nájdite súčet všetkých riešení.

Result. 58

Solution. Hľadáme riešenie rovnice

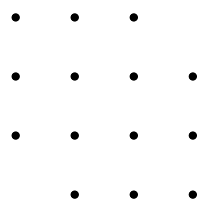
$$11,8 = 0,4 \cdot x_1 + 0,5 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 + 4,1 \cdot x_5 + 9,9 \cdot x_6,$$

pričom všetky x_i musia byť z množiny $\{0,1\}$. Keďže $0,4 + 0,5 + 1 + 2 + 4,1 < 11,8$, vieme, že x_6 musí byť 1. Rovnica bude určite vyzerať

$$1,9 = 0,4 \cdot x_1 + 0,5 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 + 4,1 \cdot x_5.$$

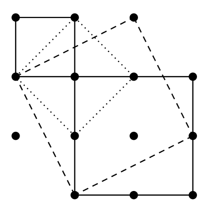
Výberom $x_4 = 1$ alebo $x_5 = 1$ by bola cena vyššia než 11.8 eur, musíme zvoliť $x_4 = x_5 = 0$. Keďže $0,4 + 0,5 + 1 = 1,9$, jediné riešenie je $x_1 = x_2 = x_3 = x_6 = 1$ a $x_5 = x_4 = 0$. Marek dostane $1 + 2 + 5 + 50 = 58$ Českých korún.

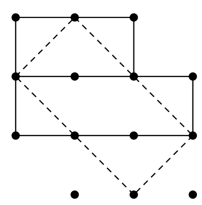
Problem 10. V štvorčekovej sieti s jednotkovou dĺžkou strany, je vyznačených týchto štrnásť vrcholov. Koľko obdĺžnikov sa dá nakresliť, ak použijeme nejaké štyri vyznačené vrcholy ako vrcholy obdĺžnika?



Result. 27

Solution. Sedem rôznych typov obdĺžnikov môžeme nájsť:





Máme 7 jednotkových štvorcov, 2 štvorce veľkosti 2×2, 4 štvorce ako ten nakreslený bodkovanou čiarou a jeden štvorec ako ten nakreslený čiarkovanou čiarou. Navyše máme 8 obdĺžnikov veľkosti 1×2, 2 obdĺžniky veľkosti 1×3 a 2 obdĺžniky ako ten, čo je nakreslený čiarkovanou čiarou.

Dokopy spočítame $7 + 2 + 4 + 2 + 8 + 2 + 2 = 27$ obdĺžnikov.

Problem 11. Aká je hodnota kladného celého čísla n takého, že najmenší spoločný násobok 60 a n je o 777 väčší ako najväčší spoločný deliteľ 60 a n?

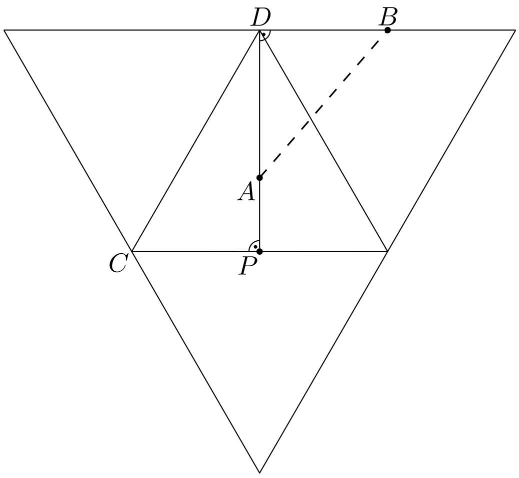
Result. 39

Solution. Chceme vyriešiť rovnicu $\mathrm{nsn}(60, n) = 777 + \mathrm{NSD}(60, n)$. Najväčší spoločný deliteľ musí byť deliteľ 60, teda musí to byť jedno z nasledujúcich čísel $1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60$. Z týchto čísel iba 3 môže byť pripočítané k 777 tak, aby sme dostali číslo deliteľné 60, preto $\mathrm{NSD}(60, n) = 3$ a $\mathrm{nsn}(60, n) = 780$. Potom $60 \cdot n = 3 \cdot 780$, teda $n = 39$.

Problem 12. Mravec Lili sedí v strede steny pravidelného štvorstena so stranou dĺžky 1. Chce sa dostať po povrchu štvorstena do stredu nejakej hrany, ktorá neohraničuje stenu, na ktorej je (t.j. cieľová hrana má s počiatočnou stenou práve jeden spoločný bod a to vrchol štvorstena). Aká je najmenšia vzdialenosť, ktorú musí mravec Lili prekonať?

Result. $\sqrt{7/12} \doteq 0.76376$

Solution.



Rozbaľme plášť štvorstena ako je na obrázku. Lili sedí v bode A a chce prísť napríklad do bodu B. Keďže rozbalený povrch je v rovine, najkratšia cesta je úsečka spájajúca tieto dva body (čiarkovaná úsečka). Spočítajme $|PD|$ pomocou Pytagorovej vety $|PD|^2 = |CD|^2 - |CP|^2 = 1^2 - (1/2)^2 = 3/4$, teda $|PD| = \sqrt{3/4}$, a preto

$$|AD| = \frac{2}{3}|PD| = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{4}}.$$

Keďže $|DB| = 1/2$, môžeme znovu použiť Pytagorovu vetu a spočítať

$$|AB|^2 = |AD|^2 + |DB|^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12},$$

čo nám dáva riešenie

$$|AB| = \sqrt{\frac{7}{12}} \doteq 0.76376.$$

Problem 13. Kamarátky Anežka, Róberta, Fánka a Timka si vytiahli každá jednu zo štyroch kartičiek, na ktorých boli čísla 3, 6, 9 a 12 bez opakovania. Vieme, že práve dve z nich sú klamárky. Po vytiahnutí kartičiek medzi kamarátkami prebehol nasledujúci rozhovor:

- Anežka: Mám dvakrát toľko, čo Timka.
- Róberta: Mám trikrát toľko, čo Timka.
- Fánka: Mám štyrikrát toľko, čo Timka.
- Timka: Nemám najmenej.

Aký je súčin dvoch čísel, ktoré dostali klamárky?

Result. 27

Solution. Ak by Timka mala 3, tak by klamala. Potom by však bola už len jedna neznáma klamárka, ale to nie je možné, pretože by si dve dievčatá museli potiahnuť rovnaké číslo. Ak by Timka potiahla 9 alebo 12, museli by byť všetky ostatné dievčatá klamárky pretože by nemohli mať žiaden násobok. Timka má teda číslo 6 a potom jediná z kamarátok, ktorá hovorí pravdu môže byť Anežka a má 12. Róberta a Števka sú klamárky a majú čísla 3 a 9 v nejakom poradí. Ich súčin je teda číslo 27.

Problem 14. Nájdi najmenšie kladné celé číslo také, že má presne 24 kladných deliteľov a presne 8 z nich je nepárnych.

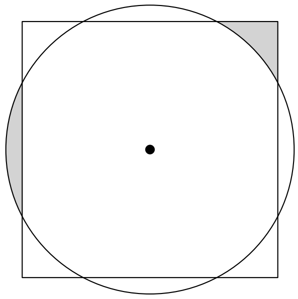
Result. 420

Solution. Ak máme kladné celé číslo n s prvočíselným rozkladom $n = {p_1}^{a_1} \cdots {p_k}^{a_k}$ také, že p_i sú rôzne prvočísla, potom počet kladných deliteľov n je rovný $(a_1 + 1) \cdots (a_k + 1)$.

Zrejme počet nepárnych deliteľov môžeme nájsť vypustením všetkých faktorov 2 v prvočíselnom rozklade n. Pretože $24 = 8 \cdot 3$ a vieme, že počet nepárnych deliteľov je 8, tak dostávame, že mocnina 2 musí byť práve 2. Dvojku máme teda vybavenú a pozrime sa na ostatné prvočísla.

Keďže $2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8$, musíme uvažovať jednu z nasledujúcich možností: tri najmenšie prvočísla každé v prvej mocnine, najmenšie v tretej mocnine s druhým najmenším v prvej mocnine alebo najmenšie v siedmej mocnine. Ale $3 \cdot 5 \cdot 7 < 3^3 \cdot 5 < 3^7$, takže najmenšie také n je rovné $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$.

Problem 15. Kružnica a štvorec zdieľajú stred. Ak šedé oblasti majú rovnaký obsah, aký je pomer strany štvorca ku polomeru kružnice?



Result. $\sqrt{\pi} \doteq 1.77246$

Solution. Keďže šedé oblasti majú rovnaký obsah, tak kružnica a štvorec majú tiež rovnaký obsah, pretože tento obsah je rovný prieniku plus štyrom šedým oblastiam (pre štvorec aj pre kružnicu). Ak a označuje dĺžku strany štvorca a r polomer kružnice, potom máme $a^2 = r^2\pi$, a preto $a : r = \sqrt{\pi}$.

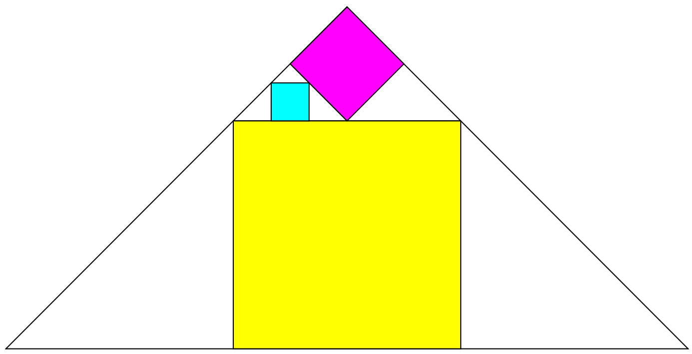
Problem 16. Miloš napísal postupnosť $1, 2, 3, \ldots, 20$, a potom dopísal znaky plus a mínus medzi každú dvojicu po sebe idúcich čísel tak, že výsledný súčet je rovný 192. Koľkými spôsobmi to mohol spraviť?

Result. 5

Solution. Všimnime si, že 1 je kladné, keďže mínuska môžeme vložiť iba medzi čísla.

Ak všetky znaky sú plus, tak súčet je 210. Miloš má ale o 18 menej, takže musí umiestniť znak mínus pred čísla so súčtom dohromady 9. Na výber má len jednu trojicu $(2, 3, 4)$, tri dvojice $(2, 7)$, $(3, 6)$ a $(4, 5)$ a jedno samostatné číslo 9. Preto má iba 5 možností ako to mohol spraviť.

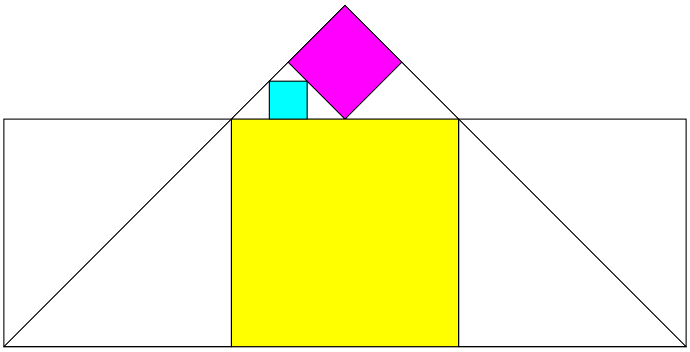
Problem 17. Marekovi sa pokazila tlačiareň. Ako testovaciu stránku má nasledujúci obrázok pozostávajúci z rovnoramenného pravouhlého trojuholníka a troch štvorcov:



Akú časť trojuholníka zaberá najmenší (cyan-ový) štvorec?

Result. 1/81

Solution. Kľúčové pozorovanie je, že dĺžka strany žltého štvorca je jedna tretina dĺžky základne trojuholníka. Vieme na to prísť tak, že si jednoducho dokreslíme dva ďalšie štvorce do obrázka.



Z tohto usúdime, že obsah žltého štvorca tvorí

$$2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{4}{9},$$

trojuholníka. Použitím rovnakého pozorovania na cyan-ový štvorec dostaneme, že dĺžka jeho strany je jedna šestina strany žltého štvorca, preto ich pomer obsahov je $1/36$. Hľadaný pomer dostaneme vynásobením týchto dvoch pomerov a dostaneme $1/81$.

Problem 18. Nájdite súčet všetkých kladných celých čísel, ktoré nemôžu byť zapísané ako $2a + 3b$, kde a a b sú nesúdeliteľné kladné celé čísla (kladné celé čísla m a n sú nesúdeliteľné ak ich najväčší spoločný deliteľ je rovný 1).

Result. 26

Solution. Čísla $1, 2, 3, 4, 6, 10$ nie je možné zapísať v zadanom tvare, keďže $a, b \geq 1$ a najväčší spoločný deliteľ a a b je 1. Keď sa pozrieme na čísla zapísateľné v zadanom tvare, môžeme si všimnúť, že pomocou dvojíc (a, b) vo forme $(a, 1)$ vieme zapísať všetky nepárne čísla $n \geq 5$, pomocou dvojíc vo forme $(2k - 3, 2)$ zapíšeme všetky čísla $n = 4k \geq 8$ a pomocou dvojíc $(2k - 5, 4)$ zapíšeme čísla $n = 4k + 2 \geq 14$. Súčet nezapísateľných čísel je preto $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 10 = 26$.

Problem 19. Polynóm (mnohočlen) voláme *drsný*, ak má dva celočíselné korene s rozdielom jeden, všetky jeho koeficienty sú celé čísla a ich súčet je rovný 2020. Koľko existuje *drsných* kvadratických polynómov (kvadaratický polynóm je výraz v tvare $ax^2 + bx + c$)?

Result. 4

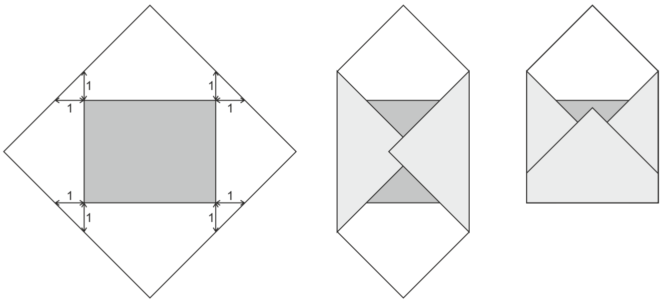
Solution. Keďže *drsný* polynóm má dva korene, môže byť zapísaný ako $c(x - a)(x - b)$, kde a, b sú jeho celočíselné korene a c je jeho prvý koeficient (tiež celé číslo). Súčet koeficientov sa dá jednoducho vyjadriť ako $c(a - 1)(b - 1)$. Keďže ten sa rovná $2020 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$ a keďže $(a - 1)$ a $(b - 1)$ majú rozdiel jedna, ostávajú nám štyri možnosti, konkrétne $2020 = 1010 \cdot 1 \cdot 2$, $2020 = 1010 \cdot (-1) \cdot (-2)$, $2020 = 101 \cdot 4 \cdot 5$ a $2020 = 101 \cdot (-4) \cdot (-5)$.

Problem 20. Rýchlik R 614 *Krtkova torta* mal 40 vozňov očíslovaných od 1 po 40, každý s kapacitou 40 cestujúcich. Na začiatku sedel vo vozni číslo 1 jeden cestujúci, vo vozni číslo 2 dvaja, atď., až po štyridsať cestujúcich vo vozni číslo 40. Posledný vozeň číslo 40 však počas jazdy začal horieť a všetci cestujúci sa z neho presunuli do vozňov s nižšími číslami. Obsadzovali pritom vždy prvé voľné miesto, ktoré našli a ak bol vozeň už plný, pokračovali do nasledujúceho vozňa s nižším číslom. Ďalej po ceste začali postupne horieť aj vozne číslo $39, 38, \ldots, 23$ a cestujúci sa vždy presunuli do vozňov s nižšími číslami. Koľko cestujúcich bolo vo vozni číslo 2 potom, ako zhorel vozeň číslo 23?

Result. 19

Solution. Vo vlaku je dokopy $40 \cdot 41/2 = 820$ cestujúcich. Keď má vlak už len 22 vozňov, jeho posledných 20 vozňov musí byť plných, inak by vo vlaku bolo najviac $1 + 2 + 39 + 19 \cdot 40 = 802$ cestujúcich. V prvých dvoch vozňoch preto sedí dokopy 20 cestujúcich a keďže v prvom vozni sedí stále jeden cestujúci, vo vozni číslo 2 musí sedieť 19 cestujúcich.

Problem 21. Janko si nemôže kúpiť obálky, preto si ich chce vyrobiť sám. Na výrobu obdĺžnikovej obálky používa Janko štvorcový papier s uhlopriečkou dĺžky 30 cm. Najprv na ňom preloží ľavý a pravý roh, potom preloží spodný roh a obálku zatvorí preložením vrchného rohu. Aby mohol obálku dobre zalepiť musí zachovať prekryvy s dĺžkou presne 1 cm tak, ako je to naznačené na obrázku a po zatvorení obálky nesmie horný roh presahovať spodnú hranu obálky. Aká je najväčšia možná šírka obálky?



Result. 18

Solution. Nech strany obálky sú a (šírka) a b (výška) a uhlopriečka štvorcového papiera je d. Všimnime si, že trojuholníky tvorené rohmi papiera a zohnutými hranami sú pravouhlé a rovnoramenné, a preto je výška na preponu polovičnej dĺžky ako prepony. Ľahko dopočítame, že $d = b + a + 2$. Aby sa papier správne poskladal, musí platiť nerovnosť $\frac{d-b}{2} \leq b$, teda $b \geq \frac{d}{3}$ musí platiť. Tieto vzťahy dokopy dávajú $a \leq d - \frac{d}{3} - 2 = \frac{2}{3}d - 2 = 18$

Problem 22. Kika si vybrala tri kladné celé čísla a, b, c a spočítala tri súčty dvojíc $a+b$, $b+c$, $c+a$. Získala tým tri rôzne druhé mocniny celých čísel. Aká je najmenšia možná hodnota $a+b+c$?

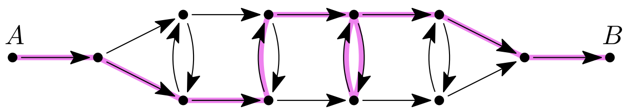
Result. 55

Solution. Nech $a+b=d^2$, $b+c=e^2$, $c+a=f^2$, pričom d, e, f sú (zo zadania rôzne) kladné celé čísla. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že platí $d < e < f$. Keďže sú Kikine čísla kladné, platí:

$$d^2 + e^2 = a + c + 2b > a + c = f^2. \tag{$\heartsuit$}$$

Hľadaná hodnota je rovná $(d^2 + e^2 + f^2)/2$, potrebujeme preto nájsť trojicu druhých mocnín spĺňajúcich ($\heartsuit$), ktorých súčet bude najmenší možný a párny zároveň. Taká trojica je $(d^2, e^2, f^2) = (25, 36, 49)$, a preto správna odpoveď je 55.

Problem 23. Koľko rôznych ciest vedie v zobrazenom diagrame z bodu A do bodu B takých, že každou šípkou prechádzajú najviac raz? (Jedna taká cesta je nakreslená v diagrame fialovou)



Result. $162 = 2 \cdot 3^4$

Solution. Každá cesta je jednoznačne určená týmito výbermi: na začiatku môže ísť hore alebo dole (2 možnosti). Následne pri každom zo štyroch vertikálnych párov šípok: cesta môže nepoužiť vertikálnu šípku, použije jednu z páru šípok alebo použije obe (3 možností pre každý pár). Odpoveď je preto $2 \cdot 3^4 = 2 \cdot 81 = 162$.

Problem 24. Kladné celé číslo nazveme *rozdielové*, ak každé dve po sebe idúce cifry majú rozdiel v absolútnej hodnote 3. Koľko štvorciferných *rozdielových* čísel existuje? Číslo nezačína nulou.

Result. 29

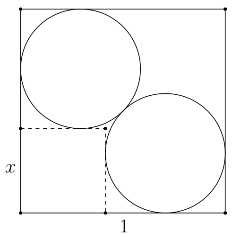
Solution. Zapíšeme čísla v kóde: napíšeme R (rastie) ak cifra napravo je väčšia ako naľavo a K (klesá) ak je menšia. Napríklad číslo 1474 zapíšeme ako RRK a číslo 1414 zapíšeme ako RKR.

Máme sedem možností, ktorými vieme čísla zapísať. Možnosť RRR nie je možná, lebo nemôžme začínať nulou. Každé číslo je potom jednoznačne dané začiatočnou cifrou.

kód	RRR	RRK	RKR	RKK	KRR	KRK	KKR	KKK
možné prvé cifry	žiadna	1–3	1–6	3–6	3–6	3–9	6–9	9

Dokopy $3 + 6 + 4 + 4 + 7 + 4 + 1 = 29$

Problem 25. Máme dve kružnice, ktoré sa navzájom dotýkajú a taktiež sa dotýkajú dvoch strán jednotkového štvorca (viď obrázok). Vypočítajte dĺžku strany čiarkovaného štvorca, ktorý zdieľa roh s jednotkovým štvorcom a dotýka sa kružníc.



Result. $\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \doteq 0.41421$

Solution. Nech x je dĺžka strany malého štvorca. Polomer kružníc je potom $\frac{1-x}{2}$. Polomer kružníc získame taktiež z diagonály jednotkového štvorca - rozdelíme diagonálu na štyri časti pomocou dvoch stredov kružníc a miestom ich dotyku. Takéto delenie nám dá dve úsečky dĺžky r a dve úsečky dĺžky $\sqrt{2}r$. Dokopy teda

$$\sqrt{2} = 2r + 2\sqrt{2}r = (1-x)(1+\sqrt{2})$$

a vyriešením rovnice máme $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$.

Problem 26. Reálne čísla $x_1, x_2, \ldots, x_{2020}$ majú nasledujúce vlastnosti:

- Keď sčítame ľubovoľných 2019 z nich a vynecháme ľubovoľné x_i s nepárnym indexom i, výsledok bude 2.
- Keď sčítame ľubovoľných 2019 z nich a vynecháme ľubovoľné x_i s párnym indexom i, výsledok bude 0.

Koľko je suma všetkých 2020 čísel?

Result. 2020/2019

Solution. Keď sčítame všetky rovnice z podmienok dostaneme

$$2019(x_1 + x_2 + \cdots + x_{2020}) = 1010 \cdot 2 + 1010 \cdot 0 = 2020,$$

Hľadaný výsledok je preto 2020/2019.

Problem 27. Dvaja hráči hrajú hru, kde sa striedajú v ťahoch. Každý ťah spočíva v zmenení kladného celého čísla n na iné kladné celé číslo z rozsahu $[\frac{n}{3}, \frac{n}{2}]$. Hráč, ktorý nemôže spraviť ťah prehráva. Pre koľko začiatočných čísel z rozsahu $[1, 1000]$ vie začínajúci hráč vždy vyhrať bez ohľadu na ťahy súpera?

Result. 620

Solution. Nazvime číslo *vyhrávajúcim*, ak taká stratégia zaručí víťazstvo hráčovi, ktorý je na ťahu a ostatné čísla nazvime *prehrávajúce*. Všimnime si, že n je vyhravajúcim, ak je nejaké prehrávajúce číslo v intervale $[\frac{n}{3}.\frac{n}{2}]$. Na druhú stranu číslo n je prehrávajúce iba ak všetky čísla z intervalu $[\frac{n}{3}, \frac{n}{2}]$ sú vyhrávajúce (zahrňujúc možnosť, že už nemáme žiadne platné číslo v rozsahu).

Očividne 1 je prehrávajúce číslo, preto podľa spomínaných pravidiel čísla 2 a 3 sú vyhrávajúce. Toto implikuje, že čísla 4 až 7 sú prehrávajúce, keďže pre všetky z nich platí $[\frac{n}{3}, \frac{n}{2}] \cap \mathbb{N} \subseteq \{2, 3\}$. Pokračujúc v tomto procese dostaneme, že čísla $44, \ldots, 129$ a $260, \ldots, 777$ sú vyhrávajúce. Dokopy máme teda 620 vyhrávajúcich čísel.

Problem 28. Dve kružnice s priemermi $|AB| = 17$ a $|AC| = 7$ majú dva spoločné body A a D. Navyše vieme, že $|CD| = 4$. Uvažujte všetky možné vzdialenosti stredov dvoch kružníc a vypočítajte ich súčin.

Result. 60

Solution. Obe kružnice sú Tálesové nad priemermi AB a AC, preto pri vrchole D sú pravé uhly $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle ADB| = 90^\circ$ a B, C, D ležia na jednej priamke. Pomocou Pytagorovej vety spočítame $|BD|^2 = 17^2 - (7^2 - 4^2) = 16^2$, a potom $|BC| = 16 \pm 4$ (v skutočnosti pravé uhly môžu byť totožné alebo tvoriť priamku). Spojením stredov kružníc dostaneme podobný trojuholník (v pomere $\frac{1}{2}$) s trojulníkom ABC), hľadanou vzdialenosťou je buď $20/2 = 10$ alebo $12/2 = 6$ a hľadaný súčin je 60.

Problem 29. Sedem trolejbusov chodí medzi štrnástimi zastávkami na trase. Každý trolejbus začína na nejakej zastávke a pohybuje sa jedným smerom až kým nedosiahne poslednú zastávku, kde sa otočí a pokračuje opačným smerom. Všetky trolejbusy majú rovnakú konštantnú rýchlosť a prejdu presne jednu zastávku za minútu. Kubo ich umiestnil tak, že nasledujúce podmienky sú splnené:

1. na každej zastávke je najviac jeden trolejbus,
2. na každej zastávke bude najviac jeden trolejbus bezohľadu na to, akým smerom sa trolejbusy vydali.

Koľkými možnými spôsobmi to Kubo mohol spraviť? Trolejbusy sú nerozlíšiteľné.

Result. 20

Solution. Trolejbusy nemôžu byť vo vzdialenosti dvoch staníc. Očividne párne a nepárne stanice sa správajú nezávisle a každá môže pokryť najviac 4 trolejbusy (a umiestniť štyri trolejbusy je jednoznačné). Preto môžeme mať na párnych štyri trolejbusy a na nepárnych tri trolejbusy alebo naopak. Riešenie bude tvaru $2 \cdot N$. Keďže sa bavíme iba na párnych alebo iba na nepárnych vieme riešenie preniesť na hľadanie počtu možností N ako usporiadať tri trolejbusi do sedem zastávok tak, že ich bude deliť jedno miesto. Najprv položíme štyri prázdne zastávky a potom tri trolejbusy medzi prázdne zastávky. Prvý trolejbus môžme umiestniť na 5 pozícií druhý na 4, tretí na 3. Keďže trolejbusy sú zameniteľné $N = (5 \cdot 4 \cdot 3)/(3 \cdot 2 \cdot 1) = 10$. Preto výsledok je $2 \cdot 10 = 20$.

Problem 30. Majo napísal knihu s 2020 stranami očíslovanými $1, 2, 3, \ldots 2020$. Po kontrole pridal na začiatok knihy abstrakt s 11 stranami. Koľko číslic musí prepísať, aby bolo číslovanie správne? Číslica zo starého číslovania môže byť použitá iba ak má rovnakú pozíciu (jednotky, desiatky, stovky) a nové číslice, ako napríklad 1, ktorá vznikne pri zmene $95 \to 106$, sa nepočítajú.

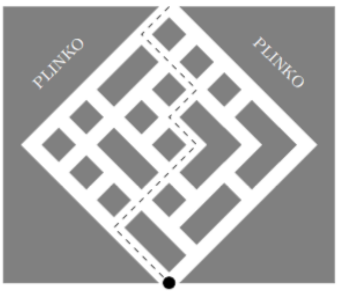
Result. 4251

Solution.

Najprv spočítajme koľko číslic zostane rovnakých. Je celkom ľahko vidno, že pričítanie 11 zmení všetky číslice jedno- aj dvojciferných čísel. Každá nezmenená číslica musí byť na pozícii stoviek alebo tisícok. Ak sú posledné dve číslice medzi 00 a 88, prvé dve číslice sa nezmenia. Máme teda stabilnú číslicu na pozícii stoviek pre 89 čísel. Navyše všetky čísla od 1000 do 1988 majú ešte jednu stabilnú číslicu — na pozícii tisíc. Do čísla 1999 teda máme $19 \cdot 89 + 989 = 2680$ číslic, ktoré zostanú rovnaké. Od 2000 do 2020 máme 21 čísel, ktoré nezmenia číslicu na pozícii stovky ani tisícky. To nám dáva $2 \cdot 21 = 42$ stabilných číslic.

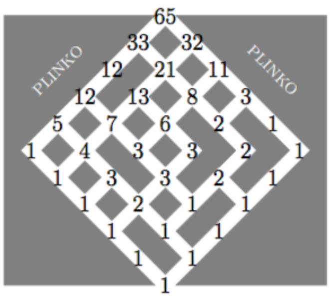
Koľko číslic máme spolu? Od 1 do 9 máme 9 číslic. Od 10 do 99 máme $90 \cdot 2$ číslic. Od 100 do 999 je $900 \cdot 3$ číslic a od 1000 do 2020 máme $1021 \cdot 4$ číslic. Spolu teda máme 6973 číslic, takže treba prepísať $6973 - 2722 = 4251$ číslic, aby číslovanie sedelo.

Problem 31. Guľôčka je vpustená do bludiskovej krabičky a kotúľa sa kým nevyletí z krabičky na spodku. Koľkými možnými spôsobmi mohla guľôčka prejsť cez bludisko? Na obrázku bludiska je vyznačená jedna možná trasa.



Result. 65

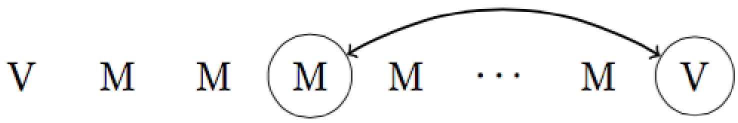
Solution. Označme na každej križovatke počet možných ciest, ktorými sa z tej križovatky môže dostať guľôčka dole. Začneme odspodu, kde je len jedna cesta a označíme to až po vrchol. Každé číslo je súčtom dvoch čísel pod ním.



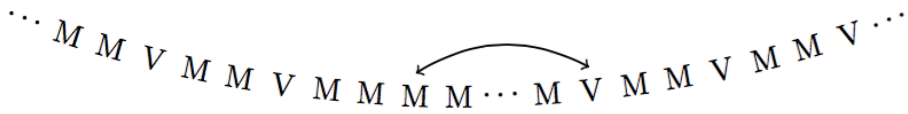
Problem 32. Kráľ a jeho 100 rytierov sedí okolo okrúhleho stola. Vegetariáni dostali syr a všetci ostatní kura, ale kráľ má menšiu porciu kuraťa ako rytier po jeho lavici, preto kráľ dal rozkaz aby všetci posunuli svoj tanier doprava. Teraz má kráľ uspokojujúcu porciu ale 64 rytierov má nesprávne jedlo, takže si všetci posunuli porciu doprava znovu. Znovu má kráľ menšiu porciu ako rytier naľavo, a preto do tretice všetci posunuli svoju porciu doprava. Teraz už len dvaja rytieri majú zlú porciu (a nie kráľ), takže si títo dvaja vymenia tanier a hostina sa môže začať. Koľko z kráľových rytierov je kura?

Result. 68

Solution. Všimnime si, že kráľ a traja rytieri po jeho ľavici sú všetci mäsožravci, takže po treťom posunutí prvé vegetariánske jedlo naľavo od kráľa bolo podané nejakému mäsožravcovi a prvý vegetarián po kráľovej pravici určite dostal kura. To sú tí dvaja, ktorí si na konci musia vymeniť taniere, aby všetci boli spokojní.



Všetci ostatní majú rovnaké jedlo ako človek o tri miesta vľavo. Takže rozloženie vyzeralo takto:

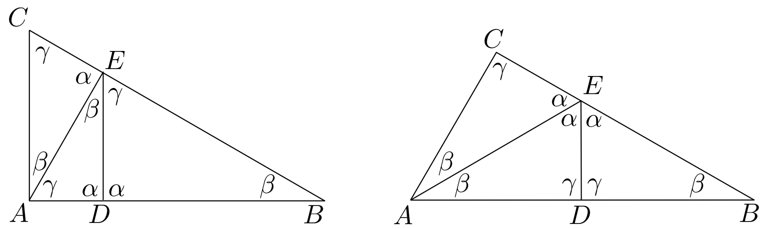


Každý vegetarián a každý mäsožravec napravo od vegetariána mal zlé jedlo po prvom posunutí, takže vegetariánov bolo $64/2 = 32$. Ostatných $100 - 32 = 68$ rytierov (ako aj kráľ) jedlo kura.

Problem 33. Veronika si nakreslila svoj obľúbený trojuholník ABC. Lili jej potom dočmárala body D a E postupne na stranách AB a BC tak, že trojuholníky ABC, AEC, ADE, BDE sú si podobné. Aký je súčet všetkých možných hodnôt uhla BAC v stupňoch?

Result. 150

Solution. Všetky uhly musia byť α, β alebo γ, podľa štandardnej notácie trojuholníka ABC. Očividne uhol EAC je β a uhol AEC je α. Uhly EDA a EDB dokopy dávajú 180°, takže musia byť buď oba α alebo oba β a navyše sú oba pravé. Rýchla kontrola nám dáva, že oba sú α a dostaneme validnú konfiguráciu. Druhá možnosť nám dáva tiež validnú konfiguráciu, kde $\alpha = 60°$, preto je výsledok $90° + 60° = 150°$.



Problem 34. Piati robotníci si plánujú rozvrh práce na najbližších 10 nocí. Každú noc pracujú práve dvaja robotníci a nik nepracuje dve noci za sebou. Ak niekedy pracuje spolu každá dvojica pracovníkov, tak koľko rôznych rozvrhov existuje?

Result. 240

Solution. Nakreslime si graf, v ktorom vrcholy predstavujú jednotlivých pracovníkov a hrany predstavujú spoločnú šichtu. Riešením pôvodnej úlohy je potom počet rôznych nakreslení tohto grafu, pričom ktorékoľvek dve hrany, ktoré sme nakreslili po sebe, nemajú spoločný vrchol. Uvedomme si, že tento graf sa naozaj skladá z piatich vrcholov a desiatich $(5 \cdot 4/2 = 10)$ hrán. Prvú hranu vieme zvoliť 10 spôsobmi. Druhú hranu vieme zvoliť následne tromi spôsobmi. Pri kreslení tretej a štvrtej hrany máme v každom prípade 2 možnosti. Nech si volíme prvé štyri hrany akokoľvek, vždy sa dostaneme do ekvivalentnej situácie. Pri kreslení piatej hrany sa delia možnosti nakreslenia grafu na dve vetvy. Môžeme vytvoriť z prvých piatich hrán cyklus alebo vytvorím cyklus zo štyroch hrán s akýmsi chvostíkom. Pri prvej vetve máme pri kreslení zvyšných hrán postupne 1, 2, 1, 1 a 1 možnosti nakreslenia hrany. V prípade druhej vetvy kreslenia grafu nevieme nakresliť zvyšných 5 hrán tak, aby za sebou idúce hrany nemali spoločný vrchol. Problémom je koniec "chvostíka". Na nakreslenie grafu máme

$$10 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 240$$

možností a teda existuje 240 rôznych pracovných rozvrhov.

Problem 35. Lucy má trojuholník so stranami dĺžok 32, 50 a x. Navyše existuje podobný trojuholník, ktorý má dve strany rovnako dlhé ako ten, ktorý ma Lucy, ale nie je zhodný. Nájdite súčet všetkých možných hodnôt dĺžky strany x.

Result. 27721/200

Solution. Nech $a < b < c <$ sú dĺžky strán Lucynho trojuholníka. Popísaná situácia môže nastať iba ak $a : b = b : c$. Teraz máme tri možnosti: (1) $a = 32$, $b = 30$, ktorá vedie na $x = c = 50 \cdot \frac{50}{32}$; (2) $a = 32$, $c = 50$, ktorá vedie na $x = b = \sqrt{32 \cdot 50} = 40$; (3) $b = 32$, $c = 50$, ktorá vedie na $x = a = 32 \cdot \frac{32}{50}$. Je jednoduché overiť, že žiadna z týchto možností neporušuje trojuholníkovú nerovnosť. Súčet týchto troch hodnôt je 27721/200.

Problem 36. Pedro trénuje na trati v tvare pravidelného 40-uholníka. Jeho plán je takýto: najprv pobeží z počiatočného vrcholu na najbližší po smere hodinových ručičiek, kde si trochu oddýchne. Takto pokračuje až kým sa nevráti na počiatočný vrchol. Potom začne znova, tentokrát si ale dá prestávku vždy po dvoch hranách, až kým nebude mať prestávku v počiatočnom vrchole, kde znova predĺži šprint o jednu hranu a tak ďalej. Koľko prestávok bude mať Pedro, než obehne celý 40-uholník bez prestávky? Na začiatku tréningu ani po poslednom behu Pedro nemá prestávku.

Result. 902

Solution. Všimnime si, že keď Pedro robí behy po a hranách, tak spraví presne

$$\frac{40}{\mathrm{NSD}(40, a)}$$

behov, kde $\mathrm{NSD}(x, y)$ označuje najväčšieho spoločného deliteľa kladných celých čísel x, y. Tým pádom spraví aj presne toľko prestávok, ak nerátame začiatočnú a rátame poslednú. Pre všetky možné hodnoty $d = \mathrm{NSD}(40, a)$ (deliteľov čísla 40) si vypíšeme možné hodnoty a:

- $d = 1$ pre $a \in \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 27, 29, 31, 33, 37, 39\}$,
- $d = 2$ pre $a \in \{2, 6, 14, 18, 26, 34, 38\}$,
- $d = 4$ pre $a \in \{4, 12, 28, 36\}$,
- $d = 5$ pre $a \in \{5, 15, 25, 35\}$,
- $d = 8$ pre $a \in \{8, 16, 24, 32\}$,
- $d = 10$ pre $a \in \{10, 30\}$,
- $d = 20$ pre $a \in \{20\}$,
- $d = 40$ pre $a \in \{40\}$.

Celkový počet prestávok môžeme teraz získať súčtom, kde hodnotu $\frac{40}{d}$ sčítame toľkokrát ako veľká je množina v príslušnom riadku[1] vyššie. Dostaneme tak $40 \cdot 16 + 20 \cdot 8 + 10 \cdot 4 + 8 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 903$. Po odčítaní poslednej prestávky dostaneme, že Pedro spraví celkovo 902 prestávok.

Problem 37. Doktorand Jožo žije na planéte v tvare kocky a potrebuje minúť peniaze z grantu vyčlenené na návštevy iných univerzít. Na planéte je 8 univerzít, každá v jednom vrchole kocky (vrátane Jožovej domovskej univerzity). Cestovať môže iba medzi susednými univerzitami, teda takými, medzi ktorými vedie hrana kocky. Jožov grant pokrýva 2020 takýchto ciest a musí byť celý minutý. Jožo začína na svojej domovskej univerzite, odkiaľ uskutoční svoju prvú cestu na niektorú náhodne vybranú susednú univerzitu. Tento proces Jožo opakuje a zakaždým si vyberá ďalšiu univerzitu náhodne, pričom dodržiava obmedzenie, že sa na domovskú univerzitu nevráti skôr, ako 2020-tou cestou. Aká je pravdepodobnosť, že sa Jožo svojou poslednou 2020-tou cestou dostane domov?

Result. 2/9

Solution. Označme Jožov počiatočný vrchol (Jožovu univerzitu) písmenom A, jeho susedov B_1, B_2 a B_3 a ich susedov rôznych od A označme C_1, C_2 a C_3 a nakoniec vrchol D. Je ľahké nahliadnuť, že po nepárnom počte krokov (ciest) jediné možné pozície sú B_i alebo D a po párnom počte krokov jediné možné pozície sú C_i alebo A (ktoré je zakázané pred 2020-tou cestou). Nech $P_n(V)$ označuje pravdepodobnosť, že po n krokoch budeme vo vrchole V. Vďaka symetrii máme $P_n(B_1) = P_n(B_2) = P_n(B_3) =: P_n(B)$ pre každé n a obdobne pre C_i. Jediné nenulové pravdepodobnosti prvých krokov vieme spočítať jednoducho:

- $P_0(A) = 1$
- $P_1(B) = \frac{1}{3}$

[1] veľkosti týchto množín môžeme vyjadriť pomocou Eulerovej funkcie ako $\varphi(40/d)$.

- $P_2(C) = \frac{1}{3}$
- $P_3(D) = \frac{1}{3}$, $P_3(B) = \frac{2}{9}$
- $P_4(C) = \frac{1}{3}$.

Všimneme si, že po 4 krokoch máme rovnaké pravdepodobnosti ako po dvoch krokoch, teda proces je periodický s periódou 2 a $P_{2019}(B) = \frac{2}{9}$, preto návrat do A je možný a

$$P_{2020}(A) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{9}.$$

Problem 38. Pre ľubovoľné reálne číslo x a kladné celé číslo n definujme $x \star n = (2-x)^n + x^3 - 6x^2 + 12x - 5$. Určte súčet všetkých reálnych čísel a, ktoré sú riešením rovnice

$$(\ldots((a \star 2020) \star 2019) \star \cdots \star 2) \star 1 = a.$$

Result. 27

Solution. Všimnime si, že $x \star 3 = 3$ pre ľubovoľné reálne číslo x. Spočítame, že $a = (3 \star 2) \star 1 = 5 \star 1 = 27$ je jediné riešenie rovnice.

Problem 39. Štyri študentky Anežka, Števka, Nina a Robka si vyberajú, na ktoré zo štyroch ponúkaných voliteľných predmetov sa prihlásia. Rozhodli sa, že každá z nich sa prihlási aspoň na jeden predmet, a že na práve jeden predmet bude z nich prihlásená viac ako jedna. Koľkými spôsobmi to môžu spraviť?

Result. 2052

Solution. Označme si predmety 1, 2, 3 a 4. Rozoberme prípad, kedy predmet 1 je ten, na ktorý je prihlásená viac ako jedna z nich. Pre ostatné predmety je výsledok rovnaký, takže nám stačí na konci len vynásobiť výsledok štyrmi. Na predmetoch 2, 3 a 4 ostane nanajvýš po jednej študentke. Počítanie možností si rozdelíme na štyri prípady a to podľa toho, či na predmetoch 2, 3 a 4 sa zúčastnia spolu 0, 1, 2 alebo 3 rôzne študentky. Najprv pre každý prípad zistíme počet spôsobov, ako môžeme študentkami obsadiť tieto tri predmety. Uvedomme si, že všetkých možností, ako tieto tri predmety obsadiť, je $5^3 = 125$. Pre každý predmet totiž máme na výber 5 možností: môže si ho zapísať Anežka, Števka, Nina, Robka alebo nikto.

1. Ak na predmetoch 2, 3 a 4 nie sú prihlásené žiadne študentky, tak máme len jednu možnosť.
2. Nech je na predmetoch 2, 3 a 4 práve jedna študentka, označme si ju X. Študentka X môže byť na jednom, dvoch alebo troch z nich. Ak je na jednom, tak máme 3 možnosti na výber. Ak je na dvoch, tak máme tiež 3 možnosti. Ak je na jednom, tak máme len 1 možnosť. Následne ešte potrebujeme určiť, o ktorú študentku ide, na čo máme 4 spôsoby. To nám zatiaľ dáva $(3 + 3 + 1) \cdot 4 = 28$ možností.
3. Ak sú na predmetoch 2, 3, 4 zapísané tri rôzne študentky, tak pre tieto predmety máme $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ možností.
4. Ostal nám najťažší prípad, kedy na predmetoch 2, 3 a 4 sú dve rôzne študentky. No teraz si vieme jednoducho dopočítať, že pre tento prípad nám ostalo $125 - 1 - 28 - 24 = 72$ možností.

Teraz nám ostáva pre každý prípad určiť, koľko je možností na obsadenie predmetu 1. Vieme, že každá študentka, ktorej sa neušiel žiaden z predmetov 2, 3, 4 musí mať zapísaný predmet 1. Tie, ktorým sa ušiel, si môžu (takmer ľubovoľne) vybrať, či si predmet 1 zapíšu alebo nie, teda majú 2 možnosti. Preto ak predmety 2, 3 a 4:

1. nemá zapísané nikto, tak všetky študentky majú zapísaný predmet 1, čo je 1 možnosť;
2. má zapísané práve jedna študentka, tak tri musia byť na jednotke a pre zvyšnú máme 2 možnosti;
3. majú zapísané práve dve študentky, tak tieto dve si môžu vyberať, či si zapíšu jednotku, čo nám dáva $2^2 = 4$ možnosti;
4. majú zapísané práve tri študentky, tak tieto si môžu hocijako vybrať zápis na jednotku okrem možnosti, kedy si jednotku žiadna z nich nezapíše (a ostala by tam len jedna študentka), čo nám dáva $2^3 - 1 = 7$ možností.

Teda pre zistenie celkového počtu spôsobov, ako si naše študentky môžu zapísať predmety nám už len treba vynásobiť v každom prípade možnosti pre predmety 2, 3 a 4 s možnosťami pre predmet 1 a, samozrejme, ešte vynásobiť štyrmi. To nám dáva $4 \cdot (1 \cdot 1 + 28 \cdot 2 + 72 \cdot 4 + 24 \cdot 7) = 2052$ spôsobov.

Problem 40. Uvažujme súčet všetkých čísel, ktoré majú práve 1000^{1000} cifier, ktoré sú iba 1, 2 alebo 4. Aké sú posledné tri cifry tohto súčtu?

Result. 259

Solution. Nech n je číslo pozostávajúce iba z cifier 1, 2 a 4. Ak vymeníme všetky cifry 1 za 2, všetky 2 za 4 a všetky 4 za 1, získame nové číslo skladajúce sa iba z týchto cifier. Keď tento postup zopakujeme ešte dvakrát, vráti sa nám pôvodné číslo n. Rozdeľme teda všetky sčitávané čísla do trojíc tak, aby sme všetky čísla v jednej trojici vedeli získať takouto cyklickou výmenou. Súčet každej takejto trojice sa rovná číslu B, ktoré sa skladá z 1000^{1000} cifier 7, pretože každá cifra je súčet 1, 2 a 4 v nejakom poradí. Spolu máme $3^{1000^{1000}}$ sčitávaných čísel, teda $3^{1000^{1000}-1}$ trojíc a súčet, ktorý hľadáme, sa rovná

$$3^{1000^{1000}-1}B.$$

Keďže nás zaujímajú iba posledné tri cifry, spočítame zvyšky modulo 1000. Vidíme, že $B \equiv 777 \pmod{1000}$. Ďalej keďže 3 a 1000 sú nesúdeliteľné, môžeme použiť Eulerovu funkciu, aby sme spočítali vysokú mocninu čísla 3: máme $\varphi(1000) = 400$, čo je zjavne deliteľ 1000^{1000}, teda

$$3^{1000^{1000}-1} \equiv 3^{-1} \pmod{1000},$$

pričom záporný exponent značí multiplikatívny inverz. Keďže

$$3 \cdot 333 = 999 \equiv -1 \pmod{1000},$$

vyvodíme, že multiplikatívny inverz 3 je $-333 \equiv 667 \pmod{1000}$. Teda naše hľadané číslo je

$$667 \cdot 777 \bmod 1000 = 259.$$

Problem 41. V trojuholníku ABC je uhol pri vrchole A dvakrát tak veľký ako uhol pri vrchole B. Všetky strany trojuholníka majú celočíselné dĺžky a dĺžka strany BC je najmenšia možná. Aký je súčin dĺžok všetkých troch strán trojuholníka ABC?

Result. 120

Solution. Označme dĺžky strán štandardne a, b a c a uhol β je uhol pri vrchole B. Zo Sínusovej vety máme

$$\frac{a}{\sin 2\beta} = \frac{b}{\sin \beta},$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin 2\beta}{\sin \beta} = \frac{2 \sin \beta \cos \beta}{\sin \beta} = 2 \cos \beta,$$

čo nám dáva hodnotu $\cos \beta = \frac{a}{2b}$. Potom znovu podľa Sínusovej vety a trigonometrických vzorcov dostaneme

$$\frac{c}{\sin(180^\circ - 3\beta)} = \frac{c}{\sin 3\beta} = \frac{b}{\sin \beta},$$

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin 3\beta}{\sin \beta} = \frac{\sin 2\beta}{\sin \beta}\frac{a}{2b} + \frac{\sin \beta \cos 2\beta}{\sin \beta} = \frac{a^2}{2b^2} + \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \pm 1 = \frac{a^2}{2b^2} + 2\cos^2 \beta - 1 = \frac{a^2}{b^2} - 1,$$

$$cb = a^2 - b^2.$$

Najmenšie a, pre ktoré existujú b a c, splňujúce podmienky, je $a = 6$ spolu s $b = 4$ a $c = 5$. Preto je súčin rovný 120. Menšie a nám dávajú trojice, ktoré nespĺňajú trojuholníkovú nerovnosť.

Problem 42. V zasadacej miestnosti sa nachádza kruhový stôl s 30 stoličkami. Podľa protipandemických opatrení nemôžu za stolom sedieť dvaja ľudia hneď vedľa seba. Koľkými spôsobmi môžeme rozsadiť niekoľko (aspoň však jedného, nerozlíšiteľných) ľudí okolo okrúhleho stola za dodržania opatrení? Rozsadenia, ktoré sa líšia iba otočením pokladáme za rôzne.

Result. 1860497

Solution. Nech $A(n)$ je počet týchto usadení pre stôl s n sedačkami; pre jednoduchosť zatiaľ zahrnieme aj to, že usadenie nula ľudí je povolené. Dokážeme, že vzťah

$$A(n) = A(n-1) + A(n-2), \tag{R}$$

platí pre $n \geq 5$. Nazveme podmnožinu M množiny $\{1, \ldots, n\}$ *cyklicky deravou* ak neobsahuje dve po sebe idúce čísla a najviac jedno z čísel 1 a n. Jasne $A(n)$ je rovné počtu *cyklicky deravých* podmnožín množiny $\{1, \ldots, n\}$.

Nech $B(n)$ je počet *deravých* podmnožín množiny $\{1, \ldots, n\}$. To sú také, ktoré nemajú dve po sebe idúce čísla (nemá podmienku na 1 a n). Potom $B(n)$ spĺňa rovnosť $B(n) = B(n-1) + B(n-2)$ — vskutku máme $B(n-1)$ podmnožín neobsahujúcich n a $B(n-2)$ množín obsahujúcich n.

Spravíme obdobnú analýzu pre $A(n)$: počet cyklicky deravých podmnožín obsahujúcich n je $B(n-3)$, keďže n, 1 a $n-1$ nemôžu byť obsadené a zvyšok sa správa ako deravá podmnožina $\{2, \ldots, n-2\}$. Ak cyklicky deravá podmnožina neobsahuje n, tak môžu vytvoriť ľubovoľnú deravú podmnožinu $\{1, \ldots, n-1\}$. Preto

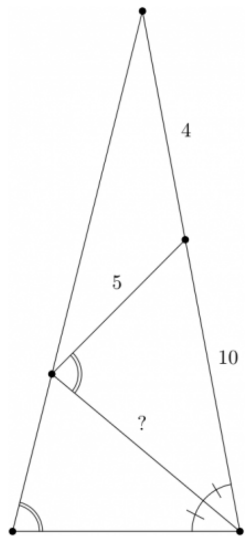
$$A(n) = B(n-1) + B(n-3),$$

rovnosť platí pre ľubovoľné $n \geq 3$. Keďže $B(n-1)$ aj $B(n-3)$ spĺňajú rovnosť $B(n) = B(n-1) + B(n-2)$, tak aj $A(n)$ spĺňa rovnosť (R) pre ľubovoľné $n \geq 5$.

Ľahko vidieť, že $A(3) = 4$ a $A(4) = 7$. Použijúc (R) môžeme spočítať všetky zvyšné hodnoty, a teda $A(30) = 1860498$. Keďže zadanie nepodporuje prázdny stôl, tak hľadaný výsledok je o jedna menší.

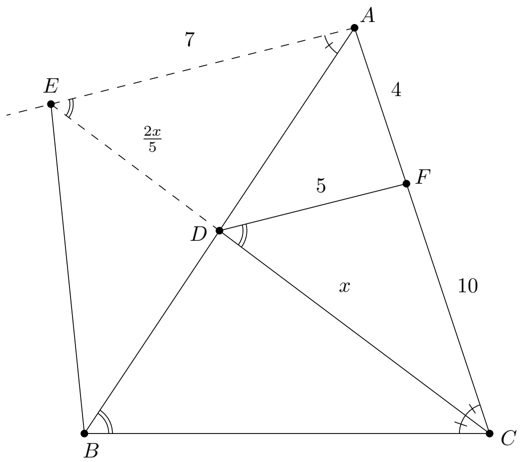
Iné riešenie: budeme vyžadovať aby od každého človeka bolo voľné miesto iba napravo (je to ekvivalentná podmienka). Budeme usadzovať dvojblok (človek, voľno) a blok (voľno) do kruhu. Toto je ale známy problém Lucasových čísel daných počiatočnými podmienkami $L_0 = 2$ $L_1 = 1$ a rekurentným vzťahom $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ (rekurentný vzťah je totožný s Fibonacciho číslami). Počet hľadaných možností je $L_{30} - 1 = 1860497$.

Problem 43. Čarodejník Biely Šum navštevuje istú renomovanú strednú čarodejnícku školu, kde vyučovanie prebieha, samozrejme, online. Za domácu úlohu dostal vyčarovať kúzelný klobúk podľa predlohy z obrázka. Z hodiny si pamätal dva vyznačené páry rovnakých uhlov a dĺžky troch úsečiek. Zabudol však dĺžku štvrtej úsečky (označená „?“), a preto má teraz s úlohou problémy. Pomôžte mu a určte dĺžku neznámej úsečky.



Result. $5\sqrt{\frac{7}{2}} \doteq 9.354134$

Solution.



Nakreslime si priamku rovnobežnú s DF prechádzajúcu bodom A ako na obrázku a označme si jej priesečník s priamkou CD ako E. Označme x hľadanú dĺžku CD. Z podobných trojuholníkov $CDF \sim CEA$ vieme, že $|ED| = \frac{4}{10}x = \frac{2x}{5}$

a $|EA| = \frac{10+4}{10} \cdot 5 = 7$. Keďže $\sphericalangle AEC = \sphericalangle FDC = \sphericalangle DBC$, štvoruholník $AEBC$ je tetivový. Potom z toho vyplýva $\sphericalangle EAB = \sphericalangle ECB = \sphericalangle ACD$. Preto sú si trojuholníky EDA a EAC podobné, a preto

$$\frac{\frac{2x}{5}}{7} = \frac{7}{\frac{2x}{5} + x} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{7 \cdot 5 \cdot 5}{2}} = 5\frac{7}{2} \doteq 9.354134.$$

Problem 44. Nech $\mathbb{N}$ označuje množinu kladných celých čísel. Uvažujme funkciu $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ktorá spĺňa podmienku

$$f(m+n) \geq f(m) + f(f(n)) - 1$$

pre všetky $m, n \in \mathbb{N}$. Nájdite aritmetický priemer všetkých možných hodnôt $f(2020)$.

Result. 1011

Solution. Ukážeme, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $f(n) \leq n+1$. Keďže platí $f(n+1) \geq f(n) + f(f(1)) - 1 \geq f(n)$ pre každé $n \in \mathbb{N}$ (dosadili sme do zadania n miesto m a 1 miesto n), tak funkcia f je neklesajúca. Nech

$$f(m) > m+1 \quad \text{pre nejaké } m \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

inými slovami pre nejaké $c \in \mathbb{N}$, $c \geq 2$, platí $f(m) = m + c$. Potom

$$f(2m) \geq f(m) + f(f(m)) - 1 = m + c - 1 + f(m+c) \geq 2m + 2(c-1) + 1$$

a keď použijeme túto úvahu induktívne, tak dostaneme $f(2^r m) \geq 2^r m + 2^r(c-1) + 1$. Spojením tejto nerovnosti, nerovnosti zo zadania a toho, že funkcia f je neklesajúca, dostaneme

$$f(2^r m + 1) \geq f(f(2^r m)) \geq f(2^r m + 2^r(c-1) + 1),$$

takže opäť z monotónnosti máme $f(2^r m + 1) = f(2^r m + 2) = \cdots = f(2^r m + 2^r(c-1) + 1)$. Pre každé $k \in \mathbb{N}$ si zvoľme $r_k \in \mathbb{N}$ tak, aby $2^{r_k}(c-1) > k$. Potom

$$f(2^{r_k} m + 1 + k) \geq f(2^{r_k} m + 1) + f(f(k)) - 1 \geq f(2^{r_k} m + 1 + k) + f(f(k)) - 1$$

, a preto $f(f(k)) \leq 1$, čo znamená, že $f(f(k)) = 1$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$. Taktiež platí $1 = f(f(m)) = f(m+c) \geq f(m)$ a keďže $f(m) = 1$, dostávame spor s predpokladom (1). Takže naozaj platí $f(n) \leq n+1$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

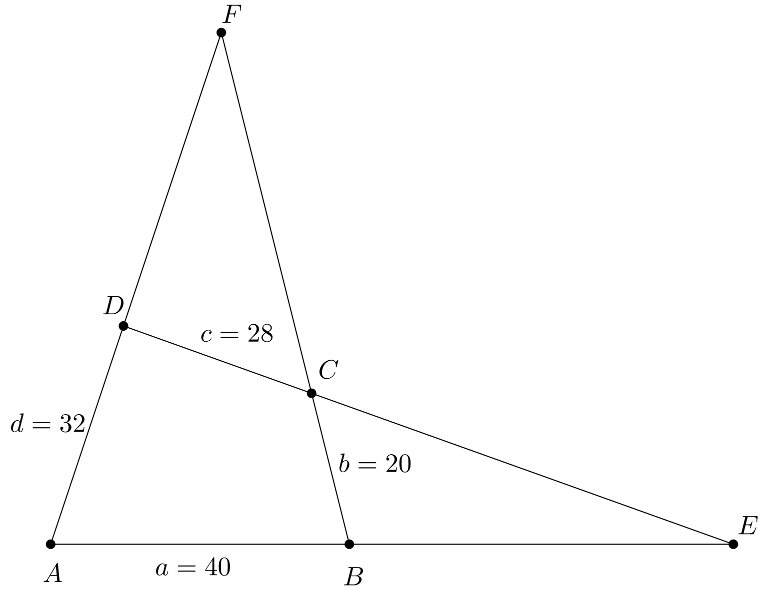
V skutočnosti pre každé kladné celé číslo $N > 1$ môže $f(N)$ nadobudnúť ľubovoľnú hodnotu z množiny $\{1, 2, \ldots, N+1\}$. Poďme to dokázať. Najprv si zvoľme $A < N$. Definujme $f_1(n) = 1$ pre $n \leq A$ a $f_1(n) = A$ pre $n > A$. Funkcia f_1 spĺňa podmienku zo zadania a $f_1(N) = A$. Ďalej funkcia $f_2(n) = n$ tiež spĺňa podmienku a $f_2(N) = N$. Nakoniec funkcia $f_3(n) = N \left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor + 1$ nám dáva $f_3(N) = N + 1$ a rovnako spĺňa podmienku zo zadania, lebo

$$f_3(m) + f_3(f_3(n)) = N\left(\left\lfloor \frac{m}{N} \right\rfloor + \left\lfloor \left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor + \frac{1}{N} \right\rfloor\right) + 2 \leq N\left(\left\lfloor \frac{m}{N} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor\right) + 2 \leq N\left\lfloor \frac{m+n}{N} \right\rfloor + 2 = f_3(m+n) + 1$$

, kde sme použili, že pre $N > 1$ platí $\left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor + \frac{1}{N} < \left\lfloor \frac{n}{N} \right\rfloor + 1$, a že pre každé reálne čísla $x, y \in (0, \infty)$ platí $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$.

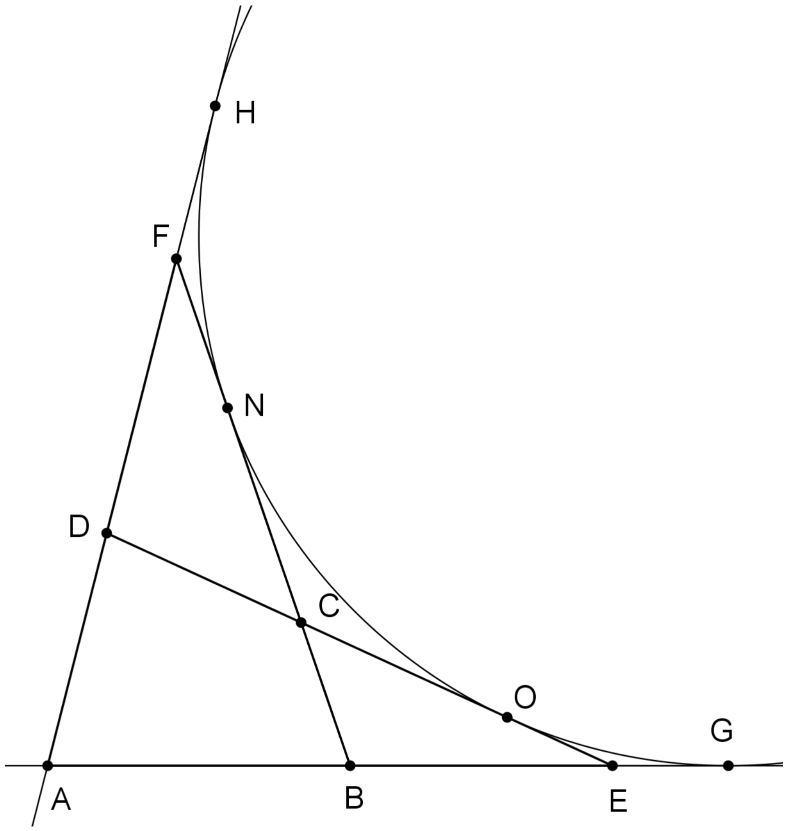
Keďže $2020 > 1$, výsledkom je priemer všetkých celých čísel od 1 do 2021, čo je $\frac{2022}{2} = 1011$.

Problem 45. Kika vlastní štvoruholníkový pozemok so stranami dĺžok $a = 40$, $b = 20$, $c = 28$, $d = 32$ (viď obrázok). Zdedila dva trojuholníkové pozemky BEC a DCF, ktoré sú ohraničené pôvodnými stranami jej pozemku a ich predĺženiami. Ak potrebuje plot dĺžky 80 na úsek tvorený úsečkami BE a EC, ako dlhý plot potrebuje na úsek tvorený úsečkami CF a FD?



Result. 88

Solution. Najprv ukážeme, že trojuholníky BEC, AED, DCF a ABF majú totožnú spoločnú pripísanú kružnicu oproti uhlu EAF.



Nech G značí bod dotyku pripísanej kružnice k trojuholníku BEC oproti uhlu EBC na priamke BE. Vzdialenosť medzi B a G je polovičná obvodu trojuholníka, teda $|BG| = \frac{1}{2}(|CB| + |BE| + |EC|)$. Teraz nech G' je bod dotyku pripísanej kružnice k trojuholníku AED oproti vrcholu A na priamke AB. Použijúc $a + b = 60 = c + d$ máme

$$\begin{aligned} AG' &= \frac{1}{2}(|AE| + |ED| + |DA|) \\ &= \frac{1}{2}(|AB| + |BE| + |EC| + |CD| + |DA|) \\ &= \frac{1}{2}(|AB| + |BE| + |EC| + |AB| + |BC|) \\ &= |AB| + \frac{1}{2}(|BE| + |EC| + |BC|), \end{aligned}$$

a preto máme $G = G'$. Potom bod dotyku O na strane CE je jednoznačne daný pre oba trojuholníky, a teda aj BEC a AED majú spoločnú pripísanú kružnicu. Analogicky trojuholníky DCF a ABF majú rovnakú pripísanú kružnicu. Nakoniec je pripísaná kružnica spoločná pre všetky štyri trojuholníky, keďže jej stred musí ležať na priesečníku osí uhlov EAF a ECF. Keďže dotyčnice ku kružnici majú rovnaké dĺžky, $|AG| = |AH|$, tak dokopy máme, že trojuholníky AED a ABF majú rovnaké obvody. Dostávame

$$\begin{aligned} |CF| + |FD| &= |AB| + |BF| + |FA| - |AB| - |BC| - |DA| \\ &= |AE| + |ED| + |DA| - |AB| - |BC| - |DA| \\ &= |BE| + |EC| + |CD| - |BC| \\ &= 80 + 28 - 20 = 88 \end{aligned}$$

ako dĺžku $|CF| + |DF|$.

Problem 46. Pre koľko čísel n z množiny $\{1, \ldots, 2020\}$ má rovnica $p^3 + q^3 + r^3 = 3pqr + n$ ako riešenie nejakú trojicu kladných celých čísel (p, q, r)?

Result. 1568

Solution. Zapíšme si rovnicu ako

$$p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr = \frac{1}{2}(p + q + r)\left((p - q)^2 + (q - r)^2 + (r - p)^2\right) = k.$$

Všimnime si, že ak je posledná zátvorka nenulová, tak sa rovná aspoň dvom a čísla p, q, r nemôžu byť všetky rovnaké. Teda $k \geq (1+1+2) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \geq 4$. Trojica $(p, q, r) = (n, n, n+1)$ je riešením, ak $k = 3n+1$ pre akékoľvek $n \geq 1$. Podobne trojica $(p, q, r) = (n, n+1, n+1)$ je riešením, ak $k = 3n+2$ pre akékoľvek $n \geq 1$. Ak $3 \mid k$, tak prepísaním rovnice na

$$k = p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr = (p+q+r)^3 - 3(p+q+r)(pq+qr+rp)$$

uvidíme, že aj $3 \mid p+q+r$, a teda nutne $9 \mid k$. Na druhú stranu trojica $(p, q, r) = (n-1, n, n+1)$ rieši rovnicu, ak $k = 9n$ pre každé $n \geq 2$. Zostáva sa už len pozrieť na prípad $k = 9$. Ak sú kladné celé čísla p, q, r po dvoch rôzne, dostaneme $k = \frac{1}{2}(p+q+r)\left((p-q)^2 + (q-r)^2 + (r-p)^2\right) \geq (1+2+3)\frac{1}{2}(1+1+4) = 18$ a ak $p = q \neq r$ dostaneme $9 = (2p+r)(p-r)^2$. Keďže $2p+r > 1$, nutne $2p+r = 9$ a $|p-r| = 1$ čo je nemožné, pretože potom $r = p \pm 1$ a $9 \neq 3p \pm 1$. Takže všetky vhodné $k \in \{1, \ldots, 2020\}$ získame tak, že z množiny odstránime všetky čísla menšie ako 4, odstránime násobky 3, a potom pridáme násobky 9 väčšie ako 9. Výsledok je teda $2020 - 3 - 672 + 223 = 1568$.