Náboj 2021 pro vás připravili studenti Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze a organizátoři Matematického korespondenčního semináře MFF UK Praha ve spolupráci s Korešpondenčným matematickým seminárom FMFI UK Bratislava, Korešpondenčným matematickým seminárom PF UPJŠ Košice, Matematickým ústavem Slezské Univerzity v Opavě, Fakultou informatiky a matematiky Univerzity v Pasově, Institutem pro didaktiku matematiky JKU v Linci, Fakultou matematiky a informatiky UJ v Krakově, Varšavskou Polytechnikou, Vratislavskou Polytechnikou, Bělostockou Polytechnikou, XX. Lyceem v Gdaňsku, Přírodovědeckou fakultou ELTE v Budapešti, Fakultou informačních technologií PE ve Veszprému, Edinburskou univerzitou, Universitou v Cambridgi, Polytechnikou ETH v Curychu, gymnáziem Spektrum v Konstanci, Universitou v Glasgow, Státní Univerzitou Fratiška Skoriny v Gomelu, Národní Univerzitou Tarase Ševčenka v Kyjevě, Universitou ve Vídni, Universitou v Lipsku a Moskevským inženýrsko-fyzikálním Institutem.

Na přípravě úloh Náboje 2021 se podíleli (v abecedním pořadí): Michal Buráň, Anna Doležalová, Hella Epperlein, Erich Fuchs, David Hruška, Jakub Krásenský, Jan Krejčí, Bettina Kreuzer, Marek Murin, Alexander Slávik a Martin Sýkora.

Na překladu úloh se podíleli Michal Buráň, David Hruška, Jan Kadlec, Barbora Kociánová, Jakub Krásenský, Jan Krejčí, Hedvika Ranošová, Martin Sýkora, Michal Töpfer a Martina Vaváčková.

Pražský organizační tým Náboje 2021 tvořili Filip Čermák, Matěj Doležálek, Anna Doležalová, David Hruška, Lenka Kopfová, Jan Krejčí, Marian Poljak, Alexander Slávik a Martin Sýkora.

Generální partner soutěže:

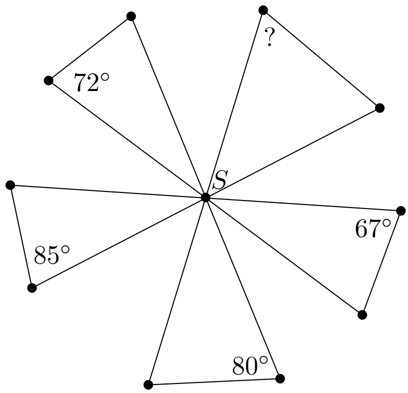
Partneři soutěže:

Úloha 1. Jarmila nemá ráda osobní otázky. Když se jí Honza zeptal na její věk, odpověděla mu následovně: „Mladý muži! Mám pět dětí, každé je jinak staré a kromě nejstaršího má každé z nich o 4 roky staršího sourozence. Své první dítě jsem měla v jednadvaceti letech a letos je mému nejmladšímu dítěti dvacet jedna.“ Kolik let je Jarmile?

Výsledek. 58

Řešení. Stáří Jarmiliných dětí jsou nutně 21, $21 + 4$, …, $21 + 4 \cdot 4$ roků. Ona sama je o 21 let starší než její nejstarší potomek, takže jí je $21 + 4 \cdot 4 + 21 = 58$ let.

Úloha 2. Hedvika se učila kreslit větrný mlýn. Nejdříve nakreslila vrtuli pomocí pěti stejně dlouhých úseček, které měly všechny společný střed S, pak jejich krajní body pospojovala jako na obrázku, a nakonec zaznačila velikosti některých úhlů. Určete velikost úhlu označeného v obrázku otazníkem. Výsledek uveďte ve stupních.



Výsledek. 56

Řešení. U vrcholu S je pět párů vrcholových úhlů a právě jeden úhel z každé dvojice je vnitřní úhel některé lopatky, tedy součet vnitřních úhlů lopatek při vrcholu S je $\frac{360°}{2}$. Protože jsou lopatky rovnoramenné trojúhelníky, musí být oba vnitřní úhly u krajních bodů každého z nich stejné. Když sečteme všechny vnitřní úhly v lopatkách, dostaneme $5 \cdot 180°$. Velikost úhlu označeného otazníkem je proto

$$\frac{5 \cdot 180° - 2 \cdot (67° + 80° + 85° + 72°) - 180°}{2} = 56°.$$

Úloha 3. V rámci turnaje se studenti zúčastnili tří sportovních disciplín. Každý z nich zkusil své štěstí alespoň v jedné disciplíně. Celkem 22 studentů se zúčastnilo běhu do jídelny, 13 skoku od tabule a 15 vrhu botou. Víme také, že 8 studentů soutěžilo v běhu i skoku, 7 studentů si vybralo sprint i vrh a 6 studentů si vybralo skok i vrh. V tom už jsou započítáni tři nejambicióznější studenti, kteří se zapojili do všech tří disciplín. Kolik studentů se turnaje zúčastnilo?

Výsledek. 32

Řešení. Pokud sečteme zadané počty studentů, kteří se zúčastnili (alespoň) jedné disciplíny, a od tohoto počtu odečteme zadané počty studentů, kteří se zúčastnili (alespoň) dvou disciplín, tak dostaneme všechny účastníky turnaje bez těch, kteří se zúčastnili všech tří disciplín. Výsledek je tedy

$$(22 + 13 + 15) - (8 + 7 + 6) + 3 = 32.$$

Úloha 4. Číslo nazveme *supersudé*, pokud jsou všechny jeho číslice sudé. Kolik existuje pěticiferných supersudých čísel takových, že po přičtení 24680 dostaneme opět supersudé číslo?

Výsledek. 90

Řešení. Celkem máme pět sudých číslic. Abychom zaručili, že výsledek bude supersudé číslo, nesmí součet žádných dvou číslic při provádění tradičního sčítání „pod sebou" přesáhnout desítku. Zároveň žádné číslo nezačíná nulou, proto máme právě tři možnosti na první dvě číslice hledaného čísla, dvě možnosti na třetí pozici, jednu možnost na čtvrtou a všech pět možností na poslední číslici. Celkově tedy existuje $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 = 90$ takových supersudých čísel.

Úloha 5. Žil byl jeden moudrý král, jehož hrad byl obehnán čtvero hradbami. Hradby tvořily soustředné kružnice o poloměrech 50, 100, 150 a 200 jednotek královských a veškerá zem obklopená hradbou patřila králi. Protože časy byly tehdy klidné a království vzkvétalo, rozhodl se král svou zemi rozšířit. I nechal král hradby strhnout a veškerý materiál využil k postavení jediné veliké kruhové hradby, jejíž zdi byly právě tak vysoké jako zdi původních hradeb. Kolikrát se zvětšila plocha králových pozemků?

Výsledek. $\frac{25}{4}$

Řešení. Víme, že součet obvodů původních hradeb musí dát obvod nové zdi. Označíme-li nový poloměr r, pak platí

$$2\pi \cdot 50 + 2\pi \cdot 100 + 2\pi \cdot 150 + 2\pi \cdot 200 = 2\pi \cdot r.$$

Poloměr nové zdi je tedy součtem poloměrů původních zdí, $r = 500$. Hledaný nárůst je tudíž dán poměrem $\frac{\pi \cdot 500^2}{\pi \cdot 200^2} = \frac{25}{4}$.

Úloha 6. Verča stojí u bankomatu a nemůže si vybavit svůj čtyřciferný PIN. Pamatuje si však následující:

- žádné dvě jeho číslice nejsou stejné,
- je dělitelný čísly 137 a 17,
- součet jeho číslic je co možná nejmenší prvočíslo.

Jaký je Verčin PIN?

Výsledek. 9316

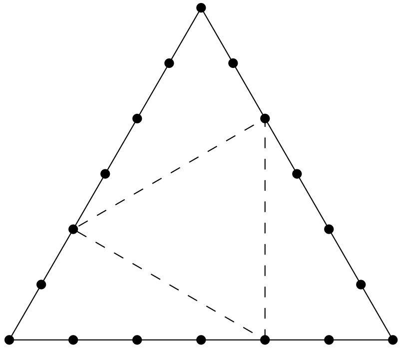
Řešení. Protože Verčin PIN je dělitelný 137 a 17, musí být násobkem čísla $137 \cdot 17 = 2329$. Všimněme si, že toto číslo nesplňuje zadané podmínky a může být vynásobeno pouze 2, 3 nebo 4, aby zůstalo čtyřciferné. Zbývají tedy následující možnosti: $2329 \cdot 2 = 4658$, $2329 \cdot 3 = 6987$ a $2329 \cdot 4 = 9316$, jejichž ciferné součty jsou po řadě 23, 30 a 19. Protože 19 je z nich to nejmenší prvočíslo, hledaný PIN je 9316 a Verča může s chutí vyrazit na zaslouženou cukrovou vatu.

Úloha 7. Honza má čtyři mnohoúhelníky – rovnostranný trojúhelník se stranou délky jedna a tři další shodné pravidelné mnohoúhelníky taktéž o stranách délky jedna. Své mnohoúhelníky pospojoval tak, že každé dva ze čtyř mnohoúhelníků spolu sdílí právě jednu stranu a žádné dva se nepřekrývají. Jaký je obvod jeho výsledného obrazce? Sdílené strany mnohoúhelníků do obvodu nepočítáme.

Výsledek. 27

Řešení. Předpokládejme, že každý ze shodných mnohoúhelníků má n stran. Výsledný tvar musí mít $3(n-3)$ stran, protože tři strany každého mnohoúhelníku, včetně trojúhelníku, jsou sdílené. Nyní stačí pouze najít vhodné n. Z velikosti vnějšího úhlu rovnostranného trojúhelníku, který je $300°$, a ze symetrie vyplývá, že vnitřní úhel shodných mnohoúhelníků je $150°$. Protože součet úhlů v n-úhelníku je $(n-2) \cdot 180°$, dostáváme rovnici $150n = 180(n-2)$ s řešením $n = 12$. Po dosazení do vzorce z prvního řádku dostáváme, že výsledný obrazec má $3 \cdot 9 = 27$ stran, tudíž obvod 27.

Úloha 8. Mějme rovnostranný trojúhelník s vyznačenými body na stranách a ve vrcholech, které jsou rozložené tak, že rozdělují každou stranu trojúhelníku na 2021 shodných částí. Určete počet všech rovnostranných trojúhelníků s vrcholy v těchto vyznačených bodech. Obrázek ukazuje jeden takový trojúhelník pro případ, kdy body rozdělují strany na šest shodných částí.



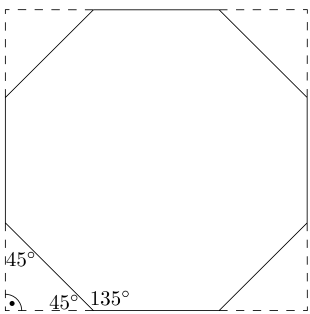
Výsledek. 8081

Řešení. Pro úsporu časoprostoru říkejme rovnostranným trojúhelníkům jen trojúhelníky. Na obrázku je původní trojúhelník, dále $3 \cdot 2020$ trojúhelníků sdílejících právě jeden vrchol s původním trojúhelníkem (2020 pro každý z vrcholů) a nakonec 2020 otočených trojúhelníků, které s původním nesdílejí ani jeden vrchol. Je jednoduché nahlédnout, že všechny tyto trojúhelníky jsou navzájem různé a že žádné další existovat nemohou. Celkem tedy hledaných trojúhelníků máme $1 + 3 \cdot 2020 + 2020 = 8081$.

Úloha 9. Verča měla čtvercový papír, kterému ustřihla všechny čtyři rohy tak, že jí vznikl pravidelný osmiúhelník. Celková plocha všech ustřižených rohů byla 300. Kolik měří strana jejího pravidelného osmiúhelníku?

Výsledek. $\sqrt{300} \doteq 17{,}32051$

Řešení. Vnitřní úhly pravidelného osmiúhelníku mají velikost 135°. Verčou ustřižené rohy jsou rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky, které se navíc dají poskládat do čtverce, jehož strana je stejně dlouhá jako strana vystřiženého osmiúhelníku. Z toho vyplývá, že délka strany osmiúhelníku je rovna $\sqrt{300}$, neboť obsah poskládaného čtverce je 300.



Úloha 10. Najděte největší trojciferné celé číslo n takové, že:

- ciferný součet čísla n je 16,
- n má nenulový ciferný součin, ale číslice na místě jednotek tohoto součinu je 0,
- ciferný součet ciferného součinu n je 3.

Výsledek. 853

Řešení. Z druhé podmínky dostáváme, že alespoň jedna číslice čísla n musí být 5 a alespoň jedna musí být sudá, ale žádná není nula. Vezmeme-li toto v potaz, z první podmínky dostáváme následující možné trojice cifer obsažených v čísle n: 5, 2, 9 nebo 5, 4, 7 nebo 5, 6, 5 nebo 5, 8, 3. Z těchto možností pouze 5, 8, 3 splňuje poslední zadanou podmínku a největší možné trojciferné číslo složené z těchto číslic je tedy 853.

Úloha 11. Z čísla 6437051928 jsme odebrali právě pět číslic tak, aby výsledné pěticiferné číslo bylo co největší. Které číslo jsme dostali?

Výsledek. 75928

Řešení. Největší číslice, které je možno dosáhnout odebráním nejvýše pěti číslic zleva, je 7. Protože se toho dosáhne odebráním právě tří číslic zleva, je jasné, že zbývající číslice, které je nutné odebrat, jsou 0 a 1. Proto je číslo 75928 hledaným číslem.

Úloha 12. Honza miluje posloupnosti. Teď si právě hraje s rostoucími posloupnostmi S_n, jejichž první člen je 1 a které mají diferenci (rozdíl mezi dvěma po sobě jdoucími prvky) rovnou n. Například S_2 je posloupnost $1, 3, 5, \ldots$ Pro kolik kladných celých čísel n obsahuje S_n číslo 2021?

Výsledek. 12

Řešení. Číslo 2021 se vyskytne jako člen v S_n právě tehdy, pokud pro nějaké kladné celé číslo a platí $2021 = 1 + an$. Jinými slovy $2020 = an$, a tudíž n musí být dělitelem 2020. Rozklad na prvočísla nám dává $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$, a tak víme, že každý dělitel je dán některou kombinací těchto čísel. Číslo dva můžeme vzít buď jednou, dvakrát nebo vůbec, to nám dává tři možnosti. Pět a sto jedna můžeme buď vzít, nebo ne, to dává dvě možnosti pro obě prvočísla. Celkem tedy máme $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ možností, jak můžeme z těchto prvočísel poskládat dělitele 2020. To znamená, že 2021 je členem 12 z Honzových posloupností.

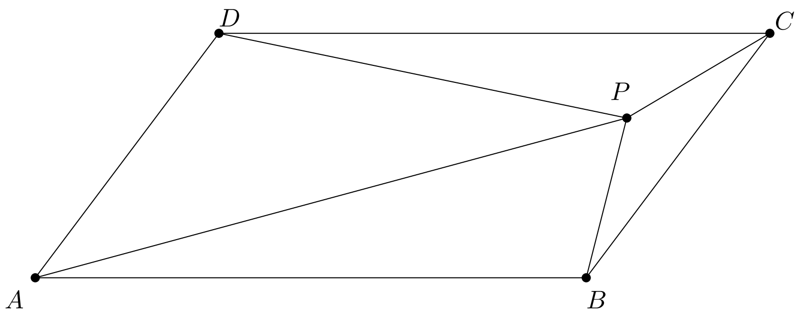
Úloha 13. E.T. si na chodbě svého rozlehlého paláce hraje se sedmi roboty. Vybere si zde sedm oken, pod každé z nich umístí jednoho robota a pak všechny roboty najednou zapne. Každý z nich vyrazí ihned po zapnutí podél stěny jedním směrem konstantní rychlostí 10 metrů za minutu. Jakmile dojde na konec chodby, otočí se a jde zase zpátky. Chodba je dlouhá 90 metrů a na její stěně je v 10metrových rozestupech umístěno deset oken. E.T.ho by zajímalo, jak má roboty rozestavět, aby trvalo co nejdéle, než se každý robot potká se všemi ostatními. Pomozte mu spočítat, kolik nejvýše sekund to může robotům zabrat.

Výsledek. 510

Řešení. Pro každého robota A můžeme určit okno a směr, kde by musel začínat jiný robot, aby trvalo co nejdéle, než se potkají. Je to to nejbližší okno v opačném směru, než kterým A vychází, a směr pohybu druhého robota by musí být opačný než směr A. Vychází-li A od jednoho z krajních oken, můžeme předpokládat, že začíná směrem pryč z chodby.

Ukáže se, že čas, který uplyne, než se tito dva roboti potkají, je pro každou výše popsanou dvojici robotů stejný: Oba dohromady totiž musejí ujít $80 + 90 = 170$ metrů, neboli každý z nich musí urazit $\frac{170}{2}$ metrů, což jim zabere $\frac{170}{2 \cdot 10}$ min $= 8{,}5$ min $= 510$ s.

Úloha 14. Uprostřed rovnoběžníku $ABCD$ se nachází bod P takový, že obsah trojúhelníku CDP je třikrát větší než obsah trojúhelníku BCP a zároveň třikrát menší než obsah trojúhelníku APD. Jestliže je obsah trojúhelníku CDP roven 18, jaký je obsah trojúhelníku ABP?



Výsledek. 42

Řešení. Nejprve zdůvodníme, že trojúhelníky APD a BCP pokrývají polovinu obsahu celého rovnoběžníku. Lépe je to vidět pro druhé dva trojúhelníky; jejich výšky vedené z bodu P totiž dají v součtu výšku rovnoběžníku h kolmou na AB, a součet jejich obsahů je proto $\frac{1}{2}h \cdot |AB|$.

Obsah trojúhelníku ABP je tudíž roven $\left(\frac{1}{3} + 3\right) \cdot 18 - 18 = 42$.

Úloha 15. Při dělení čísel 1058, 1486 a 2021 celým číslem $d > 1$ dostaneme vždy stejný zbytek. Najděte tento dělitel d.

Výsledek. 107

Řešení. Zadaná čísla jsou od sebe vzdálena

$$1486 - 1058 = 428 \quad \text{a} \quad 2021 - 1486 = 535.$$

Abychom dostali stejný zbytek po dělení zadaných čísel číslem d, musí být jejich vzdálenosti násobky d. Největší společný dělitel čísel 428 a 535 je 107, což je prvočíslo, a proto je to naše hledané číslo d.

Úloha 16. Na střídací lavici na fotbalovém stadionu je čtrnáct samostatných sedadel v řadě. Nové vedení družstva, tvořené trenérem, zástupcem trenéra, manažerem a fyzioterapeutem, se chce během zápasu co nejlépe seznámit s hráči. Proto se tito pánové usadí na lavici tak, aby měl každý z nich po obou stranách některého z deseti náhradníků, nikoli člena vedení. Kolika způsoby si mohou vybrat čtveřici sedadel, na kterých budou sedět? (Rozlišujte přitom i rozesazení, která se liší jen přeuspořádáním členů vedení.)

Výsledek. 3024

Řešení. Představme si, že deset náhradníků stojí v řadě vedle sebe. Je mezi nimi devět mezer, přičemž do každé z nich můžeme umístit nejvýše jednoho člena vedení. To lze provést $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ způsoby.

Úloha 17. Matěj má pravidelný čtyřboký jehlan, jehož čtvercová základna má obsah 1 a jehož celý povrch je roven 3. Jaký je jeho objem?

Výsledek. $\frac{\sqrt{3}}{6} \doteq 0{,}288675$

Řešení. Základna má obsah 1, tudíž i stranu délky 1. Protože je povrch celého jehlanu roven 3, je povrch pláště roven 2, tedy každá stěna má obsah $\frac{1}{2}$, což znamená, že výška každého stěnového trojúhelníku je rovna 1. To také znamená, že rozpůlíme-li jehlan řezem skrze jeho vrchol a středy dvou protilehlých stran základny, dostaneme rovnostranný trojúhelník o straně délky 1, jehož výška je též výškou Matějova jehlanu. Z toho spočítáme délku výšky jako $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Protože je objem jehlanu roven třetině součinu délky výšky a obsahu základny, je objem Matějova jehlanu roven $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 1 = \frac{1}{6}\sqrt{3}$.

Úloha 18. Bára dostala od Ježíška obrovský barel. Pokud do barelu nalije čistou vodu, vyteče z něj nejprve 94 % vody a pak zbylých 6 % přeměněných na víno. Jestliže místo vody použije pouze víno, vyteče nejdříve 90 % vína a pak zbylých 10 % přeměněných na vodu. A když do barelu nalije směs vody a vína, působí výše popsané kouzlo na každou komponentu zvlášť. Jednoho dne dostala Bára od Pepy 6000 litrů směsi vody a vína. Jaké ji však čekalo překvapení, když po nalití směsi do barelu vyteklo přesně tolik vody a přesně tolik vína, kolik tam nalila. Kolik litrů vína Bára do barelu nalila?

Výsledek. 2250

Řešení. Označme x množství vína a y množství vody v litrech, které Bára nalila do barelu. Víme, že $0{,}06y$ litrů vody se přeměnilo na víno a $0{,}1x$ litrů vína se přeměnilo na vodu. Množství vody (a vína) se nezmění právě tehdy, když

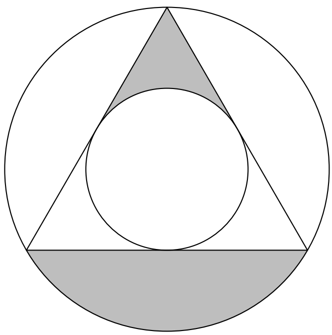
$$0{,}06y = 0{,}1x.$$

Vyjádřením y a dosazením do rovnice pro celkový součet objemu vody a vína, $x + y = 6000$, dostaneme, že

$$\frac{8}{3}x = 6000 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 2250.$$

Bára tudíž do barelu nalila 2250 litrů vína.

Úloha 19. Na obrázku je rovnostranný trojúhelník s opsanou a vepsanou kružnicí. Víme, že obsah kruhu ohraničeného opsanou kružnicí je 140. Určete obsah šedé oblasti.



Výsledek. 35

Řešení. Snadno nahlédneme, že poloměr vepsané kružnice rovnostranného trojúhelníku je poloviční oproti poloměru kružnice jemu opsané. Obsah kruhu ohraničeného vepsanou kružnicí je tedy $\frac{140}{4} = 35$. Šedá oblast je přesně $\frac{1}{3}$ mezikruží mezi opsanou a vepsanou kružnicí. Její obsah je proto $\frac{140-35}{3} = 35$.

Úloha 20. Víme, že součin 2021 kladných celých čísel je roven dvojnásobku jejich součtu. Jaké největší hodnoty může některé z těchto čísel nabývat?

Výsledek. 4044

Řešení. Uspořádejme čísla sestupně podle velikosti a označme je postupně $c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_{2020} \geq c_{2021} \geq 1$. Chceme najít největší možnou hodnotu čísla c_1 takovou, že výše zmíněná čísla splňují rovnici

$$c_1 \cdots c_{2021} = 2 \cdot (c_1 + \cdots + c_{2021}). \tag{1}$$

Rovnici vydělíme součinem na levé straně a za pomoci odhadů

$$\begin{aligned} c_1 \cdot c_3 \cdots c_{2021} \geq c_1 \quad &\iff \quad \frac{1}{c_1} \geq \frac{1}{c_1 \cdot c_3 \cdots c_{2021}}, \\ c_2 \cdot c_3 \cdots c_{2021} \geq c_2 \quad &\iff \quad \frac{1}{c_2} \geq \frac{1}{c_2 \cdot c_3 \cdots c_{2021}} \end{aligned}$$

a horního odhadu $c_1 \cdot c_2$ pro všechny ostatní součiny dostaneme

$$\begin{aligned} 1 = 2\left(\frac{1}{c_2 \cdots c_{2021}} + \cdots + \frac{1}{c_1 \cdots c_{2020}}\right) &\leq \\ \leq 2\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{2019}{c_1 c_2}\right) &= 2 \cdot \frac{2019 + c_1 + c_2}{c_1 c_2}. \end{aligned}$$

Úpravou nerovnosti výše obdržíme

$$(c_1 - 2)(c_2 - 2) = c_1 c_2 - 2c_1 - 2c_2 + 4 \leq 2 \cdot 2019 + 4 = 4042.$$

Pokud $c_2 \geq 3$, pak platí $c_1 \leq 4044$. Volbou

$$c_1 = 4044, \quad c_2 = 3 \quad \text{a} \quad c_3 = \cdots = c_{2021} = 1$$

získáme čísla, pro něž je splněna rovnice (1) a zároveň c_1 nabývá maximální možné hodnoty. Pokud $c_2 \leq 2$, pak víme, že mezi čísly

$$c_2 \geq c_3 \geq \cdots \geq c_{2021}$$

je $k \geq 0$ dvojek a $2020 - k$ jedniček. Využitím těchto pozorování rovnice (1) přejde do tvaru

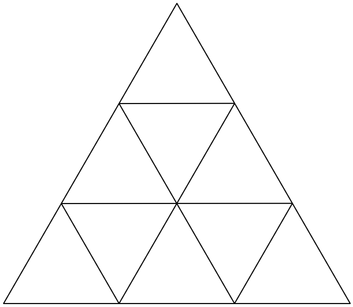
$$2^k c_1 = 2(c_1 + 2k + 2020 - k) \quad \iff \quad c_1\left(2^{k-1} - 1\right) = 2020 + k.$$

Všimněme si, že pro $k \leq 1$ nemá rovnice řešení a pro $k \geq 2$ máme

$$c_1 = \frac{2020 + k}{2^{k-1} - 1} \leq 2022 < 4044.$$

Dokázali jsme tedy, že největší hodnota, které čísla mohou nabývat, je 4044.

Úloha 21. Michal má za úkol doplnit devět po dvou různých kladných celých čísel do políček trojúhelníku níže tak, aby platilo, že sousedí-li políčka hranou, pak čísla v nich napsaná mají společného dělitele většího než 1. Jaký je nejmenší možný součet čísel doplněných do trojúhelníku?



Výsledek. 59

Řešení. Všimněme si nejdříve, že v trojúhelníku jsou právě tři políčka sousedící s jedním políčkem, právě tři sousedící se dvěma a právě tři sousedící se třemi políčky. To znamená, že pokud v jednom z políček bude prvočíslo, pak mezi zbylými osmi čísly bude ještě alespoň jeden jeho násobek. Dále platí, že jedničku není možné do trojúhelníku doplnit. Označme S součet čísel vyplněných do trojúhelníku podle zadání.

Nechť je v trojúhelníku prvočíslo $p \geq 11$. Pak mezi zbylými osmi čísly musí být jeho násobek $k \cdot p$, kde $k \geq 2$. Vyplňme nyní všechna ostatní políčka tabulky nejmenšími možnými čísly nehledě na způsob, jak má být podle zadání trojúhelník vyplněn. To nás dovádí k odhadu

$$S \geq 2+3+4+5+6+7+8+p+k \cdot p = 35+(k+1) \cdot p \geq 35+33 = 68.$$

Dále nechť mezi čísly v trojúhelníku není prvočíslo $p \geq 11$. Rozebereme čtyři případy:

- V trojúhelníku jsou obě čísla 5 a 7:

$$\begin{aligned} S &\geq 5+k_5 \cdot 5+7+k_7 \cdot 7+2+3+4+6+8 = \\ &= (k_5+1) \cdot 5+(k_7+1) \cdot 7+23 \geq 15+21+23 = 59. \end{aligned}$$

- Do trojúhelníku jsme doplnili číslo 5, ale ne číslo 7:

$$S \geq 5+k \cdot 5+2+3+4+6+8+9+\begin{cases} 10 \geq 20+32+10 = 62 & \text{pro} \quad k \geq 3, \\ 12 = 15+32+12 = 59 & \text{pro} \quad k = 2. \end{cases}$$

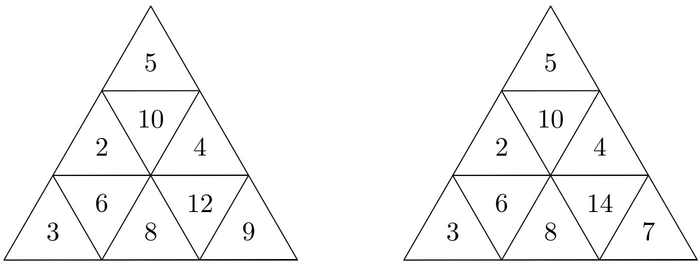
- V trojúhelníku není ani číslo 5, ani číslo 7:

$$S \geq 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 9 + 10 + 12 + 14 = 68.$$

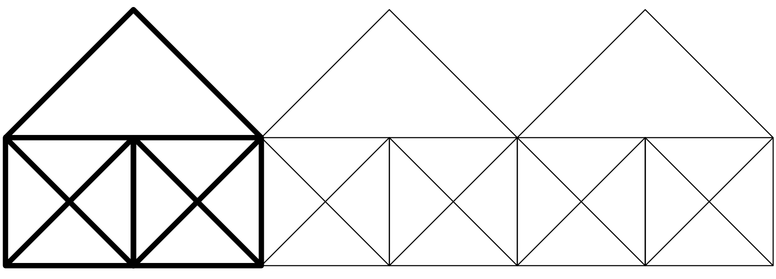
- Číslo 7 v trojúhelníku je, ale číslo 5 ne:

$$S \geq 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + k \cdot 7 \geq 49 + 14 = 63.$$

Rozebrali jsme všechny situace, které mohou nastat, takže zbývá ukázat, že trojúhelník umíme doplnit čísly se součtem 59. Pro to existují dvě řešení zobrazená na obrázcích. Nejmenší možný součet je tedy 59.



Úloha 22. Anička kreslí identické domečky jeden vedle druhého. Domečky jsou tvořené dvojicí shodných čtverců se střechou ve tvaru rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku. Na obrázku vidíme první tři.



Kolik nejméně domečků musí Anička nakreslit, aby bylo na jejím obrázku alespoň 2021 trojúhelníků?

Výsledek. 93

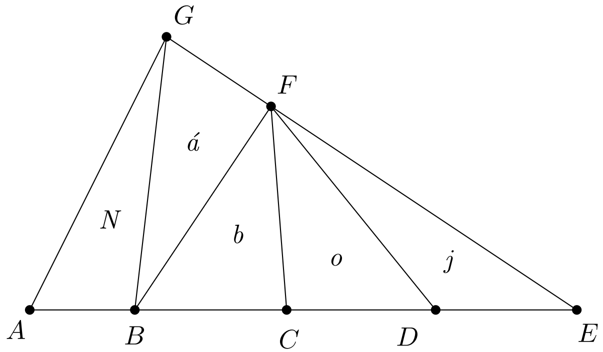
Řešení. Předpokládejme, že obsah domečku je 3 (to nastane, pokud je délka strany čtverce 1). Potom je v prvním nakresleném domečku 8 trojúhelníků s obsahem $\frac{1}{4}$, dále 8 trojúhelníků s obsahem $\frac{1}{2}$ a konečně 3 trojúhelníky s obsahem 1. To je 19 trojúhelníků.

Přikreslí-li Anička druhý domeček, pak na obrázku přibude stejný počet trojúhelníků jako předtím, a navíc ještě dva trojúhelníky s obsahem 1, které zasahují do prvního i druhého domečku. Dohromady tedy přibude 21 trojúhelníků.

Počínaje třetím domečkem to pak bude 22 trojúhelníků: 21 stejných jako v druhém domečku, a navíc ještě jeden trojúhelník s obsahem 4, který zasahuje do tří domečků.

Víme, že $2021 - 19 - 21 = 1981$ a $1981 = 90 \cdot 22 + 1$, takže Anička musí nakreslit $2 + 90 + 1 = 93$ domečků.

Úloha 23. Všech pět trojúhelníků N, $á$, b, o, j má stejný obsah. Jaká je délka strany AB, jestliže $|CD| = 5$?

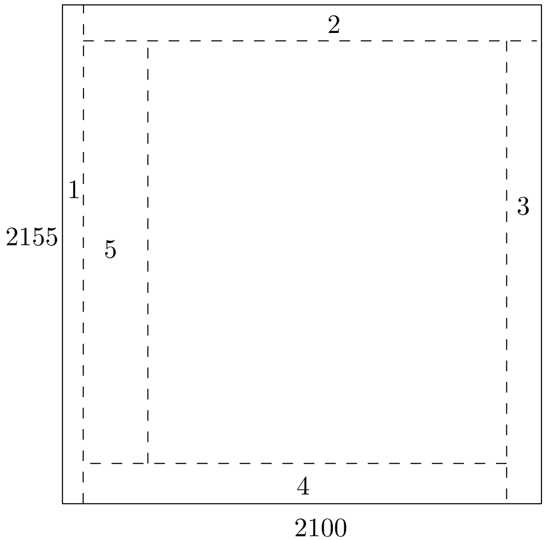


Výsledek. $\frac{15}{4}$

Řešení. Poměr obsahu trojúhelníků BEG a BEF je $4 : 3$. Vzhledem k tomu, že oba trojúhelníky sdílí stranu BE, tak jejich výšky na tuto stranu musí být také v poměru $4 : 3$. Dále víme, že $\triangle ABG$ a $\triangle CDF$ mají stejný obsah, takže

$$|AB| = \frac{3}{4}|CD| = \frac{15}{4}.$$

Úloha 24. Matěj má velký kus papíru o rozměrech 2155 krát 2100 a hodlá z něj odstřihávat proužky. Začne tím, že z okraje delší strany odstřihne proužek šířky 1. Pak postupně po směru hodinových ručiček odstřihne z kratší strany proužek šířky 2, z delší strany proužek šířky 3 atd. Pokaždé tedy odstřihne proužek o 1 širší než ten předchozí, pokud to stále jde. Šířky proužků vidíme naznačené na obrázku.



Nakonec Matějovi zůstane obdélník, ze kterého již nejde odstřihnout proužek požadované šířky. Určete jeho obsah.

Výsledek. 6375

Řešení. Matěj může odstřihnout proužek liché šířky, pokud součet šířek proužků je menší než délka kratší strany, tj.

$$1 + 3 + \cdots + 2n - 1 = \frac{n \cdot (2n - 1 + 1)}{2} = n^2 < 2100.$$

Víme, že

$$45^2 = 2025 < 2100 < 2116 = 46^2,$$

takže 89 je šířka posledního možného proužku liché šířky. Podobně, aby Matěj mohl odstřihnout proužek sudé šířky, musí platit, že

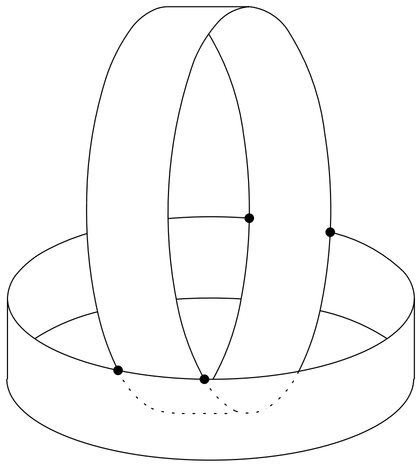
$$2 + 4 + \cdots + 2n = \frac{n \cdot (2n + 2)}{2} = n(n + 1) < 2155.$$

Zřejmě,

$$45 \cdot 46 = 2070 < 2155 < 2162 = 46 \cdot 47,$$

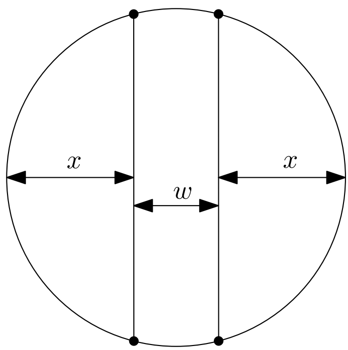
tedy proužek šířky 90 je poslední proužek sudé šířky. Zbývající obdélník má tedy obsah $(2100 - 2025) \cdot (2155 - 2070) = 75 \cdot 85 = 6375$.

Úloha 25. Jeden ze dvou shodných prstenců o poloměru 4 a neznámé šířce leží na stole. Druhý z nich je na tom prvním postaven tak, že se ho dotýká právě ve čtyřech bodech (viz obrázek) a jeho nejnižší bod se nachází ve výšce 1 nad stolem. Jakou mají prstence šířku?



Výsledek. $\frac{10}{3}$

Řešení.



Označme rozměr x a hledanou šířku w jako na obrázku, který znázorňuje horizontální projekci. Protože mají oba prstence stejný průměr, je délka x také výška od bodů dotyku obou prstenců po nejnižší bod vertikálního prstence. Platí tedy $1 + x = w$. Pak

$$8 = 2x + w = 2(w - 1) + w = 3w - 2 \quad \Longrightarrow \quad w = \frac{10}{3}.$$

Úloha 26. Polynom stupně 14 s celočíselnými koeficienty a kladným vedoucím koeficientem má 14 různých celočíselných kořenů. Jaká nejmenší může být jeho hodnota v nule, pokud víme, že je kladná?

Polynom stupně 14 s celočíselnými koeficienty je výraz tvaru

$$a_{14}x^{14} + a_{13}x^{13} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde a_{14} je nenulové celé číslo a $a_0, \ldots, a_{13}$ jsou celá čísla, která mohou být nulová. Číslo a_{14} se nazývá vedoucí koeficient.

Výsledek. 29030400

Řešení. Polynom můžeme napsat ve tvaru

$$c \cdot (x - b_1) \cdot (x - b_2) \cdots (x - b_{14}),$$

kde $b_1, b_2, \ldots, b_{14}$ jsou po dvou různá celá čísla. Vedoucí koeficient je pak roven c, takže c je kladné celé číslo. Dosazením do tvaru výše vidíme, že hodnota polynomu v 0 je rovna

$$c \cdot b_1 \cdot b_2 \cdots b_{14}.$$

Vzhledem k tomu, že chceme tuto hodnotu minimalizovat, volme c nejmenší možné, tj. $c = 1$. Chceme-li minimalizovat součin kořenů, musíme je brát co nejblíž 0, tj. $1, -1, 2, -2 \ldots$ Nakonec musíme pamatovat na to, že potřebujeme sudý počet záporných kořenů, protože minimalizovaný součin má být kladný. Výsledek je tedy

$$6! \cdot 8! = 29\,030\,400.$$

Úloha 27. Lenka procvičuje psaní čísel. Cifry 4, 5 a 7 píše pomocí dvou tahů, zbytek pomocí jednoho. Kolik tahů udělá během psaní všech kladných celých čísel od 1 do 2021?

Výsledek. 8783

Řešení. Mezi čísly 1 a 2021 je dohromady 9 jednociferných, 90 dvojciferných, 900 trojciferných čísel a $2021 - 1000 + 1 = 1022$ čtyřciferných čísel. Celkem tedy Lenka napíše

$$9 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 + 1022 \cdot 4 = 6977 \text{ cifer.}$$

Na každou cifru bude potřebovat alespoň jeden tah a na cifry 4, 5 a 7 bude potřebovat ještě jeden navíc. Stačí nám tedy určit počet cifer 4, 5 a 7. Všimněme si, že číslo 2021 neobsahuje ani jednu z těchto cifer, takže stačí uvažovat pouze čísla do 2020 včetně.

Pojďme nejdříve spočítat, kolikrát se v těchto číslech vyskytuje cifra 4. Desetina všech napsaných čísel, tj. 202, má na místě jednotek cifru 4. Na pozici desítek se čtyřka vyskytuje v desetině čísel od 1 do 2000, ale v číslech od 2001 do 2020 nikdy – to dává dohromady 200 čísel. Na pozici stovek ji pak rovněž najdeme 200krát. Dohromady je tedy čtyřek $202 + 200 + 200 = 602$.

Stejná úvaha platí pro cifry 5 a 7. Lenka tedy celkem napsala 6977 cifer a na $3 \cdot 602 = 1806$ z nich potřebovala dva tahy. Dohromady tudíž udělala $6977 + 1806 = 8783$ tahů.

Úloha 28. Vyplňte tabulku číslicemi $1, 1, 2, 2, \ldots, 8, 8$ tak, aby pro každou číslici n platilo, že mezi oběma výskyty n je právě n políček.

					6	7		2							

Jako výsledek odevzdejte první čtyři čísla zleva jakožto čtyřciferné číslo. Níže vidíte příklad správně vyplněné menší tabulky pro čísla $1, 1, 2, 2, 3, 3$.

3	1	2	1	3	2

Výsledek. 3845

Řešení. Nechť $f(k)$ značí číslo na pozici k. Ze zadání víme, že

$$f(6) = 6, \quad f(7) = 7, \quad \text{a} \quad f(9) = 2.$$

Dále podle pravidel pro vyplnění tabulky nutně dostáváme, že

$$f(13) = 6, \quad f(15) = 7 \quad \text{a} \quad f(12) = 2.$$

					6	7		2			2	6		7	

Dále můžeme postupovat dvěma způsoby – dívat se na dvojice čísel a určit, kde se mohou nacházet, nebo se dívat na políčka a určit, která čísla v nich mohou být. Například, podíváme-li se na trojky, máme tři možnosti

$$f(1) = f(5) = 3 \quad \text{nebo} \quad f(4) = f(8) = 3 \quad \text{nebo} \quad f(10) = f(14) = 3.$$

Pokud by platilo, že $f(10) = f(14) = 3$, pak $f(16)$ může nabývat pouze hodnoty 4, a to dále znamená, že $f(11) = 4$. Nyní ovšem už nemůžeme do tabulky umístit osmičky.

V případě, že $f(4) = f(8) = 3$, máme pro umístění pětek dvě možnosti $f(5) = f(11) = 5$ nebo $f(10) = f(16) = 5$. V obou případech pak nemáme kam umístit čtyřky.

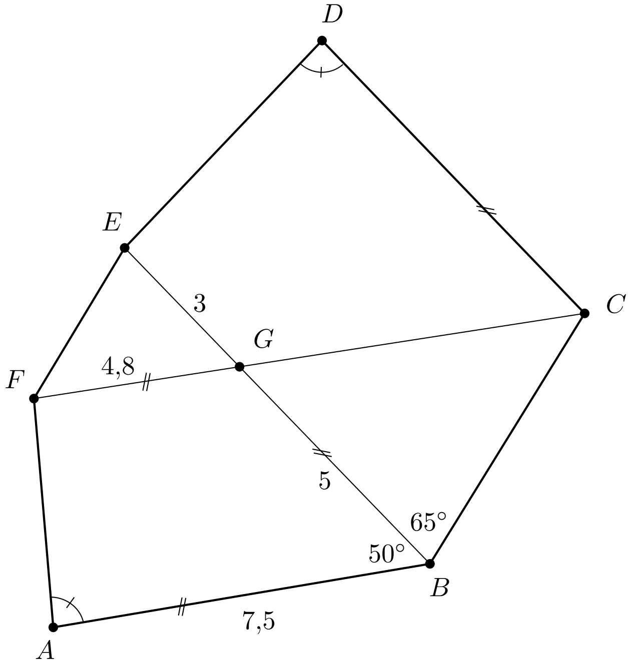
Poslední možnost, která zbývá, je $f(1) = f(5) = 3$, ze které nutně plyne, že $f(2) = f(11) = 8$. Jediná možnost, jak potom doplnit tabulku je

$$f(4) = f(10) = 5, \quad f(3) = f(8) = 4 \quad \text{a konečně} \quad f(14) = f(16) = 1.$$

3	8	4	5	3	6	7	4	2	5	8	2	6	1	7	1

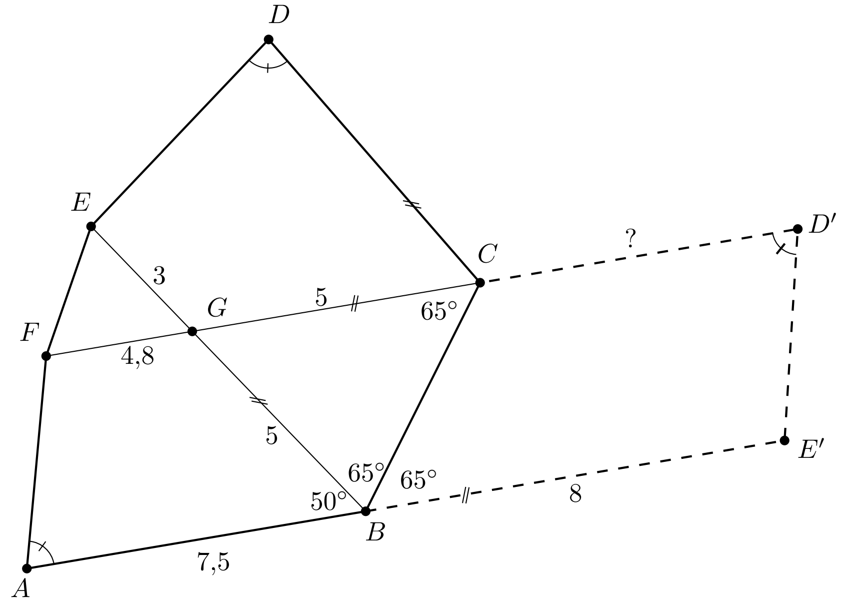
Jediným řešením úlohy je 3845.

Úloha 29. Konvexní šestiúhelník $ABCDEF$ s průsečíkem G úhlopříček BE a CF má následující vlastnosti, naznačené na obrázku: $|AB| = 7{,}5$, $|BG| = 5$, $|GE| = 3$, $|GF| = 4{,}8$, $|\sphericalangle BAF| = |\sphericalangle CDE|$, $|\sphericalangle ABG| = 50°$, $|\sphericalangle CBG| = 65°$, $AB \parallel CF$ a $CD \parallel BE$. Určete délku strany CD.



Výsledek. $5{,}7 = \frac{57}{10}$

Řešení.



Můžeme si představit, že obrázek znázorňuje rovnoběžník $AE'D'F$ přeložený podél úsečky BC. Tuto tezi snadno ověříme: Označme obrazy bodů D, E podle osy souměrnosti BC jako D', E'. Pak $|\sphericalangle CBE'| = 65°$, a protože

$$50° + 65° + 65° = 180°,$$

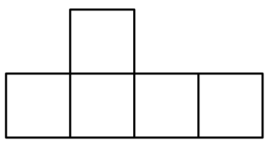
je $|\sphericalangle ABE'| = 180°$. Díky dvojicím rovnoběžných úseček je i $|\sphericalangle FCD'| = 180°$. Shodnost úhlů $|\sphericalangle BAF| = |\sphericalangle CDE|$, tedy i $|\sphericalangle BAF| = |\sphericalangle CD'E'|$, jíž potvrzuje, že $AE'D'F$ je skutečně rovnoběžník.

Z rovnoběžností úseček a ze střídavých a protějších úhlů plyne rovnost $|\sphericalangle BGC| = 50°$. Trojúhelník BGC je tedy rovnoramenný s $|BG| = |CG| = 5$.

Nyní již můžeme spočítat hledanou délku strany šestiúhelníku:

$$|CD| = |AB| + |BE'| - |CF| = |AB| + |EG| - |FG| = 5{,}7.$$

Úloha 30. Matěj s Fílou hrají Lodě. Mezi jinými plavidly mají k dispozici letadlovou loď následujícího tvaru:

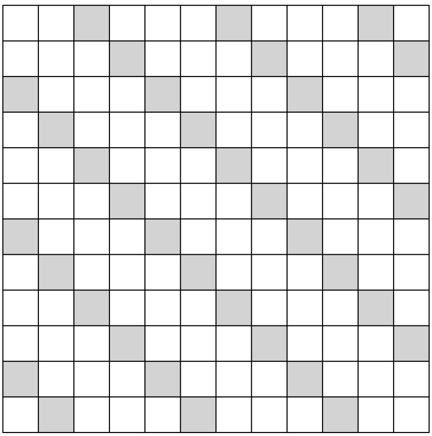


Matěj svou letadlovou loď umístil někam na hrací pole (šachovnici) o rozměrech 12×12. Loď mohl otočit o libovolný násobek 90° a také zrcadlově překlopit. Kolik nejméně střel musel Fíla vystřelit, tj. kolik políček musel vybrat, aby měl jistotu, že Matějovu letadlovou loď zasáhl alespoň jednou, ať už ji Matěj umístil sebelépe?

Výsledek. 36

Řešení. Uvažujme obdélník 4×2. Jak je vidět z prvních dvou obrázků, vystřelí-li Fíla pouze jednou do takového obdélníku a nezasáhne, tak nemá jistotu, že tam letadlová loď není. Musí vystřelit dvakrát – do každého řádku jednou (příklad je na třetím obrázku). Herní plochu umíme bez překrývání pokrýt 18 takovými bloky a na každý z nich potřebuje Fíla dva výstřely. Dohromady tedy musí vystřelit alespoň 36krát.

Zároveň tato strategie zaručuje, že 36 střel stačí, aby Fíla Matějovu loď zasáhl (viz následující obrázek).



Úloha 31. Pro pevné kladné celé číslo a zkonstruujeme ostroúhlý trojúhelník ABC, v němž platí $|BC| = a$ a jehož výšky h_b, h_c mají rovněž celočíselnou délku. Největší obsah, kterého může trojúhelník za těchto podmínek dosáhnout, je 101,4. Určete a.

Výsledek. 13

Řešení. Protože je ABC ostroúhlý, platí $h_b < a$ a $h_c < a$. Pokud ale má být obsah $S = \frac{1}{2}ah_a$ maximální, musejí být obě výšky h_b a h_c co nejdelší (můžeme si ověřit, že pokud se budeme držet podmínky $h_b < a$ a délku výšky h_c necháme stejnou, prodloužením výšky h_b se nutně prodlouží i h_a). Pak musí platit $h_b = h_c = a - 1$, a ABC je tedy rovnoramenný.

Označme střed strany BC jako M a patu výšky h_c jako C_0. Z Pythagorovy věty pro podobné pravoúhlé trojúhelníky $ABM \sim CBC_0$ spočítáme

$$101{,}4 = S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{a^2(a-1)}{4\sqrt{2a-1}}.$$

Protože je 101,4 racionální číslo a $2a - 1$ je zjevně liché, musí být číslo $2a - 1$ druhou mocninou lichého čísla, například $2a-1 = (2k+1)^2$ pro nějaké celé číslo $k \geq 0$. Dosazením zjistíme, že $a = \frac{(2k+1)^2+1}{2} \in \{1, 5, 13, 25, 41, \dots\}$. Vyzkoušíme prvních pár čísel a uvědomíme si, že s rostoucím a roste i obsah. Snadno pak najdeme správnou odpověď $a = 13$.

Úloha 32. Na tabuli je napsáno 1000 kladných celých čísel se součtem 1 200 500. Nejmenší z nich je 101. Seřadíme-li čísla podle velikosti, bude rozdíl každých dvou po sobě jdoucích buď 2, nebo 7. Jaké největší číslo může být za těchto podmínek na tabuli napsané?

Výsledek. 3099

Řešení. Čísla seřazená podle velikosti označme postupně $101 = n_1, n_2, \dots, n_{1000}$. Představme si nejprve, že rozdíl každých dvou po sobě jdoucích čísel je roven 2. Potom

$$n_{1000} = 101 + 2 \cdot 999 = 2099,$$
$$\sum_{i=1}^{1000} n_i = 2200 \cdot 500 = 1\,100\,000.$$

Rozdíl mezi zadaným součtem čísel na tabuli a minimálním součtem čísel, která splňují podmínku na rozdíl ze zadání, je $100\,500 = 20\,100 \cdot 5$. Zvětšíme-li rozdíl $n_{i+1} - n_i$ z dvou na sedm, pak se součet všech čísel zvýší o $(1000 - i) \cdot 5$ a poslední číslo se zvýší o 5.

Z toho plyne, že pro maximalizaci n_{1000} musí být rozdíl 7 mezi čísly na co největších indexech, aby se součet zvětšoval co nejpomaleji (za předpokladu, že se pak dopočítáme na správný součet). Naštěstí je číslo 20 100 dělitelné třemi, tedy když zvětšíme rozdíly čísel $n_{i+1} - n_i$ pro $i = 800, \dots, 999$ na 7 místo 2, dostaneme požadovaný součet. Největší možné napsané číslo pak je

$$n_{1000} = 101 + 2 \cdot 999 + 200 \cdot 5 = 3099.$$

Úloha 33. Jaké nejmenší kladné celé číslo dělitelné 11 má lichý počet cifer a obsahuje pouze číslice 2 a 9?

Výsledek. 29 292 929 292

Řešení. Nejprve uvedeme řešení, které nevyužívá znalost kritéria dělitelnosti jedenáctkou; jednodušší řešení založené na této podmínce je uvedeno v posledním odstavci.

Všimněme si nejdříve, že 100 dává po dělení 11 zbytek 1. To znamená, že pokud číslo vynásobíme stem, nezmění se jeho zbytek po dělení 11. Nyní předpokládejme, že kladné číslo v desítkovém zápisu obsahuje dvě stejné číslice a za sebou. Pak lze toto číslo napsat ve tvaru $x \cdot 10^{n+2} + 11 \cdot a \cdot 10^n + y$ pro vhodná celá čísla x, y a n.

Zřejmě platí, že číslo $x \cdot 10^n + y$ je menší než předchozí číslo, jeho počet cifer má stejnou paritu a zároveň dává stejný zbytek po dělení 11, protože vzniklo z předchozího součtu podělením prvního členu 100 a vyškrtnutím druhého členu, který je dělitelný 11. Z toho plyne, že hledané číslo neobsahuje dvojici po sobě jdoucích dvojek nebo devítek, protože jejich vyškrtnutím bychom dostali menší číslo s kýženými vlastnostmi.

Nyní budeme jednoduše zkoušet delší a delší čísla tvaru

$$2929\ldots292 \quad \text{a} \quad 9292\ldots929,$$

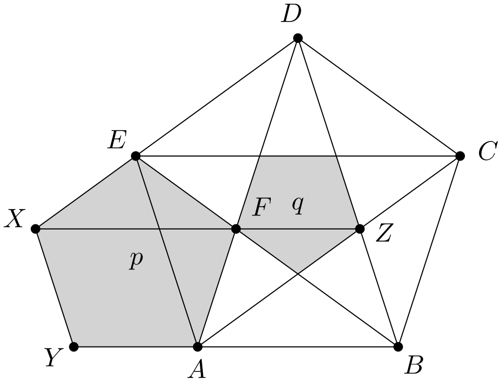
než najdeme nejmenší takové číslo dělitelné 11.

Řešení je ještě jednodušší, pokud si pamatujeme pravidlo dělitelnosti 11: číslo je dělitelné 11 právě tehdy, když rozdíl součtu cifer na lichých a sudých pozicích je dělitelný 11. Z toho je okamžitě vidět, že vyškrtnutím dvou po sobě jdoucích stejných cifer se nezmění dělitelnost 11. Když pak dále uvažujeme čísla, v nichž se střídají dvojky a devítky, tak ta jsou dělitelná 11, pokud výrazy $2n - 9(n+1)$ (pro čísla začínající devítkou) nebo $9n - 2(n+1)$ (pro čísla začínající dvojkou) jsou dělitelné 11. V obou případech je nejmenší takové n rovno 5. Kandidáti na nejmenší číslo jsou proto 29 292 929 292 a 92 929 292 929. Vybereme to menší z nich.

Úloha 34. Mějme pravidelný pětiúhelník $ABCDE$ a označme F průsečík úhlopříček AD a BE. Rovnoramenný trojúhelník AFE lze rozšířit na pravidelný pětiúhelník $AFEXY$, který označíme jako p. Pravidelný pětiúhelník, jehož vrcholy jsou průsečíky úhlopříček pětiúhelníku $ABCDE$, označíme q. Jak daleko od sebe jsou nejvzdálenější vrcholy pětiúhelníků p a q, pokud víme, že $|AF| = 1$?

Výsledek. $\frac{3+\sqrt{5}}{2} \doteq 2{,}61803$

Řešení. Všimněme si, že pětiúhelníky p a q se na sebe zobrazí ve stejnolehlosti se středem F. Tímto bodem také prochází spojnice obou dvojic nejvzdálenějších vrcholů, z nichž jsme si jednu vybrali a označili ji písmeny X a Z.



Platí, že vnitřní úhel při vrcholu pravidelného pětiúhelníku má $108°$ a úhlopříčka pětiúhelníku vedená z tohoto vrcholu dělí tento úhel v poměru $2 : 1$. Z toho plyne, že $|\sphericalangle FAZ| = |\sphericalangle FZA| = 36°$, takže trojúhelník AFZ je rovnoramenný a

$$|FZ| = |FA| = 1.$$

Protože mají všechny úhlopříčky v pravidelném pětiúhelníku stejnou délku, platí $|XF| = |AE|$. Použitím kosinové věty v rovnoramenném trojúhelníku AFE získáme, že

$$|XF| = |AE| = \sqrt{1 + 1 - 2\cos 108°} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}).$$

Nakonec spočítáme, že

$$|XZ| = |XF| + |FZ| = |AE| + |FA| = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Úloha 35. Uvažujme všechny uspořádané trojice prvočísel (a, b, c), které řeší rovnici

$$175a + 11ab + bc = abc.$$

Jaký je součet všech možných hodnot, kterých může c nabývat?

Výsledek. 281

Řešení. Rovnici přepíšeme do tvaru

$$a(bc - 11b - 175) = bc.$$

Z toho plyne, že a dělí součin bc. Protože všechna tři čísla jsou prvočísla, musí nutně platit $a = b$ nebo $a = c$. V prvním případě dostaneme, že

$$ac - 11a - 175 = c \quad \Longleftrightarrow \quad (a-1)(c-11) = 186.$$

Z poslední rovnice dopočítáme jediné prvočíselné řešení $(2, 2, 197)$. V druhém případě dostaneme

$$ab - 11b - 175 = b \quad \Longleftrightarrow \quad 175 = b(a-12)$$

a z toho pak další dvě prvočíselná řešení $(47, 5, 47)$ a $(37, 7, 37)$. Hledaný součet je $197 + 47 + 37 = 281$.

Úloha 36. Alča s Jirkou hledají ideální místo na dovolenou. Výběr zúžili na deset možností, ale nemohou se shodnout, která je ta pravá. Nakonec se dohodli, že to udělají následovně: Každý z nich očísluje destinace náhodně čísly od 1 do 10, přičemž každé použije právě jednou. Pokud bude existovat právě jedna destinace, které oba přiřadili číslo nejvýše 3, pak tam pojedou. Jinak zůstanou trčet doma. Jaká je šance, že někam vyrazí?

Výsledek. $\frac{21}{40}$

Řešení. Označme destinace podle Alčina očíslování jako $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$. Na dovolenou Alča s Jirkou vyrazí právě tehdy, Jirka přiřadí jedno z čísel 1 až 3 některé destinaci z trojice A_1, A_2, A_3 a zbylá dvě některé destinaci z A_4, $A_5, \ldots, A_{10}$. Šance, že se mu to náhodným očíslováním povede, je

$$\frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{7}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{21}{40}.$$

Úloha 37. Mějme polynomy

$$p(x) = ax^{2021} + bx^{2020} + \cdots + ax^{2k-1} + bx^{2k-2} + \cdots + bx^2 + ax + b$$

a $q(x) = ax^2 + bx + a$, kde a a b jsou kladná reálná čísla. Víme, že $q(x)$ má jeden reálný kořen násobnosti 2. Najděte součet všech reálných kořenů polynomu $p(x)$.

Výsledek. -2

Řešení. Všimněme si, že polynom $p(x)$ můžeme napsat ve tvaru

$$(ax+b)(x^{2020}+x^{2018}+\cdots+x^{2n}+\cdots+x^2+1),$$

kde druhý člen je kladný, takže jediný reálný kořen tohoto polynomu je $x=\frac{-b}{a}$. Navíc víme, že $q(x)$ má dvojný kořen, takže platí

$$b^2-4a^2=0.$$

Protože a i b jsou kladná čísla, dostáváme $b=2a$. Dohromady vidíme, že součet kořenů je

$$\frac{-b}{a}=\frac{-2a}{a}=-2.$$

Úloha 38. Kuba napsal na tabuli všechna prvočísla p, která mají následující vlastnost: Lze najít kladné celé číslo n, pro které má desetinný rozvoj $\frac{n}{p}$ nejkratší periodu délky 5. Určete součet těchto prvočísel.

Výsledek. 312

Řešení. Nejprve zdůvodníme, proč můžeme předpokládat, že $n<p$ a že 5-periodický desetinný rozvoj $\frac{n}{p}$ začíná hned za desetinnou čárkou: Kdykoli je totiž rozvoj $\frac{n}{p}$ jen *posléze* periodický, můžeme posunout desetinnou čárku vynásobením čísla n vhodnou mocninou 10. Pokud je potom $n\geq p$, najdeme $n'<p$ splňující $n=kp+n'$. Volbou n' místo n pak „vymažeme" část před desetinnou čárkou.

Pokud je $0{,}\overline{ABCDE}$ periodický desetinný rozvoj $\frac{n}{p}$, pak $99999\cdot\frac{n}{p}=10^5\cdot\frac{n}{p}-\frac{n}{p}=ABCDE$ je celé číslo. Protože $n<p$ a p prvočíslo, vyplývá z toho, že $p\mid 99999$, neboli $p\mid 3^2\cdot 41\cdot 271$. Jak $\frac{1}{3}$, tak i $\frac{2}{3}$ mají nejkratší periodu délky 1, ale $\frac{1}{41}=0{,}\overline{02439}$ a $\frac{1}{271}=0{,}\overline{00369}$ jsou požadovaného tvaru. Výsledek je tedy $41+271=312$.

Úloha 39. Čtyři lidé sedí v místnosti. Každý z nich mluví právě třemi z následujících pěti jazyků (a žádnou jinou řeč neumí): angličtina, byrokratština, gaelština, irština a velština. Je jasné, že způsobů, jak přiřadit konkrétní jazyky těmto čtyřem lidem, je 10000. Pro kolik z těchto způsobů existuje člověk, který si může stěžovat v jazyce, jemuž všichni rozumějí?

Výsledek. 5680

Řešení. Očíslujme jazyky čísly 1 až 5. Následně symbolem A_i označme množinu všech možných přiřazení jazyků, ve kterých je i-tý jazyk srozumitelný pro všechny – formálně vzato jde o množinu uspořádaných čtveřic neuspořádaných trojic jazyků, v nichž každá trojice obsahuje i-tý jazyk. Úloha se nás pak ptá po $\left|\bigcup_{i=1}^5 A_i\right|$, což spočteme pomocí principu inkluze a exkluze. Velikost jedné množiny A_i určíme snadno: Máme vybraný jeden „společný“ jazyk (ten i-tý) a celkem $\binom{4}{2}^4 = 6^4$ možností, jak všem vybrat zbylé dva – 6 způsobů pro každého člověka, přičemž výběr u dvou různých lidí je nezávislý. Těchto množin je 5.

Následně spočítáme velikosti průniků $A_i \cap A_j$. Máme vybrané dva společné jazyky (i-tý a j-tý) a celkem 3^4 způsobů, jak doplnit pro každého člověka zbylý jazyk. Těchto množin je tolik, kolika způsoby můžeme vybrat dva společné jazyky, tedy $10 = \binom{5}{2}$.

Nakonec se zaměříme na průniky trojic množin $A_i \cap A_j \cap A_k$. Tři společné jazyky můžeme vybrat $10 = \binom{5}{3}$ způsoby, a pro každý z nich je velikost daného průniku rovna jedné. Průniky více než tří A_i jsou nulové. Z principu inkluze a exkluze tedy můžeme psát

$$\left|\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right| = 5 \cdot 6^4 - 10 \cdot 3^4 + 10 = 6480 - 810 + 10 = 5680,$$

což je hledané řešení úlohy.

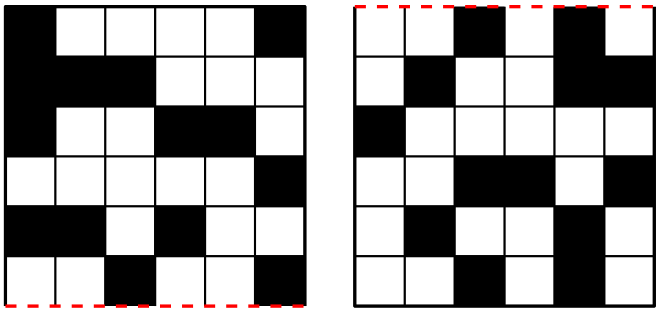
Úloha 40. Julie sepsala všechny zlomky, jejichž jmenovatel i čitatel jsou kladná celá čísla menší nebo rovna 100, a pak smazala ty z nich, které nejsou v základním tvaru. Zbývající zlomky seřadila od nejmenšího po největší. Který zlomek se objeví bezprostředně před $\frac{2}{3}$?

Výsledek. $\frac{65}{98}$

Řešení. Pokud $\frac{a}{b}$ je menší než $\frac{2}{3}$, pak $\frac{a+2}{b+3}$ je větší než $\frac{a}{b}$ a menší než $\frac{2}{3}$. Stačí tedy vyzkoušet zlomky s jmenovateli 98, 99 a 100. Řešením je největší ze zlomků $\frac{65}{98}$, $\frac{65}{99}$ a $\frac{66}{100} = \frac{33}{50}$. Porovnáním určíme, že

$$\frac{65}{99} < \frac{33}{50} < \frac{65}{98} < \frac{2}{3}.$$

Úloha 41. Dvacet tři jednotkových černých kostek je umístěno do krychlové sítě o straně délky 6. Obrázek znázorňuje, jak výsledný objekt vypadá shora (levý čtverec) a zepředu (pravý čtverec). Bílý čtvereček znamená, že v daném sloupci není žádná černá kostka. Společná hrana horního a předního čtverce je vyznačena červeně. Jaký je celkový povrch černého objektu?



Výsledek. 130

Řešení. Celkový povrch objektu je roven součtu povrchů jednotlivých černých kostek bez dvojnásobku počtu všech stěn, kterými se některé dvě černé kostky dotýkají. Podle orientace kostek rozlišujeme tři typy dotyků. Označme je předo-zadní, horno-dolní a pravo-levý. Třetí zmiňovaný typ dotyku se musí promítnout do obou obrázků, a to dvojicí horizontálně sousedících černých čtverečků ve stejných dvou sloupcích. Projdeme-li obrázky sloupec po sloupci, zjistíme, že takový dotyk nemohl nastat.

Pokud se kostky dotýkají předo-zadně, pak se na prvním obrázku promítnou do téhož sloupce a budou sdílet vodorovnou hranu, a na druhém obrázku se jeví jako jeden černý čtvereček. Na prvním obrázku máme v prvním sloupci tři čtverce, které sdílejí dvě hrany. Vzhledem k tomu, že na druhém obrázku je v tomto sloupci jediný černý čtverec, připadají na ně celkem dva předo-zadní dotyky; v dalších sloupcích už první obrázek takový dotyk neumožňuje. Horno-dolní dotyk se od předo-zadního liší jen tím, že si obrázky prohodí role. Stejnou úvahou jako v případě předo-zadního dotyku proto dojdeme k tomu, že i tyto dotyky jsou dva (tentokrát v pátém sloupci).

Plocha objektu je tedy $6 \cdot 23 - 2 \cdot 4 = 130$.

Úloha 42. Posloupnost kladných celých čísel $d_1, d_2, \dots, d_k$ nazveme *postupným rozkladem* kladného celého čísla N, pokud platí $k \geq 1$, $d_1 \neq 1$, jsou splněny dělitelnosti $d_1 \mid d_2 \mid d_3 \mid \cdots \mid d_k \mid N$ a zároveň platí $d_1 \cdot d_2 \cdots d_k = N$. Číslo d_k nazveme *vedoucím členem* daného postupného rozkladu. Určete aritmetický průměr vedoucích členů přes všechny postupné rozklady čísla 720.

Výsledek. 204

Řešení. Víme, že $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$. Podíváme-li se na exponenty jednotlivých prvočísel, tak ty v postupném rozkladu tvoří neklesající posloupnost, jejíž součet je roven exponentu tohoto prvočísla v čísle 720. Pro prvočíslo dvě máme možnosti $(1,1,1,1)$, $(1,1,2)$, $(2,2)$, $(1,3)$, (4) a všechny předchozí s přidáním libovolně mnoha nul na začátek. Pro trojku máme podobně možnosti $(1, 1)$ nebo (2) a pro pětku pouze (1). V obou případech můžeme opět na začátek přidat několik nul. Libovolná kombinace těchto posloupností nám dává platný rozklad exponentů jednotlivých prvočísel, pokud všechny posloupnosti doplníme na délku nejdelší z nich nulami na začátku. Celkem tedy máme $5 \cdot 2 \cdot 1 = 10$ postupných rozkladů čísla 720 a aritmetický průměr vedoucích členů je

$$\frac{(2+4+4+8+16)\cdot(3+9)\cdot 5}{10} = 204.$$

Úloha 43. Hra Scrabboj se skládá z hrací desky 5×1 a balíčku několika kamenů s písmeny N, A, B, O, J (přičemž dva kameny se stejným písmenem považujeme za různé kameny). Kolik existuje různých sad Scrabboje takových, že slovo $NABOJ$ lze složit 1440 způsoby?

Výsledek. 9450

Řešení. Označme n, a, b, o, j po řadě počty kamenů s písmeny N, A, B, O, J. Hledáme pětice (n, a, b, o, j) s

$$n \cdot a \cdot b \cdot o \cdot j = 1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Mocniny každého prvočísla mohou být nezávisle rozděleny mezi čísla n, a, b, o, j a různá rozdělení odpovídají různým pěticím. Například pro prvočíslo 2 potřebujeme rozdělit 5 objektů do pěti krabiček. To lze udělat $\binom{9}{4}$ různými způsoby, neboť ekvivalentně si můžeme vybrat, která z 9 věcí je objekt a která je rozdělovač mezi krabičkami. Obdobně pro 3 existuje $\binom{6}{4}$ různých způsobů a pro 5 jich je $\binom{5}{4}$. Celkem tedy existuje

$$\binom{9}{4} \cdot \binom{6}{4} \cdot \binom{5}{4} = 126 \cdot 15 \cdot 5 = 9450$$

vhodných sad Scrabboje.

Úloha 44. Najděte největší kladné celé číslo n takové, že $4^{2021} + 4^n + 4^{3500}$ je druhá mocnina celého čísla.

Výsledek. 4978

Řešení. Předpokládejme, že n je aspoň 2021. Po vydělení $4^{2021} + 4^n + 4^{3500}$ číslem $4^{2021} = \left(2^{2021}\right)^2$ potom dostaneme opět čtverec

$$1 + (2^m)^2 + 2^{2958},$$

kde $m = n - 2021$. Tento výraz je druhou mocninou čísla většího než 2^m. Můžeme ho tedy zapsat jako

$$(2^m)^2 + 2^{2958} + 1 = (2^m + x)^2$$

pro nějaké kladné celé číslo x. Potom $x \cdot 2^{m+1} + x^2 = 2^{2958} + 1$. Levá strana roste s rostoucími m i x, zatímco pravá strana je konstantní. Řešení s největším m má tedy nejmenší x. Pro $x = 1$ dostaneme $m = 2957$ a $n = m + 2021 = 4978$. Náš počáteční předpoklad, že největší n je nejméně 2021, je tedy potvrzen. Řešením je $n = 4978$.

Úloha 45. Kolik koeficientů polynomu

$$P(x) = \prod_{i=2}^{2021} (x^i + (-1)^i i) = (x^2+2)(x^3-3)(x^4+4)\cdots(x^{2021}-2021)$$

je kladných (ostře větších než 0)?

Výsledek. 1021616

Řešení. Definujme polynom

$$\begin{aligned} Q(x) = P(-x) &= (x^2+2)(-x^3-3)(x^4+4)\cdots(-x^{2021}-2021) = \\ &= (-1)^{1010}(x^2+2)(x^3+3)(x^4+4)\cdots(x^{2021}+2021) \end{aligned}$$

a všimněme si, že všechny nenulové koeficienty jsou kladné a že v žádném členu není x v první mocnině. Tvrdíme, že tyto koeficienty odpovídají skoro všem mocninám x^k, kde

$$0 \le k \le 2 + 3 + \cdots + 2021 = 2\,043\,230 = S.$$

Určitě však $k \neq 1$ a $k \neq S - 1$, protože žádná závorka neobsahuje x, takže nejnižší nenulová mocnina x je x^2 a druhá nejvyšší mocnina je x^{S-2}.

Nyní dokážeme, že všechny ostatní mocniny výše jsou v polynomu přítomny s kladným koeficientem, neboli že nejmenší číslo m větší než 1, které nelze zapsat jako součet nějaké podmnožiny čísel z množiny $\{2, 3, \ldots, 2021\}$, je $S - 1$. Tvrzení jsou ekvivalentní, protože platí, že ve výsledném součinu jsou právě ty mocniny x, které lze napsat jako součin nějaké podmnožiny mocnin x v závorkách. Zřejmě $m \geq 3$.

Tvrdíme, že

$$m - 1 = k + (k+1) + \ldots + 2021$$

pro nějaké $k = 2, 3, \ldots, 2021$. V opačném případě umíme $m - 1$ zapsat jako součet čísel z podmnožiny M množiny $\{2, 3, \ldots, 2021\}$ a navíc existuje číslo o jedničku větší než nějaké číslo z M, které v množině M není a není větší než 2021. Vyměníme-li tato dvě čísla, pak součet čísel z M je roven m, což je spor.

Navíc platí, že $k \leq 3$, jinak

$$2 + (k - 1) + (k + 1) + \cdots + 2021$$

je způsob, jak vyjádřit m. To znamená, že $m = 1 + 3 + 4 + \cdots + 2021 = S - 1$. Tedy $Q(x)$ má $\frac{S}{2} + 1$ kladných koeficientů u sudých mocnin x a $\frac{S}{2} - 2$ kladných koeficientů u lichých mocnin x. Původní polynom má znaménka koeficientů u lichých mocnin opačná než $Q(x)$, takže má právě $\frac{S}{2} + 1 = 1\,021\,616$ kladných koeficientů.

Úloha 46. David před sebou vidí velkou krychli, která je tvořena $4 \times 4 \times 4$ krychličkami o hraně délky 1. Hrany těchto krychliček tvoří krychlovou mřížku. Označme jeden z vrcholů velké krychle $(0, 0, 0)$ a dále vrcholy krychliček souřadnicemi (x, y, z) podle jejich polohy v mřížce. David se ptá sám sebe, kolika způsoby se po hranách těchto krychliček může dostat z bodu $(0, 0, 0)$ do bodu $(4, 4, 4)$, aniž by při tom prošel vrcholem $(2, 2, 2)$. Aby nemusel tolik počítat, rozhodl se, že ho zajímají pouze nejkratší takové cesty. Kolik jich je?

Výsledek. 26550

Řešení. Všimněme si, že libovolná cesta délky 1 z bodu (x, y, z) nás dovede do bodu, který se oproti němu bude lišit právě v jedné souřadnici, a to o ± 1. Abychom se dostali z bodu $(0, 0, 0)$ do $(4, 4, 4)$, musíme tedy projít alespoň čtyři hrany v kladném směru osy x, alespoň čtyři v kladném směru osy y a alespoň čtyři v kladném směru osy z.

Půjdeme-li po hraně v opačném než kladném směru, pak nejdeme po nejkratší cestě, protože za každou takovou hranu pak musíme jít hranou v opačném směru a tyto dvě hrany nás v součtu nikam neposunou. Nejkratší cesta má tedy dvanáct hran (všechny procházíme v kladném směru některé z os). Pro určení počtu takových cest můžeme nejdříve vybrat, které z těchto dvanácti hran povedou ve směru osy x, a ze zbylých osmi pak čtyři hrany, které povedou ve směru osy y, tj.

$$\binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} = \frac{12!}{4! \cdot 4! \cdot 4!}.$$

Nyní zbývá určit počet cest, které prochází bodem $(2, 2, 2)$. Ze symetrie víme, že počet nejkratších cest vedoucích z $(0, 0, 0)$ do $(2, 2, 2)$ je roven počtu nejkratších cest z $(2, 2, 2)$ to $(4, 4, 4)$, což je na základě stejné argumentace jako výše

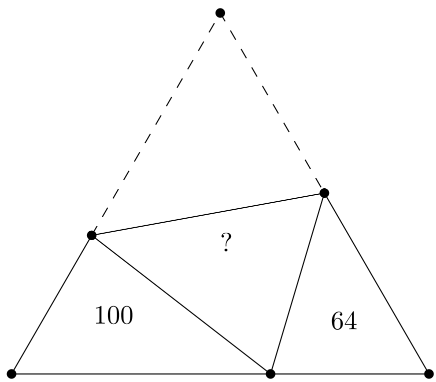
$$\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} = \frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}.$$

Pro každou cestu z $(0,0,0)$ do $(2,2,2)$ existuje $\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}$ možných pokračování z $(2,2,2)$ do $(4,4,4)$. Počet cest procházejících bodem $(2,2,2)$ je tedy

$$\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}\cdot\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}=\frac{6!\cdot 6!}{2^6}.$$

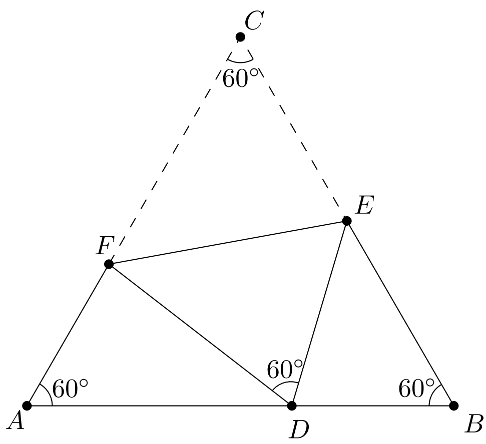
Číslo, které David hledá, je pak $\frac{12!}{(4!)^3}-\frac{(6!)^2}{2^6}=26550$.

Úloha 47. Rovnostranný trojúhelník přehneme tak, aby se jeden z jeho vrcholů dotýkal protější strany (viz obrázek). Obsahy trojúhelníků, které vzniknou v nepřehnuté části trojúhelníku, jsou 100 a 64. Najděte obsah přehnuté (trojúhelníkové) části.



Výsledek. 98

Řešení. Do obrázku jsme zaznačili důležité body a také známé úhly.



Víme, že trojúhelník ABC je rovnostranný, takže

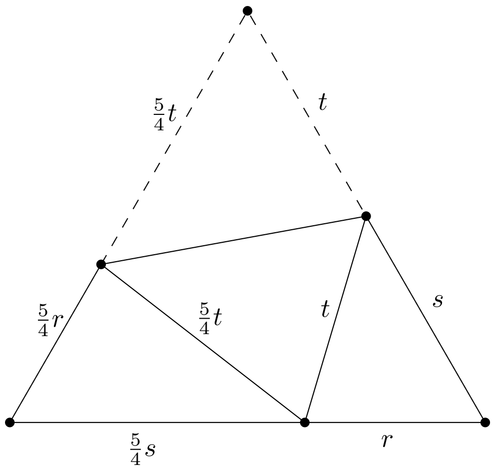
$$|\sphericalangle BDE| + |\sphericalangle DEB| = 120^\circ = |\sphericalangle BDE| + |\sphericalangle FDA|.$$

Z toho plyne, že $|\sphericalangle DEB| = |\sphericalangle FDA|$, a tedy trojúhelníky ADF a BED jsou podobné. Poměr obsahů těchto trojúhelníků je $100 : 64$, takže poměr odpovídajících si stran je $5 : 4$.

Označíme-li

$$r = |DB|, \quad s = |BE|, \quad t = |ED|,$$

pak můžeme délky úseček v obrázku vyjádřit následujícím způsobem:



Pro a délku strany strany původního rovnostranného trojúhelníku dostaneme následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}
a &= s + t,\\
a &= \frac{5}{4}(r + t),\\
a &= \frac{5}{4}s + r,\\
64 &= \frac{1}{2}rs \cdot \sin 60^\circ = rs \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}.
\end{aligned}$$

Odečteme-li od sebe první dvě rovnice, dostaneme $t = 4s - 5r$. Dosadíme-li tento mezivýsledek do druhé rovnice a tu odečteme od třetí, pak úpravou obdržíme $s = \frac{8}{5}r$. Poslední rovnici nakonec využijeme k tomu, abychom spočítali r:

$$64 = r^2 \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \Longrightarrow \quad r = \sqrt{\frac{160}{\sqrt{3}}}.$$

Zpětným dosazením zjistíme, že

$$s = \frac{8}{5}\sqrt{\frac{160}{\sqrt{3}}} \quad \text{a} \quad t = \frac{7}{5}\sqrt{\frac{160}{\sqrt{3}}}.$$

Využitím analogického vztahu pro výpočet obsahu, jako byla čtvrtá rovnice, nakonec zjistíme, že hledaný obsah je

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{4}t\right) \cdot t \cdot \sin 60^\circ = \frac{5}{8} \cdot \frac{49}{25} \cdot \frac{160}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 98.$$

Úloha 48. Marian hází mincí, dokud mu ve třech po sobě jdoucích hodech nepadne posloupnost panna–orel–panna. Jaká je pravděpodobnost, že padla tato posloupnost, ale v žádných čtyřech po sobě jdoucích hodech nepadla posloupnost orel–panna–orel–panna?

Marian má férovou minci, takže pravděpodobnost, že padne panna, respektive orel, je $\frac{1}{2}$.

Výsledek. $\frac{5}{8}$

Řešení. Označme E jev, kdy padne posloupnost panna–orel–panna (zkráceně POP) předtím, než padne posloupnost $OPOP$. Pravděpodobnost, že tento jev nastane, značíme $\mathrm{P}(E)$. Pro danou konečnou posloupnost hodů s označme $\mathrm{P}(E \mid s)$ pravděpodobnost, že nastane jev E v posloupnosti hodů začínající posloupností s a dále pokračující náhodně. Označme $x = \mathrm{P}(E \mid P)$ a $y = \mathrm{P}(E \mid O)$. Rozvinutím počáteční posloupnosti hodů dostaneme, že:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\,\mathrm{P}(E \mid PP) + \frac{1}{2}\,\mathrm{P}(E \mid PO) = \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{P}(E \mid PP) + \frac{1}{4}\,\mathrm{P}(E \mid POO) + \frac{1}{4}\,\mathrm{P}(E \mid POP). \end{aligned} \tag{2}$$

Podobně rozvineme i y, nicméně jdeme ještě o krok dál:

$$y = \frac{1}{2}\,\mathrm{P}(E \mid OO) + \frac{1}{4}\,\mathrm{P}(E \mid OPP) + \frac{1}{8}\,\mathrm{P}(E \mid OPOO) + \frac{1}{8}\,\mathrm{P}(OPOP). \tag{3}$$

Protože se panna a orel v posloupnostech POP i $OPOP$ pravidelně střídají, platí

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{P}(E \mid P) = \mathrm{P}(E \mid PP) = \mathrm{P}(E \mid OPP), \\ y &= \mathrm{P}(E \mid O) = \mathrm{P}(E \mid OO) = \mathrm{P}(E \mid POO) = \mathrm{P}(E \mid OPOO). \end{aligned}$$

Zřejmě $\mathrm{P}(E \mid POP) = 1$ a $\mathrm{P}(E \mid OPOP) = 0$, díky čemuž můžeme rovnice (2) a (3) upravit do tvaru

$$\begin{aligned} x &= \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{1}{4}, \\ y &= \frac{y}{2} + \frac{x}{4} + \frac{y}{8}. \end{aligned}$$

Soustava má řešení $x = \frac{3}{4}$ a $y = \frac{1}{2}$. Každá posloupnost se stejnou pravděpodobností začne pannou nebo orlem, takže konečně

$$\mathrm{P}(E) = \frac{1}{2}\mathrm{P}(E \mid P) + \frac{1}{2}\mathrm{P}(E \mid O) = \frac{x+y}{2} = \frac{5}{8}.$$

Úloha 49. Najděte nejmenší kladné reálné číslo x, které má následující vlastnost: Existuje alespoň jedna trojice kladných reálných čísel (s, t, u) řešící soustavu rovnic

$$\begin{aligned} s^2 - st + t^2 &= 12, \\ t^2 - tu + u^2 &= x, \end{aligned}$$

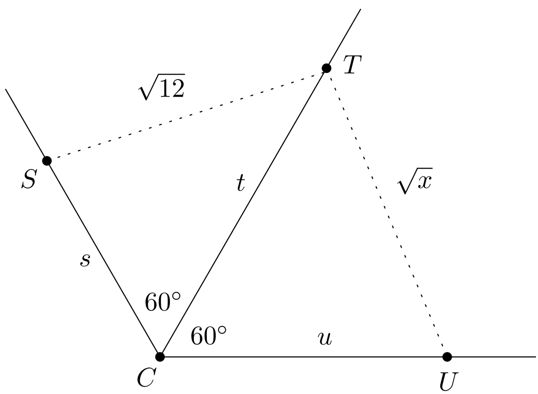
a navíc platí, že žádné dvě trojice kladných reálných čísel řešící tuto soustavu se neliší pouze v poslední souřadnici, tj. v hodnotě u.

Výsledek. 16

Řešení. Uvažujme v rovině body S, T, U a C takové, že platí $|CS| = s$, $|CT| = t$, $|CU| = u$ a

$$|\sphericalangle SCT| = |\sphericalangle TCU| = 60^\circ \quad \text{a} \quad |\sphericalangle SCU| = 120^\circ,$$

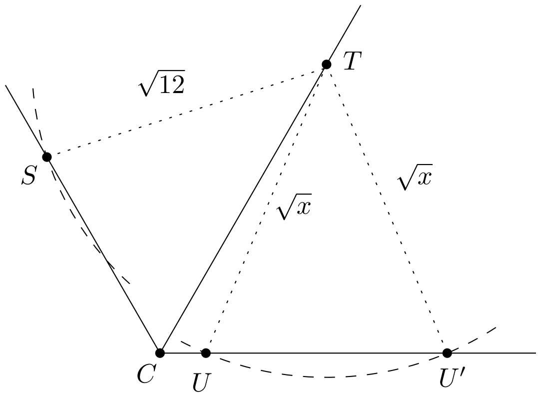
kde s, t a u jsou neznámé ze zadání. Z kosinových vět pro trojúhelníky CST a CTU a ze zadaných rovnic plyne, že $|ST|^2 = 12$ a $|TU|^2 = x$.



Všimněme si, že je-li x pevné, pak v soustavě ze zadání hodnota u závisí pouze na t. V řeči obrázků to znamená, že pro pevné hodnoty s, t a úhel $|\sphericalangle TCU| = 60°$ hledáme $x = |TU|^2$ takové, že bod U je jednoznačně určený. Pro libovolnou pevnou hodnotu t to znamená buď

$$|TU| \geq t, \quad \text{nebo} \quad |TU| = t \sin 60° < t.$$

Druhý případ je ekvivalentní tomu, že přímka CU je tečnou kružnice se středem v bodě T a poloměrem $|TU|$.



Zkusme nyní najít největší hodnotu t. Je-li délka $|ST|$ pevná, pak je úsečka CT nejdelší, pokud je kolmá na CS. V tom případě

$$|CT| = \frac{2\sqrt{3}}{3}|ST| = 4$$

a bod U je jednoznačně určen, pokud

$$|TU| \geq 4 \quad \text{nebo} \quad |TU| = 4 \sin 60° < 4.$$

Nyní si uvědomme, že t nabývá, v závislosti na velikosti úhlu $\sphericalangle CST$, všech hodnot v intervalu $(0, 4\rangle$, takže aby byl bod U jednoznačně určen, musí platit $|TU| \geq t$ pro všechny hodnoty t, a tedy hledané x je $x = 4^2 = 16$.

Úloha 50. Anička sečetla 2020 po sobě jdoucích nezáporných celých čísel. Martina ji chtěla trumfnout, a tak sečetla $2020 + x$ po sobě jdoucích nezáporných celých čísel. Překvapilo ji, že dostala stejný výsledek. Pro kolik čísel $x \in \{1, 2, 3, \ldots, 2020\}$ se to mohlo stát?

Výsledek. 1262

Řešení. Označme první člen kratší posloupnosti n a delší m. Pak lze podmínku ze zadání formulovat následovně: Pro která x existují m a n taková, že platí následující rovnice:

$$2020n + \frac{2019 \cdot 2020}{2} = (2020 + x)m + \frac{(2019 + x)(2020 + x)}{2},$$
$$2020(n - m) = x\frac{2m + 2019 + 2020 + x}{2}? \tag{4}$$

Levá strana druhé rovnice je dělitelná čtyřmi, takže čtyřmi musí být dělitelná i pravá strana, tj.

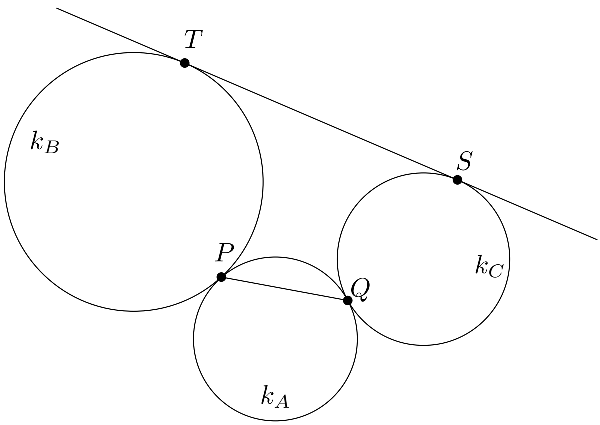
$$4 \mid x\left(m + \frac{x-1}{2}\right).$$

Z toho plyne, že buď je x liché (a tedy je závorka dělitelná čtyřmi), nebo $8 \mid x$ (když je x sudé, pak je $x - 1$ liché a jednu mocninu dvojky ztratíme, protože závorka není celočíselná).

Nyní můžeme ověřit, že pro $x = 2k+1$, $k \in \{0, 1, \ldots, 1009\}$, $m = 2020 - k$ a $n = 2020 + 3k + 2$ rovnice (4) platí. Pro $x = 8k$, $k \in \{1, 2, \ldots, 252\}$ rovnice (4) platí s $m = 1263 - 4k$ a $n = 1263 + 9k$ (čísla m a n jsou kladná pro všechny hodnoty k).

Celkem jsme tedy našli $1010 + 252 = 1262$ možných hodnot x a ukázali jsme, že žádné jiné nepřipadají v úvahu.

Úloha 51. Kružnice k_B a k_C se dotýkají kružnice k_A postupně v bodech P a Q. Najděte poloměr kružnice k_A, pokud víte, že poloměry kružnic k_B a k_C jsou $r_B = 5$ a $r_C = 3$, že $|PQ| = 6$ a že vzdálenost bodů dotyku těchto kružnic se společnou vnější tečnou je $|TS| = 12$, viz obrázek.

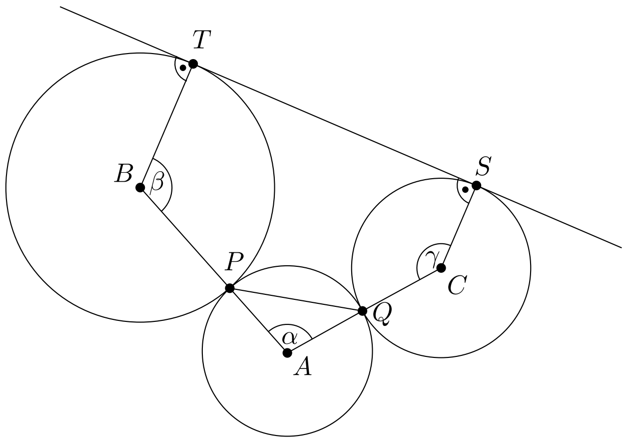


Výsledek. $\frac{4+\sqrt{61}}{3} \doteq 3{,}93675$

Řešení. Označme A, B a C středy kružnic k_A, k_B a k_C. Nechť dále $\alpha = |\sphericalangle QAP|$, $\beta = |\sphericalangle PBT|$, $\gamma = |\sphericalangle SCQ|$. Víme, že $BT \perp TS$ a $CS \perp TS$, tedy

$$\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ,$$

protože společně s těmito dvěma pravými úhly jsou to vnitřní úhly pětiúhelníku $TBACS$.



Vzhledem k tomu, že TS je tečna kružnic k_B a k_C, tak $|\sphericalangle PTS| = \frac{1}{2}\beta$ a $|\sphericalangle TSQ| = \frac{1}{2}\gamma$, protože jsou to úsekové úhly příslušné kružnicovým obloukům PT a QS. Z faktu

$$\begin{aligned}|\sphericalangle SQP| &= 180^\circ - |\sphericalangle CQS| - |\sphericalangle AQP| = \\ &= 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\alpha\right) - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\gamma\right) = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)\end{aligned}$$

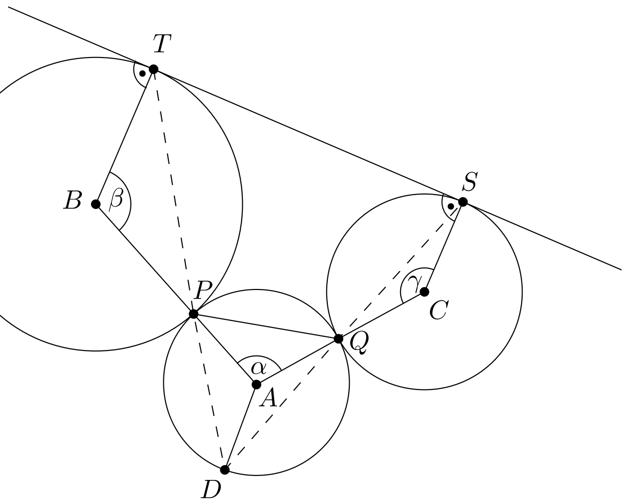
plyne, že $|\sphericalangle PTS| + |\sphericalangle SQP| = 180^\circ$, a tedy čtyřúhelník $PQST$ je tětivový. Označme D průsečík přímek TP a SQ. Z toho, že $PQST$ je tětivový, plyne, že trojúhelníky DST a DPQ jsou podobné a to dále implikuje, že

$$\frac{|PQ|}{|ST|} = \frac{|DP|}{|DS|} = \frac{|DQ|}{|DT|}. \tag{5}$$

Opětovným využitím toho, že $|\sphericalangle PTS| = \frac{1}{2}\beta$ a $|\sphericalangle TSQ| = \frac{1}{2}\gamma$, dostaneme

$$|\sphericalangle SDT| = |\sphericalangle QDP| = \frac{1}{2}\alpha,$$

což znamená, že D leží na kružnici k_A.



Dále také máme, že $|\sphericalangle DPA| = |\sphericalangle TPB|$ a trojúhelníky APD a BPT jsou podobné. Analogicky dostaneme, že trojúhelníky ADQ a CSQ jsou také podobné. Z těchto podobností plynou následující vztahy

$$\frac{|PT|}{|DP|} = \frac{r_B}{r_A} \qquad \text{a} \qquad \frac{|QS|}{|DQ|} = \frac{r_C}{r_A}$$

a z nich pak

$$\frac{|DT|}{|DP|} = \frac{r_A + r_B}{r_A} \qquad \text{a} \qquad \frac{|DS|}{|DQ|} = \frac{r_A + r_C}{r_A}.$$

Využijeme-li tyto vztahy a rovnici (5), dorazíme k

$$\frac{|ST|^2}{|PQ|^2} = \frac{|DS|}{|DP|} \cdot \frac{|DT|}{|DQ|} = \frac{(r_A + r_B) \cdot (r_A + r_C)}{r_A^2}.$$

Nakonec dosazením známých hodnot a vyřešením kvadratické rovnice

$$\frac{144}{36} \cdot r_A^2 = r_A^2 + 8r_A + 15 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3r_A^2 - 8r_A - 15 = 0$$

získáme dvě řešení

$$\frac{8 \pm \sqrt{64 + 12 \cdot 15}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{61}}{3}$$

a necháme si jen to kladné, tj. $\frac{4+\sqrt{61}}{3} \doteq 3{,}93675$.

Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy patří tradičně k nejlepším vědeckým a vzdělávacím institucím celé České republiky. Nabízí kvalitní vzdělání v širokém spektru matematických, fyzikálních, informatických a učitelských oborů. Studenti fakulty se v rámci výuky podílejí na mezinárodních výzkumných projektech nebo v rámci programu Erasmus studují v zahraničí. Zhruba 6% vědeckých výsledků (podle RIV) celé České republiky produkuje Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy. Taktéž v institucionálním hodnocení výkonnosti či v mediálních žebříčcích zaujímá první místa. Studium na fakultě otevírá možnost účasti na mezinárodních projektech, například na výzkumech ve švýcarském CERNu. Získané zkušenosti jsou zároveň výborným základem pro úspěšnou kariéru ve vlastním podnikání. Absolventy MFF UK najdeme také ve firmách jako je Facebook, Oracle nebo Google. Ročně absolvuje kolem 400 studentů, z nichž 96,5% se uplatní v oboru.

Matematický korespondenční seminář MFF UK

Matematický korespondenční seminář, též zvaný PraSe (PRAžský SEminář), je soutěž pro studenty středních škol, organizovaná Matematicko-fyzikální fakultou Univerzity Karlovy v Praze. Probíhá po celý školní rok. Zhruba jednou za měsíc zadáváme příklady z různých oblastí středoškolské matematiky. Odeslaná řešení opravíme, obodujeme a pošleme zpět spolu s novým zadáním. Více informací včetně aktuálního zadání se dozvíte na *mks.mff.cuni.cz*.

Co lze řešením získat? Samozřejmě matematický růst a spoustu zábavy, krom toho také třeba možnost jet na soustředění, kde se seznámíte jak s organizátory, tak s dalšími řešiteli, na přednáškách se dozvíte něco zajímavého o matematice, a při hrách si od matematiky naopak dobře odpočinete. Další z výhod je možnost odpuštění přijímacích zkoušek na MFF UK.