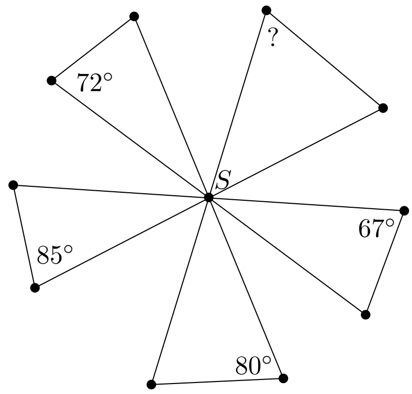
Aufgabe 1. Nach ihrem Alter gefragt, antwortet Großmutter Hilde in einem Rätsel: Ich habe fünf Kinder von verschiedenem Alter, jeweils vier Jahre auseinander. Mein erstes Kind bekam ich, als ich 21 Jahre alt war, und nun ist mein jüngstes Kind 21 Jahre alt. Wie alt ist die Großmutter?

Ergebnis: 58

Lösungsweg: Die Kinder sind 21, $21+4$, $21+2\cdot 4$, $21+3\cdot 4$ und $21+4\cdot 4$ Jahre alt. Da die Großmutter 21 Jahre älter ist als ihr ältestes Kind, kann ihr Alter leicht als $21+4\cdot 4+21=58$ berechnet werden.

Aufgabe 2. Ein aus fünf dreieckigen Flügeln bestehender Windmühlenpropeller wird durch fünf gleich lange durchgezogene Strecken gebildet, deren Mittelpunkte alle im Punkt S liegen und deren Endpunkte wie auf dem Bild verbunden sind. Wie groß ist der mit dem Fragezeichen beschriftete Winkel in Grad?



Ergebnis: 56

Lösungsweg: Die zehn Winkel mit Scheitel in S bestehen aus fünf Paaren von Scheitelwinkeln, von denen je einer davon ein Innenwinkel bei S eines in der Skizze gezeichneten Dreiecks ist. Deswegen summieren sich die Innenwinkel bei S der fünf gleichschenkligen Dreiecke zu $180°$. Daher ist die Summe der fünf markierten Basiswinkel $\frac{1}{2}\cdot(5\cdot 180° - 180°) = 360°$ und es folgt, dass die Größe des fehlenden Winkels $360° - 67° - 80° - 85° - 72° = 56°$ ist.

Aufgabe 3. Die Kinder einer Klasse hatten die Möglichkeit, an drei verschiedenen Leichtathletik-Wettbewerben teilzunehmen. Jedes Kind musste an mindestens einem Wettbewerb teilnehmen. In dieser Klasse haben 22 Kinder den Sprintlauf gewählt, 13 Kinder haben sich für den Weitsprung entschieden und 15 Kinder haben am Kugelstoßwettbewerb teilgenommen. Des Weiteren wissen wir, dass 8 Kinder den Sprint und den Weitsprung gewählt haben, 7 Kinder haben den Sprint und das Kugelstoßen gewählt und 6 Kinder haben sich für den Weitsprung und das Kugelstoßen entschieden. Es gibt 3 sehr ehrgeizige Kinder, die an allen drei Wettbewerben teilnehmen. Wie viele Kinder gibt es in dieser Klasse?

Ergebnis: 32

Lösungsweg: Die Anzahl der Teilnehmer der einzelnen Wettbewerbe werden addiert und die Anzahl der Kinder, die sich für zwei Wettbewerbe entschieden haben, von der Summe abgezogen. Die sehr motivierten Kinder, die an allen drei Wettbewerben teilnehmen, werden also einmal zu viel subtrahiert, das heißt, ihre Anzahl muss wieder addiert werden. Das Endergebnis ist also $22+13+15-8-7-6+3=32$.

Aufgabe 4. Eine Zahl heißt *super-gerade*, falls alle ihre Ziffern gerade sind. Wie viele fünfstellige super-gerade Zahlen gibt es, die bei Addition von 24680 wieder eine super-gerade Zahl ergeben?

Ergebnis: 90

Lösungsweg: Es gibt fünf gerade Ziffern. Um eine super-gerade Zahl zu erhalten, darf bei der Addition zweier Ziffern nie 10 erreicht bzw. überschritten werden. Berücksichtigt man, dass eine Zahl nicht mit 0 beginnen kann, ergeben sich die drei Möglichkeiten 2, 4 und 6 für die erste Stelle, weitere drei Möglichkeiten für die zweite Stelle, zwei Möglichkeiten für die dritte Stelle, eine Möglichkeit für die vierte Stelle und fünf Möglichkeiten für die letzte Stelle. Da die Möglichkeiten unabhängig voneinander gewählt werden können, gibt es $3\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 5=90$ fünfstellige super-gerade Zahlen der gesuchten Art.

Aufgabe 5. Es war einmal ein weiser König, der hatte um sein Schloss als Zentrum vier kreisförmige, konzentrische Schutzmauern mit den Radien 50, 100, 150 und 200 anlegen lassen. Das ganze Gebiet innerhalb der größten Mauer sowie innerhalb der anderen Mauern wurde als Wohnland genutzt. Nun kamen friedvolle Zeiten und der König beschloss, alle vier Schutzmauern einreißen zu lassen und mit dem Material der vier Mauern eine einzige, kreisförmige Mauer errichten zu lassen, und zwar von maximal möglichem Radius und wieder mit seinem Schloss im Mittelpunkt.

Bestimme diejenige Zahl größer oder gleich 1, die das Verhältnis des Flächeninhalts des neuen Wohnlandes zum Flächeninhalt des alten Wohnlandes darstellt.

Ergebnis: 25/4

Lösungsweg: Die Summe der Umfänge der vier kreisförmigen Mauern wird der Umfang der neuen, kreisförmigen Mauer werden. Bezeichnet man den Radius des neuen Kreises mit r, so gilt $2\pi \cdot 50 + 2\pi \cdot 100 + 2\pi \cdot 150 + 2\pi \cdot 200 = 2\pi \cdot r$. Folglich ist r die Summe der gegebenen Radien, also $r = 500$.

Das gesuchte Verhältnis ist demnach $\frac{\pi \cdot 500^2}{\pi \cdot 200^2} = 25/4$.

Aufgabe 6. Zoe versucht, ein Zahlenschloss zu knacken. Über den gesuchten vierstelligen Code wurde ihr Folgendes verraten:

- Alle darin vorkommenden Ziffern sind verschieden.
- 137 und 17 teilen die gesuchte Zahl.
- Die Summe der Ziffern ist eine Primzahl, und zwar so klein wie möglich.

Welche Zahl öffnet das Schloss?

Ergebnis: 9316

Lösungsweg: Weil die gesuchte Zahl durch 137 und 17 teilbar sein muss, ist sie ein Vielfaches von $137 \cdot 17 = 2329$. Allerdings erfüllt diese Zahl nicht die gestellten Bedingungen und man sieht, dass diese Zahl nur mit 2, 3 oder 4 multipliziert werden kann, um noch vierstellig zu bleiben. Nun berechnet man $2329 \cdot 2 = 4658$, $2329 \cdot 3 = 6987$ und $2329 \cdot 4 = 9316$ mit den zugehörigen Ziffernsummen 23, 30 bzw. 19. Da von den auftretenden Primzahlen 19 die kleinere ist, öffnet die Zahl 9316 das Schloss.

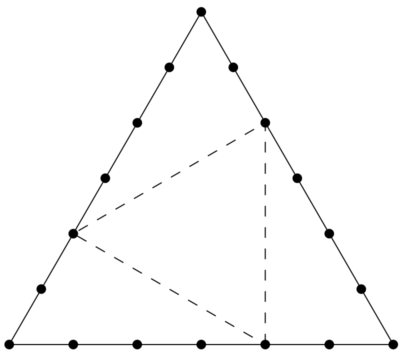
Aufgabe 7. Es liegen vier regelmäßige Vielecke auf dem Tisch. Eines davon ist ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 1. Die anderen drei sind kongruente regelmäßige Vielecke mit Seitenlänge 1. Jeweils zwei der vier Vielecke haben genau eine Seite gemeinsam. Keine zwei Vielecke überschneiden sich. Wie groß ist der Umfang der resultierenden Figur, ohne dabei die gemeinsamen Seiten mit einzuberechnen?

Ergebnis: 27

Lösungsweg: Angenommen die kongruenten regelmäßigen Vielecke haben jeweils n Seiten. Dann hat die resultierende Figur $3(n-3)$ Seiten, da drei Seiten von jedem Vieleck (auch vom Dreieck) an ein anderes Vieleck grenzen. Aufgrund der Symmetrie und weil die Größe des Außenwinkels eines gleichseitigen Dreiecks $300°$ beträgt, muss der Innenwinkel eines kongruenten Vielecks $150°$ sein. Da die Summe der Innenwinkel eines $n-$Ecks $(n-2) \cdot 180°$ ist, muss die Gleichung $150° \cdot n = 180° \cdot (n-2)$ gelöst werden. Setzt man die Lösung $n = 12$ in die obige Formel ein, ergibt sich der Umfang $3 \cdot 9 = 27$.

Aufgabe 8. In einem gleichseitigen Dreieck sind die drei Eckpunkte sowie weitere Punkte auf seinem Rand markiert, so dass jede der drei Seiten in 2021 kongruente Abschnitte geteilt ist. Bestimme die Anzahl aller gleichseitigen Dreiecke mit Eckpunkten in diesen markierten Punkten.

Hinweis: Die Abbildung zeigt ein solches Dreieck für den Fall, dass jede Seite des gegebenen gleichseitigen Dreiecks in 6 kongruente Teile unterteilt wurde.



Ergebnis: 8081

Lösungsweg: Jede Seite des Dreiecks wird durch 2020 innere Punkte geteilt. Als *kleines Dreieck* bezeichnen wir ein gleichseitiges Dreieck mit Eckpunkten in den gegebenen Punkten, das kleiner als das Ausgangsdreieck ist.

Zeichnet man eine Parallele durch einen der inneren Punkte zu einer Dreiecksseite, so entsteht ein kleines Dreieck, dessen Eckpunkte zwei innere Punkte und ein Eckpunkt des Ausgangsdreiecks sind. Es gibt $3 \cdot 2020$ solche Dreiecke, und dies sind zugleich alle kleinen Dreiecke mit einem Eckpunkt des Ausgangsdreiecks als Eckpunkt.

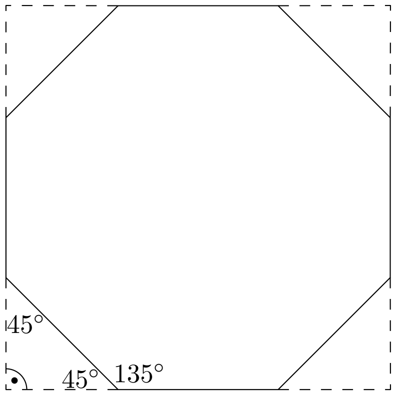
Sei PQR ein kleines Dreieck, dessen Eckpunkte nur innere Punkte der Seiten sind wie im Bild. Das Ausgangsdreieck zerfällt in weitere drei Eckdreiecke. Sind in einem die Innenwinkelgrößen α, β, $60°$ und etwa β der Winkel bei P, dann hat der Winkel bei P im benachbarten Eckdreieck die Größe $180° - 60° - \beta = \alpha$. Die Eckdreiecke sind also ähnlich, die Seitenverhältnisse der Streckenstücke auf den Seiten des Ausgangsdreiecks gleich. Die Wahl eines inneren Punkts auf einer der Seiten bestimmt also unter dieser Voraussetzung die Lage der anderen Eckpunkte eines kleinen Dreiecks eindeutig. Es gibt also genau 2020 weitere solche kleinen Dreiecke.

Zusammen mit dem Ausgangsdreieck ergeben sich $1 + 4 \cdot 2020 = 8081$ gleichseitige Dreiecke mit den geforderten Eigenschaften.

Aufgabe 9. Veronica schneidet von einem quadratischen Blatt Papier die Ecken so weg, dass sie ein regelmäßiges Achteck erhält. Der dabei entstehende Abfall hat einen gesamten Flächeninhalt von 300. Wie groß ist die Seitenlänge des regelmäßigen Achtecks?

Ergebnis: $\sqrt{300} \doteq 17.32051$

Lösungsweg: Die Innenwinkel eines regelmäßigen Achtecks betragen 135°. Deshalb sind die von Veronica abgeschnittenen Dreiecke rechtwinklig und gleichschenklig und lassen sich zu einem Quadrat der Seitenlänge $\sqrt{300}$ zusammensetzen. Dies ist zugleich die gesuchte Seitenlänge des regelmäßigen Achtecks.



Aufgabe 10. Bestimme die größte dreistellige Zahl n mit folgenden Eigenschaften:

1. Die Summe der Ziffern von n ist 16.
2. Das Produkt der Ziffern von n ist nicht 0, endet aber auf 0.
3. Die Summe der Ziffern des Produkts der Ziffern von n ist 3.

Ergebnis: 853

Lösungsweg: Aus der zweiten Bedingung erkennt man, dass mindestens eine Ziffer 5 sein muss und dass mindestens eine Ziffer gerade sein muss. Die Null darf aber nicht dabei sein. Wenn man dies berücksichtigt, so sieht man aufgrund der ersten Bedingung, dass nur noch die Ziffernkombinationen 5, 2, 9 oder 5, 4, 7 oder 5, 6, 5 oder 5, 8, 3 möglich sind. Von diesen erfüllt nur 5, 8, 3 die letzte Bedingung und die größtmögliche dreistellige Zahl mit diesen Ziffern ist 853.

Aufgabe 11. Von der Zahl 6437051928 sollen genau fünf Ziffern entfernt werden, so dass die sich ergebende fünfstellige Zahl die größtmögliche ist. Wie lautet die erhaltene Zahl?

Ergebnis: 75928

Lösungsweg: Die größte Zehntausenderstelle, die durch Entfernen von höchstens fünf Ziffern von der linken Seite her erreicht werden kann, ist 7. Da diese durch das Streichen von drei Ziffern von links erhalten wird, ist klar, dass die verbleibenden zwei zu entfernenden Ziffern 0 und 1 sind. Daher ist 75928 die gesuchte Antwort.

Aufgabe 12. Sei n eine positive ganze Zahl. Nun betrachte alle aufsteigenden Folgen F_n, die mit 1 starten und den konstanten Abstand n zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern haben. Beispielsweise ist F_2 die Folge $1, 3, 5, \ldots$. Für wie viele n enthält die Folge F_n die Zahl 2021 als Folgenglied?

Ergebnis: 12

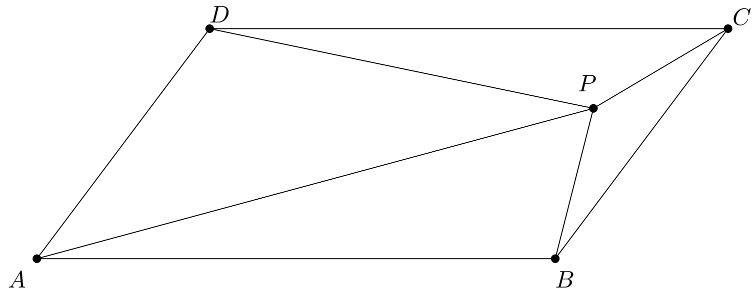
Lösungsweg: Die Zahl 2021 taucht genau dann in der Folge F_n auf, wenn es eine positive ganze Zahl a mit $2021 = 1 + a \cdot n$ gibt. Wegen $2020 = a \cdot n$ bedeutet das, dass n ein Teiler von 2020 sein muss. Die Primfaktorzerlegung von 2020 ist $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$. Deshalb gibt es $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ verschiedene positive Teiler von 2020. Folglich kommt 2021 in 12 dieser Folgen F_n vor.

Aufgabe 13. In einem 90 Meter langen geraden Korridor sind alle 10 Meter Startplätze für Roboter installiert, insgesamt 10 Plätze. Auf sieben davon werden zufällig Roboter verteilt, die auf ein gemeinsames Startsignal hin zufällig in eine der beiden Richtungen entlang des Korridors mit einer konstanten Geschwindigkeit von 10 Metern pro Minute losfahren. Die Roboter fahren dabei ohne Kollision aneinander vorbei, drehen an den Enden des Korridors ohne Zeitverzögerung um und fahren in die andere Richtung weiter. Wie viele Sekunden dauert es maximal, bis sich alle Roboter mindestens einmal begegnet sind?

Ergebnis: 510

Lösungsweg: Zur Lösung reicht es zu ermitteln, wie lange es maximal dauern kann, bis sich zwei Roboter begegnen. Starten zwei Roboter mit Abstand $d \geq 10$ Meter in entgegengesetzte Richtung, treffen sie sich, nachdem beide umgedreht und zusammen $2 \cdot 90 - d$ Meter zurückgelegt haben. Das ist nach spätestens $\frac{170}{2 \cdot 10} \cdot 60 = 510$ Sekunden der Fall. Starten zwei Roboter in dieselbe Richtung, treffen sie sich, nachdem der erste Roboter umgedreht hat und auf den zweiten trifft. Dabei kann der erste Roboter maximal 80 Meter bis zur Umkehr und dann maximal 5 Meter bis zum Treffpunkt fahren. Auch das dauert damit maximal $\frac{85}{10} \cdot 60 = 510$ Sekunden.

Aufgabe 14. Im Parallelogramm $ABCD$ liegt ein Punkt P so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks CDP drei Mal so groß ist wie der des Dreiecks BCP und ein Drittel so groß wie der des Dreiecks APD. Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks ABP, wenn das Dreieck CDP den Flächeninhalt 18 besitzt.



Ergebnis: 42

Lösungsweg: Die Dreiecke APD und BCP bedecken die Hälfte der Fläche des Parallelogramms, da sich die Höhenlängen aus P zum Abstand der Parallelen AD und BC ergänzen. Dasselbe gilt für die anderen beiden Dreiecke, womit sich der Flächeninhalt x des Dreiecks ABP zu $x = 54 + 6 - 18 = 42$ ergibt.

Aufgabe 15. Wenn man die Zahlen 1058, 1486 und 2021 durch eine bestimmte natürliche Zahl $d > 1$ teilt, erhält man jedes Mal den gleichen Rest. Bestimme d.

Ergebnis: 107

Lösungsweg: Die Abstände zwischen den drei Zahlen betragen $1486 - 1058 = 428$ und $2021 - 1486 = 535$. Weil die vorgegebenen Zahlen alle den gleichen Rest beim Teilen durch d lassen, müssen diese Abstände Vielfache von d sein. Da der größte gemeinsame Teiler von 428 und 535 die Primzahl 107 ist, ist dies die gesuchte Zahl d.

Aufgabe 16. In einem Fußballstadion hat die Ersatzbank vierzehn einzelne Sitzplätze. Das neue Trainerteam, das aus dem Trainer, dem Co-Trainer, dem Manager und dem Physiotherapeuten besteht, möchte alle Spieler besser kennenlernen. Deshalb wollen sie während des Fußballspiels auf der Ersatzbank zwischen den 10 Auswechselspielern sitzen, so dass jedes Mitglied des Trainerteams zwischen zwei Spielern sitzt.

Auf wie viele Arten können die Mitglieder des Trainerteams ihre vier Sitzplätze wählen, um dies zu erreichen?

Hinweis: Werden zwei verschiedene Anordnungen des Trainerteams auf denselben vier Sitzen gewählt, so zählen sie als zwei Möglichkeiten.

Ergebnis: 3024

Lösungsweg: Man stelle sich die zehn Spieler in einer Reihe stehend vor. Zwischen den 10 Spielern gibt es 9 Lücken, wobei in jede davon höchstens ein Mitglied des Trainerteams gestellt werden kann. Deshalb gibt es $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ Möglichkeiten, auf die gewünschte Art zu sitzen.

Aufgabe 17. Eine regelmäßige Pyramide hat eine quadratische Grundfläche mit dem Flächeninhalt 1 und der Inhalt der gesamten Oberfläche ist 3. Wie groß ist das Volumen der Pyramide?

Ergebnis: $\sqrt{3}/6 \doteq 0.288675$

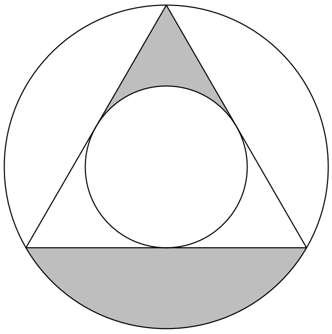
Lösungsweg: Die Kantenlänge der Grundfläche beträgt 1. Wenn der Oberflächeninhalt der Pyramide 3 ist, muss jede ihrer vier Dreiecksseiten den Flächeninhalt 1/2 und die Höhe 1 haben. Ein Schnitt durch die Pyramidenspitze und die Höhen zweier gegenüberliegender Seitenflächen erzeugt also ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge 1, dessen Höhe die Höhe der Pyramide ist. Die Höhe der Pyramide beträgt also $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Da das Volumen der Pyramide ein Drittel der Grundfläche mal der Höhe ist, ergibt sich das Volumen $\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{6}\sqrt{3}$.

Aufgabe 18. Die magische Kanaan-Maschine wandelt Flüssigkeiten um. Wenn sie reines Wasser erhält, wandelt sie 6 % davon in Wein um und lässt die restlichen 94 % unberührt. Wenn sie reinen Wein erhält, wandelt sie 10 % davon in Wasser um und lässt die restlichen 90 % unberührt. Wenn sie eine Mischung erhält, wirkt es auf die einzelnen Komponenten wie oben beschrieben. Maria kaufte Wasser und Wein, insgesamt 6000 Liter, und schüttete alles in ihre Kanaan-Maschine. Nachdem die Maschine stoppte, stellte Maria fest, dass die Mischung unverändert blieb. Wie viele Liter Wein hat Maria in die Maschine gegeben?

Ergebnis: 2250

Lösungsweg: Sei x die Menge an Wein und z die Menge an Wasser in Litern, bevor die Kanaan-Maschine eingesetzt wurde. Wir wissen, dass $0.06z$ Liter Wasser in Wein und $0.1x$ Liter Wein in Wasser umgewandelt werden und dass x vor und nach dem Betrieb der Maschine gleich ist. Daraus folgt, dass $0.06z = 0.1x$ sein muss. Da $x + z = 6000$ ist, können wir $0.06(6000 - x) = 0.1x$ schreiben. Das Auflösen nach x führt zu $6000 \cdot \frac{3}{8} = 2250$.

Aufgabe 19. In der Abbildung ist ein gleichseitiges Dreieck mit seinem Inkreis und seinem Umkreis zu sehen. Bestimme die Größe der grauen Fläche, wenn der Flächeninhalt des Umkreises 140 beträgt.



Ergebnis: 35

Lösungsweg: Da in einem gleichseitigen Dreieck der Radius des Umkreises doppelt so groß ist wie der des Inkreises, ist der Flächeninhalt des Umkreises vier Mal so groß wie der des Inkreises. Folglich ist hier der Flächeninhalt des Inkreises gleich $140 : 4 = 35$. Da die graue Fläche genau ein Drittel der Differenz zwischen den Flächeninhalten des Umkreises und des Inkreises beträgt, ist ihr Inhalt ebenfalls 35.

Aufgabe 20. Das Produkt von 2021 positiven ganzen Zahlen entspricht dem Doppelten ihrer Summe. Bestimme den größtmöglichen Wert einer dieser Zahlen.

Ergebnis: 4044

Lösungsweg: Die positiven ganzen Zahlen seien als $c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_{2020} \geq c_{2021} \geq 1$ bezeichnet. Nun ist der größtmögliche Wert von c_1 gesucht unter der Annahme, dass die Gleichung

$$c_1 \cdots c_{2021} = 2 \cdot (c_1 + \cdots + c_{2021}) \qquad (*)$$

gilt. Wenn man durch die linke Seite dividiert und die entstehenden Brüche nach oben abschätzt, indem man in den Nennern einige der Zahlen c_i gleich 1 setzt, erhält man

$$1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{c_2 \cdots c_{2021}} + \cdots + \frac{1}{c_1 \cdots c_{2020}} \right) \leq 2 \cdot \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{2019}{c_1 c_2} \right) = 2 \cdot \frac{2019 + c_1 + c_2}{c_1 c_2}.$$

Multiplikation mit $c_1 c_2$ und Umstrukturieren ergibt dann

$$(c_1 - 2)(c_2 - 2) = c_1 c_2 - 2c_1 - 2c_2 + 4 \leq 2 \cdot 2019 + 4 = 4042.$$

Für $c_2 \geq 3$ ergibt sich $c_1 \leq 4044$. Die Wahl $c_1 = 4044$, $c_2 = 3$ und $c_3 = \cdots = c_{2021} = 1$ erfüllt die gegebene Bedingung $(*)$ und zeigt, dass der Wert 4044 auch wirklich angenommen wird.

Nun wird der Fall $c_2 \leq 2$ betrachtet. Es seien $k \geq 0$ Zweier unter den Zahlen $c_2 \geq c_3 \cdots \geq c_{2021}$ und $2020 - k$ Einser. Dann wird die Gleichung $(*)$ zu

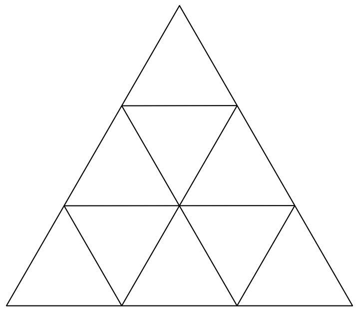
$$c_1 2^k = 2(c_1 + 2k + 2020 - k),$$

was noch zu $c_1(2^{k-1} - 1) = 2020 + k$ vereinfacht werden kann. Nun sieht man, dass es für $k \leq 1$ kein c_1 geben kann und dass für $k \geq 2$ die Abschätzung

$$c_1 = \frac{2020 + k}{2^{k-1} - 1} \leq 2022 < 4044$$

gilt. Folglich ist das Ergebnis 4044.

Aufgabe 21. Die neun dreieckigen Zellen in der Abbildung sollen mit verschiedenen positiven ganzen Zahlen befüllt werden, so dass je zwei Zahlen in benachbarten Zellen einen gemeinsamen Teiler größer 1 haben. Hierbei ist eine Zelle ein kleines Dreieck und zwei Zellen werden benachbart genannt, wenn die zwei Dreiecke eine gemeinsame Seite besitzen. Was ist die kleinstmögliche Summe von neun eingetragenen Zahlen?



Ergebnis: 59

Lösungsweg: Es gibt hier drei Zellen mit einem Nachbar, drei Zellen mit zwei Nachbarn und drei mit drei Nachbarn. Das bedeutet, dass für jede Primzahl p unter den neun Zahlen auch ein Vielfaches von p unter den neun Zahlen sein muss. Außerdem bemerkt man, dass aufgrund der geforderten Teilerbedingung die Zahl 1 nicht unter den eingetragenen Zahlen sein kann. Setze abkürzend S für die Summe aller Zahlen in einer gültigen Eintragung.

Wenn unter den neun regelkonform eingetragenen Zahlen eine Primzahl $p \geq 11$ ist, so muss darunter auch mindestens ein Vielfaches $k \cdot p$ mit $k \geq 2$ sein. Die restlichen sieben Zellen seien mit den kleinsten zur Verfügung stehenden Zahlen ausgefüllt, wobei diese für eine Abschätzung nicht unbedingt den Regeln entsprechen brauchen.

Dann ergibt sich $S \geq 2+3+4+5+6+7+8+p+k \cdot p = 35+(k+1) \cdot p \geq 35+33 = 68$.

Nun wird angenommen, dass keine Primzahl $p \geq 11$ unter den neun eingefüllten Zahlen ist. Betrachte diese vier Fälle:

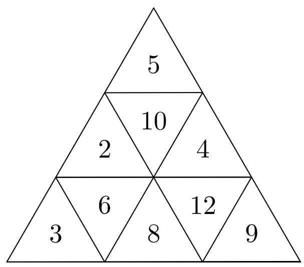
- Beide Zahlen 5 und 7 sind dabei. In den Nachbarzellen stehen Vielfache $k_5 \cdot 5$ bzw. $k_7 \cdot 7$ und man erhält als Abschätzung
  $S \geq 5+k_5 \cdot 5+7+k_7 \cdot 7+2+3+4+6+8 = (k_5+1) \cdot 5+(k_7+1) \cdot 7+23 \geq 15+21+23 = 59$.

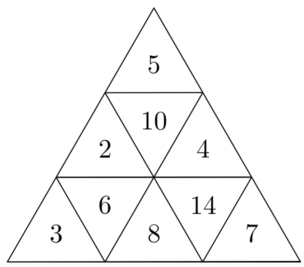
- Die Zahl 5 ist dabei, aber die 7 nicht. Analog ergibt sich die Abschätzung
  $$S \geq 5+k \cdot 5+2+3+4+6+8+9+ \begin{cases} 10 \geq 20+32+10 = 62 & \text{für} \quad k \geq 3, \\ 12 = 15+32+12 = 59 & \text{für} \quad k = 2. \end{cases}$$

- Weder 5 noch 7 werden verwendet. Dann ergibt sich die Abschätzung
  $S \geq 2+3+4+6+8+9+10+12+14 = 68$.

- Die Zahl 7 ist dabei, nicht aber die 5. Als Abschätzung ergibt sich
  $S \geq 2+3+4+6+7+8+9+10+k \cdot 7 \geq 49+14 = 63$.

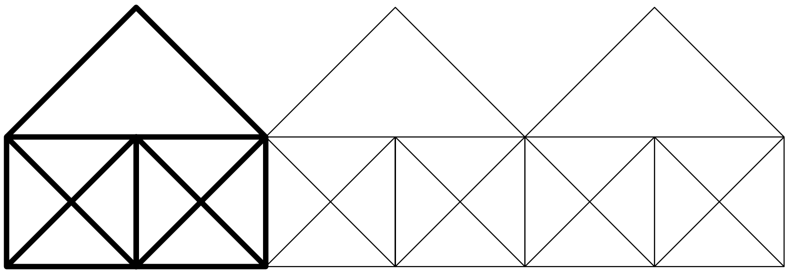
Insgesamt sieht man, dass 59 ein Kandidat für die minimale Summe ist. Tatsächlich können die Zahlen von beiden Möglichkeiten mit Summe 59 regelkonform eingetragen werden:





Folglich ist 59 die gesuchte Summe.

Aufgabe 22. Lotta zeichnet immer wieder dasselbe Haus: Es besteht aus zwei deckungsgleichen Quadraten, ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck bildet das Dach. Jedes neue Haus wird in einer Linie neben die schon existierenden Häuser gesetzt. Hier sieht man ihre ersten drei Häuser:



Welches ist die kleinstmögliche Anzahl an Häusern, die sie zeichnen muss, um in ihrer gesamten Zeichnung mindestens 2021 Dreiecke zählen zu können?

Ergebnis: 93

Lösungsweg: Definiere den Flächeninhalt eines Quadrates als 1. Das Dachdreieck hat dann ebenfalls den Flächeninhalt 1.

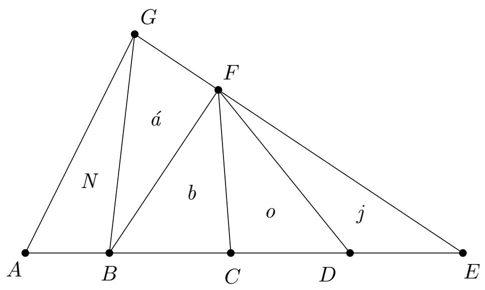
Im ersten gezeichneten Haus gibt es acht Dreiecke mit Flächeninhalt 1/4, acht Dreiecke mit Flächeninhalt 1/2 und drei Dreiecke mit Flächeninhalt 1. Das sind zusammen 19 Dreiecke.

Im zweiten gezeichneten Haus gibt es die gleiche Anzahl an Dreiecken wie im ersten Haus, allerdings kommen noch zwei Dreiecke mit Flächeninhalt 1 hinzu, die vom einen Haus in das andere hinüberreichen. Folglich steuert das zweite Haus 21 Dreiecke bei.

Ab dem dritten gezeichneten Haus kommt pro Haus die gleiche Anzahl an Dreiecken hinzu wie beim zweiten Haus, vermehrt um 1, da es nun noch ein Dreieck mit dem Flächeninhalt 4 gibt, das sich über drei Häuser erstreckt. Also kommen für jedes weitere Haus 22 Dreiecke hinzu.

Wegen $2021 - 19 - 21 = 1981$ und $1981 = 90 \cdot 22 + 1$ muss Lotta insgesamt $2 + 90 + 1 = 93$ Häuser zeichnen.

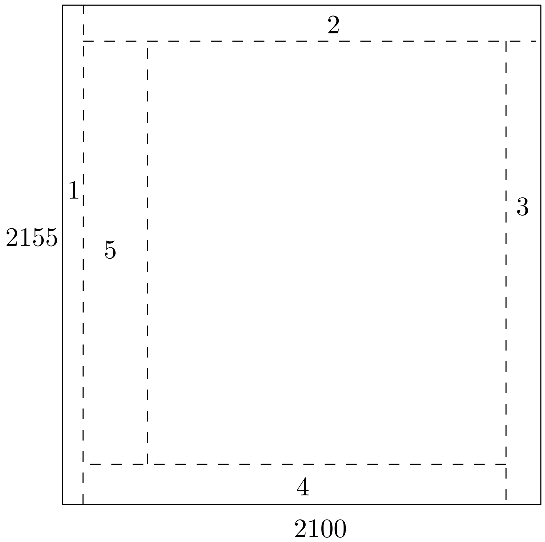
Aufgabe 23. Jedes der fünf Dreiecke N, á, b, o, j hat den gleichen Flächeninhalt. Bestimme die Länge von AB, wenn $|CD| = 5$ ist.



Ergebnis: $\frac{15}{4}$

Lösungsweg: Das Verhältnis der Flächeninhalte zwischen den Dreiecken BEG und BEF ist $4:3$. Da diese Dreiecke die gleiche Grundlinie BE haben, verhalten sich die zugehörigen Höhen ebenfalls wie $4:3$. Weil die Dreiecke ABG und CDF den gleichen Flächeninhalt haben, muss $|AB| = \frac{3}{4} \cdot |CD| = \frac{15}{4}$ sein.

Aufgabe 24. Anna hat ein großes rechteckiges Blatt Papier mit den Seitenlängen 2155 und 2100. Sie schneidet zuerst einen Streifen der Breite 1 an der längeren Seite ab. Dann fährt sie im Uhrzeigersinn fort und schneidet einen Streifen der Breite 2 an der kürzeren Seite ab, dann wieder einen Streifen der Breite 3 an der längeren Seite usw., siehe nachfolgende Abbildung. Sie setzt dies so lange fort, wie sie Streifen wachsender Breite abschneiden kann.



Am Ende bleibt ihr ein Rechteck übrig, von dem sie keinen Streifen wachsender Breite mehr abschneiden kann. Bestimme den Flächeninhalt dieses Rechtecks.

Ergebnis: 6375

Lösungsweg: Anna kann Streifen ungerader Breite abschneiden, solange die Ungleichung

$$1 + 3 + \cdots + 2n - 1 = n^2 < 2100$$

erfüllt ist. Wegen

$$45^2 = 2025 < 2100 < 2116 = 46^2$$

ist der Streifen mit der Breite 89 der letztmögliche von ungerader Breite. Außerdem kann sie Streifen gerader Breite abschneiden, solange

$$2 + 4 + \cdots + 2n = n(n + 1) < 2155$$

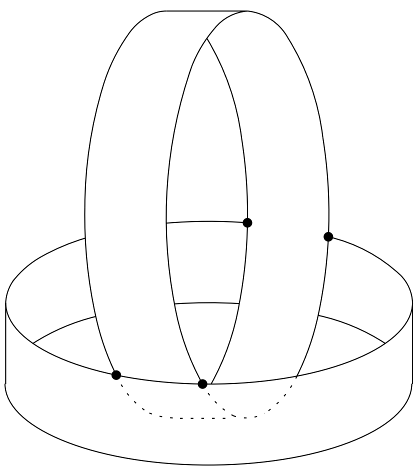
gilt. Wegen

$$45 \cdot 46 = 2070 < 2155 < 2162 = 46 \cdot 47$$

ist der Streifen der Breite 90 der letztmögliche von gerader Breite. Also hat das übrig gebliebene Rechteck den Flächeninhalt

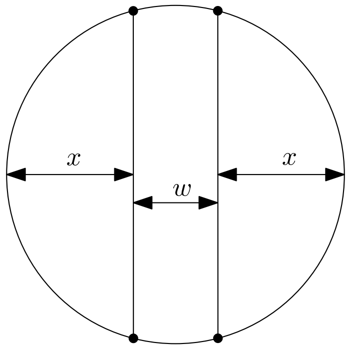
$$(2100 - 2025) \cdot (2155 - 2070) = 75 \cdot 85 = 6375.$$

Aufgabe 25. Einer von zwei identischen Ringen mit einem Radius von 4 und der unbekannten Breite w liegt horizontal auf einem Tisch, während der zweite vertikal ausgerichtet ist. Der zweite Ring berührt den ersten an genau vier Punkten (siehe Abbildung) und sein niedrigster Punkt liegt in der Höhe 1 über dem Tisch. Wie groß ist w?



Ergebnis: $\frac{10}{3}$

Lösungsweg: Wir schauen uns die ebenen Projektionen in der Draufsicht (links) sowie in der Vorderansicht (rechts) an.



$ABCD$ ist das Rechteck, das von den Berührpunkten der beiden Ringe gebildet wird. Seine Breite ist $|AD| = w$, die Länge bezeichnen wir mit $|AB| = u$. Im linken Bild ergibt sich $4^2 = \left(\frac{u}{2}\right)^2 + \left(\frac{w}{2}\right)^2$.

Der Mittelpunkt O des vertikalen Rings befindet sich in der Höhe $|OF| = 5$ über dem Tisch, woraus sich $4^2 = \left(\frac{u}{2}\right)^2 + (5-w)^2$, weiter $\frac{w}{2} = 5 - w$ und schließlich $w = \frac{10}{3}$ ergibt.

Aufgabe 26. Gegeben sei ein Polynom vom Grad 14 mit ganzzahligen Koeffizienten, positivem führenden Koeffizienten und 14 verschiedenen ganzzahligen Nullstellen. Ausgewertet in Null hat das Polynom den positiven Wert p. Bestimme den kleinstmöglichen Wert von p.

Ergebnis: 29030400

Lösungsweg: Das Polynom kann geschrieben werden als $c \cdot (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot \cdots \cdot (x - a_{14})$ mit paarweise verschiedenen ganzen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{14}$ und einer Zahl c, die dem führenden Koeffizienten entspricht und somit eine positive ganze Zahl ist. Ausgewertet in Null reduziert sich das Polynom auf das Produkt $c \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{14}$. Damit dieses Produkt möglichst klein wird, setze $c = 1$ und wähle die Nullstellen so nahe an Null wie möglich, also $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 2, a_4 = -2, \ldots$. Allerdings muss die Anzahl der negativen Nullstellen gerade sein, damit p positiv ist. Somit ist der kleinstmögliche Wert $p = 6! \cdot 8! = 29030400$.

Aufgabe 27. Mit ihrer üblichen Handschrift schreibt Johanna die Ziffern 4, 5 und 7 mit zwei Strichen und jede andere Ziffer mit einem Strich. Wie viele Striche braucht sie, um alle ganzen Zahlen von 1 bis 2021 einschließlich dieser beiden Zahlen zu schreiben?

Ergebnis: 8783

Lösungsweg: Wenn sie die ganzen Zahlen von 1 bis 2021 schreibt, schreibt sie 9 einstellige Zahlen, 90 zweistellige Zahlen, 900 dreistellige Zahlen und $2021 - 1000 + 1 = 1022$ vierstellige Zahlen. Insgesamt schreibt sie $9 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 + 1022 \cdot 4 = 6977$ Ziffern. Für jede Ziffer macht sie einen Strich, während sie für jede Ziffer 4, 5 oder 7 einen zusätzlichen Strich macht. Es reicht also aus zu zählen, wie viele dieser Ziffern geschrieben werden. Da die Zahl 2021 keine der Ziffern 4, 5 oder 7 enthält, brauchen nur die ganzen Zahlen bis 2020 betrachtet werden.

An der Einerstelle haben $1/10$ aller Zahlen bis 2020 die Ziffer 4 stehen, das sind 202 Zahlen. Die Ziffer 4 kommt an der Zehnerstelle in $1/10$ der Zahlen bis 2000 und in keiner Zahl zwischen 2001 und 2020 vor, also hier 200 Mal. In ähnlicher Weise kommt die Ziffer 4 an der Hunderterstelle 200 Mal vor. Die Ziffer 4 wird also insgesamt $202 + 200 + 200 = 602$ Mal geschrieben. Gleiches gilt für die Ziffern 5 und 7.

Das ergibt insgesamt 6977 Ziffern, davon sind $3 \cdot 602 = 1806$ die Ziffern 4, 5 oder 7. Daher macht sie $6977 + 1806 = 8783$ Striche.

Aufgabe 28. Die Felder der unten stehenden Zeile sollen so mit den Zahlen $1, 1, 2, 2, \ldots, 8, 8$ gefüllt werden, dass für jede benutzte Ziffer n genau n Felder zwischen den zwei Feldern mit den Einträgen n liegen. Drei dieser Zahlen sind schon eingetragen:

					6	7		2							

Gemäß dieser Regel sollen nun die restlichen Zahlen eingetragen werden. Finde die vierstellige Zahl in den grau hinterlegten Feldern.

Hinweis: Für $1, 1, 2, 2, 3, 3$ wäre eine korrekt ausgefüllte Zeile:

3	1	2	1	3	2

Ergebnis: 3845

Lösungsweg: Um eine einfache Notation zu haben, betrachten wir die gegebene Zeile als eindimensionales Feld f mit sechzehn Einträgen. Aufgrund der gegebenen Zahlen $f(6) = 6$, $f(7) = 7$, $f(9) = 2$ sind die Einträge $f(13) = 6$, $f(15) = 7$ und $f(12) = 2$ eindeutig festgelegt.

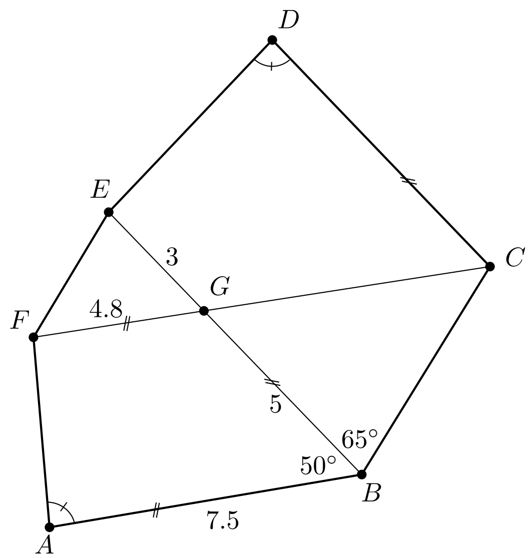
					6	7		2			2	6		7	

Im Prinzip gibt es zwei verschiedene Strategien: Entweder schaut man, wo ein bestimmtes Zahlenpaar noch platziert werden kann, oder man betrachtet wie bei Sudoku, welche Zahlen in einer bestimmten Zelle noch möglich sind.
Als Beispiellösung wird hier untersucht, wie die beiden Zahlen 3 eingetragen werden können. Dafür gibt es nur die drei Möglichkeiten $f(1) = f(5) = 3$ oder $f(4) = f(8) = 3$ oder $f(10) = f(14) = 3$.
Man sieht leicht, dass $f(10) = f(14) = 3$ für $f(16)$ nur die Möglichkeit $f(16) = 4$ übrig lässt und deshalb $f(11) = 4$ gelten muss. Dann kann aber das Paar $8, 8$ nicht mehr untergebracht werden. Der Fall $f(4) = f(8) = 3$ ergibt für das Paar $5, 5$ nur zwei Möglichkeiten, nämlich $f(5) = f(11) = 5$ oder $f(10) = f(16) = 5$. Beide Alternativen führen sofort zu Widersprüchen.
Nun ergibt $f(1) = f(5) = 3$ die eindeutige Lösung $f(2) = f(11) = 8$ und die einzige Möglichkeit, die restlichen Zellen gemäß der Regel zu füllen, ist $f(4) = f(10) = 5$, $f(3) = f(8) = 4$ und schließlich $f(14) = f(16) = 1$.

3	8	4	5	3	6	7	4	2	5	8	2	6	1	7	1

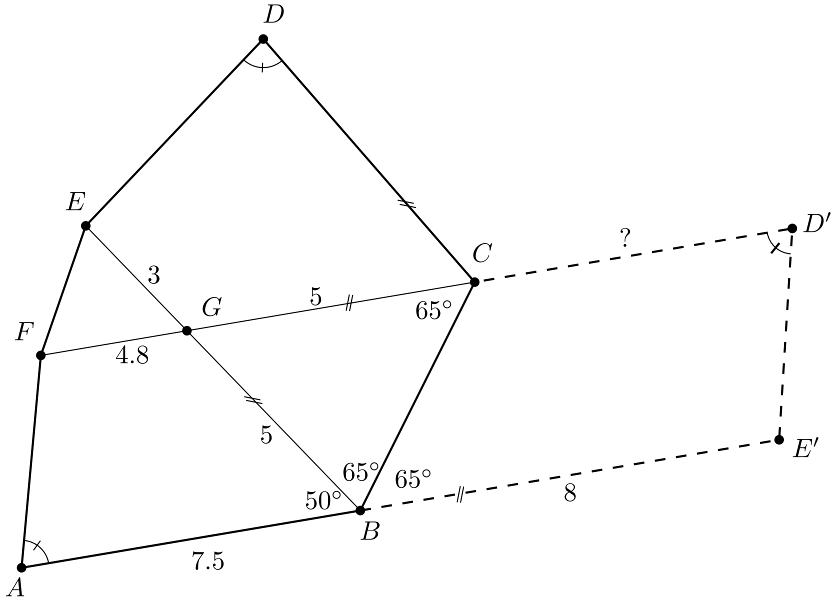
Also ist die gesuchte Lösung 3845.

Aufgabe 29. Gegeben ist ein konvexes Sechseck $ABCDEF$. Der Schnittpunkt der Diagonalen BE und CF ist G. Folgende Eigenschaften des Sechsecks sind bekannt und in der Skizze eingezeichnet: $|AB| = 7.5$, $|BG| = 5$, $|GE| = 3$, $|GF| = 4.8$, $\angle BAF = \angle EDC$, $\angle GBA = 50°$, $\angle CBG = 65°$, AB ist parallel zu CF und CD ist parallel zu BE. Bestimme die Länge der Seite CD.



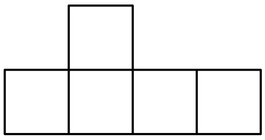
Ergebnis: $5.7 = \frac{57}{10}$

Lösungsweg:



Spiegelt man $BCDE$ an BC, so erhält man die Figur im Bild, wobei die Punkte A, B und E' aufgrund der Winkelsumme $50° + 65° + 65° = 180°$ bei B auf einer Geraden liegen. Da $FG \parallel AB$ und $CD \parallel BE$ gilt, also auch $CD' \parallel BE'$ ist, liegen auch F, G und D' auf einer Geraden. Zusammen mit $\angle BAF = \angle EDC = \angle CD'E'$ ergibt sich, dass $AE'D'F$ ein Parallelogramm ist. Also gilt $7.5 + 8 = 4.8 + 5 + |CD'|$. Es folgt $|CD'| = 5.7$ und schließlich $|CD| = |CD'| = 5.7$.

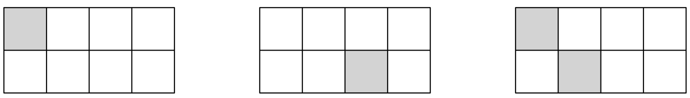
Aufgabe 30. Nadja und Selina spielen *Schiffe versenken*. Neben anderen Schiffen hat jeder ein Kanonenschiff mit Hubschrauberlandeplatz in der folgenden Form:



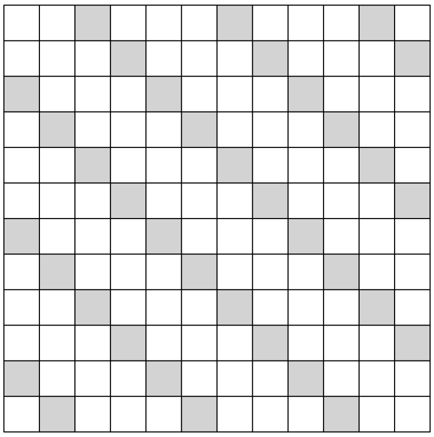
Nadja hat ihr Kanonenschiff irgendwo im Spielfeld, das ein $12 \times 12-$Gitter ist, versteckt. Weil sie dieses Spiel mit Bleistift auf einem Stück Papier spielen, kann die obige Figur des Kanonenschiffs rotiert und umgedreht werden. Wie oft muss Selina mindestens schießen, das heißt, ein Quadrat im Gitter auswählen, damit sie mit Sicherheit das Kanonenschiff von Nadja mindestens einmal getroffen hat?

Ergebnis: 36

Lösungsweg: Betrachte ein 4×2 - Rechteck. Wie man in den ersten beiden Abbildungen sehen kann, führt die Wahl von genau einem Quadrat nicht zu einem garantierten Treffer, weil es immer noch eine Möglichkeit gibt, ein Kanonenschiff zu platzieren, ohne dass es getroffen wurde. Außerdem ist es klar, dass sich darin kein Kanonenschiff mehr verstecken kann, wenn man je ein Quadrat aus jeder Zeile wählt. Die dritte Abbildung zeigt ein Beispiel dafür. Folglich sind zwei Schüsse auf ein 4×2 - Rechteck nötig, was insgesamt zu mindestens $18 \cdot 2 = 36$ Schüssen führt.



Andererseits zeigt die folgende Diagonalfärbung des 12×12 - Brettes, dass 36 Schüsse ausreichend sind, um sicher das Kanonenschiff mindestens ein Mal zu treffen.

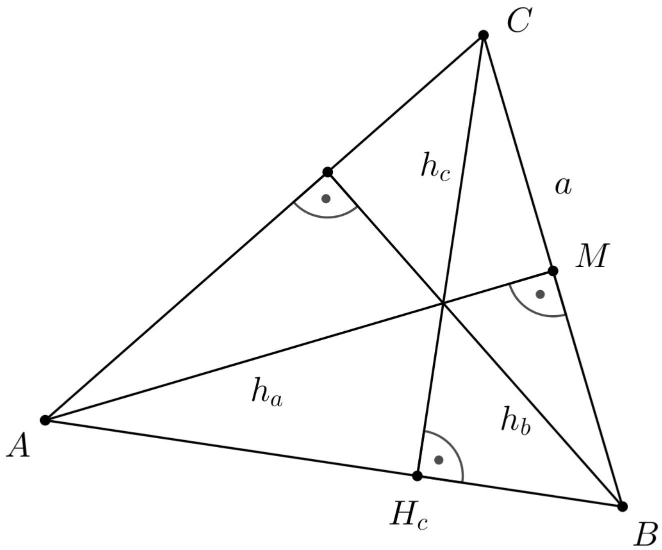


Aufgabe 31. Für eine positive ganze Zahl a wird ein spitzwinkliges Dreieck ABC konstruiert, in dem die Seite BC die Länge a hat und die Längen der Höhen h_b und h_c ebenfalls ganze Zahlen sind. Bestimme a, wenn der größtmögliche Flächeninhalt eines solchen Dreiecks 101.4 ist.

Ergebnis: 13

Lösungsweg: Da das Dreieck ABC spitzwinklig ist, gilt $h_b < a$ und $h_c < a$. Um den Flächeninhalt $S = \frac{1}{2}ah_a$ des Dreiecks zu maximieren, sollten die Höhen h_b und h_c möglichst lang sein. Verlängert man beispielsweise die Höhe h_b bei Einhalten der Bedingung $h_b < a$ und fester Höhe h_c, so wird auch h_a länger.

Diese Überlegung führt dazu, dass bei größtmöglichem Flächeninhalt $h_b = h_c = a - 1$ gilt. Folglich ist das Dreieck ABC gleichschenklig. Bezeichne mit M den Mittelpunkt von BC und mit H_c den Fußpunkt der Höhe h_c.



Aus der Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke ABM und H_cBC ergibt sich zunächst $h_a : |BM| = h_c : |H_cB|$. Nach dem Satz von Pythagoras gilt $|H_cB|^2 = |BC|^2 - h_c^2$, woraus $|H_cB| = \sqrt{2a-1}$ folgt. Somit ergibt sich $h_a = \frac{a(a-1)}{2\sqrt{2a-1}}$ und weiter

$$101.4 = S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{a^2(a-1)}{4\sqrt{2a-1}}.$$

Da 101.4 eine rationale Zahl und a eine ganze Zahl ist, muss $2a-1$ eine ungerade Quadratzahl sein. Schreibt man diese Quadratzahl als $(2k+1)^2$ mit einer ganzen Zahl $k \geq 0$, so folgt $a = \frac{1}{2} \cdot ((2k+1)^2 + 1) \in \{1, 5, 13, 25, 41, \dots\}$. Durch Einsetzen der ersten Werte für a in die Flächeninhaltsformel und mit der Beobachtung, dass der Flächeninhalt des Dreiecks bei größer werdendem a strikt größer wird, findet man schnell heraus, dass die korrekte Lösung $a = 13$ ist.

Aufgabe 32. Ludwig hat die Summe von 1 000 positiven ganzen Zahlen gebildet und dabei als Ergebnis 1 200 500 erhalten. Wenn man diese Zahlen aufsteigend anordnet, dann beträgt die Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Zahlen entweder 2 oder 7. Der kleinste Summand ist 101. Nun will Ludwig den größten Summanden der Summe so groß wie möglich machen und dabei alle anderen Bedingungen nach wie vor einhalten. Bestimme unter diesen Bedingungen den größtmöglichen Wert des größten Summanden.

Ergebnis: 3099

Lösungsweg: Die positiven Summanden werden mit $n_1 = 101, n_2, \dots, n_{1000}$ bezeichnet. Angenommen die Differenz zweier aufeinander folgenden Zahlen wäre immer 2. Dann wäre der größte Summand $n_{1000} = 101 + 2 \cdot 999 = 2\,099$ und die Summe würde $\sum_{i=1}^{1000} n_i = 2200 \cdot 500 = 1\,100\,000$ betragen. Deshalb ist die Differenz zwischen Ludwigs Summe und der minimal möglichen Summe bei einer solchen Anordnung $100\,500 = 20\,100 \cdot 5$. Gilt nun $n_{i+1} - n_i = 7$ anstatt $n_{i+1} - n_i = 2$, so würden sich die Summe um $(1\,000 - i) \cdot 5$ und n_{1000} um 5 erhöhen. Hieraus erkennt man, dass man die Abstände mit Wert 7 möglichst den höchsten Indizes zuordnen muss, um den größten Summanden n_{1000} unter Berücksichtigung der konstanten Summe 1 200 500 zu maximieren. Glücklicherweise ist 20 100 die Dreieckszahl $\frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 201$. Wenn Ludwig also die Abstände $n_{i+1} - n_i$ für $i = 800, \dots, 999$ in der oben angegebenen minimalen Summe von 2 auf 7 ändert, dann bekommt er den größtmöglichen Wert für n_{1000}, nämlich $n_{1000} = 101 + 2 \cdot 999 + 200 \cdot 5 = 3\,099$.

Aufgabe 33. Wie lautet die kleinste positive ganze Zahl, die nur mit den Ziffern 2 und 9 geschrieben werden kann, eine ungerade Anzahl von Ziffern hat und durch 11 teilbar ist?

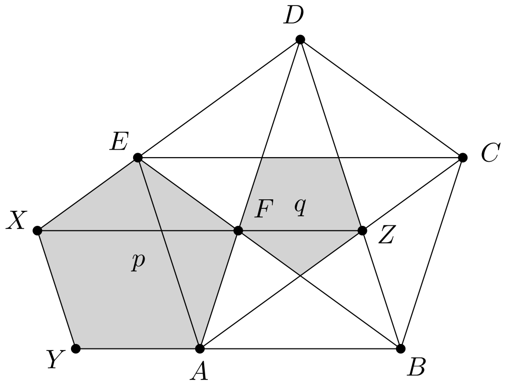
Ergebnis: 29 292 929 292

Lösungsweg: Ein Kriterium für die Teilbarkeit durch 11 ist die alternierende Summe der Ziffern: Eine Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn die Summe der Ziffern in geraden Positionen minus der Summe der Ziffern in ungeraden Positionen durch 11 teilbar ist. Daraus folgt, dass eine Lösung kein Paar aufeinander folgender Zweier oder Neuner enthalten kann, da man diese sonst streichen und damit eine kleinere Lösung erhalten kann. Da sich die Ziffern 2 und 9 abwechseln müssen, wird nach dem kleinsten n gesucht, so dass $2n - 9(n + 1)$ oder $9n - 2(n + 1)$ ein Vielfaches von 11 ist. In jedem Fall ist die Lösung $n = 5$, was die Kandidaten 29 292 929 292 und 92 929 292 929 ergibt. Die Lösung ist die kleinere dieser beiden Zahlen.

Aufgabe 34. Sei $ABCDE$ ein regelmäßiges Fünfeck und F der Schnittpunkt der Diagonalen AD und BE. Das gleichschenklige Dreieck AFE kann zu einem regelmäßigen Fünfeck $AFEXY$ vervollständigt werden, das mit p bezeichnet wird. Es gibt ein weiteres regelmäßiges Fünfeck q, dessen Eckpunkte die Schnittpunkte aller fünf Diagonalen von $ABCDE$ sind. Wenn $|AF| = 1$ ist, was ist der größte Abstand zwischen einem Eckpunkt von p und einem Eckpunkt von q?

Ergebnis: $(3 + \sqrt{5})/2 \doteq 2.61803$

Lösungsweg: Man sieht, dass die beiden Fünfecke p und q durch eine zentrische Streckung mit Zentrum F ineinander überführt werden. Deshalb verläuft die Strecke von X nach Z, welche eine der beiden Möglichkeiten für den Abstand der am weitesten entfernten Eckpunkte von p und q ist, durch F.



Mit dem Winkel $\angle XEF = 108°$ und dem Wert $\cos 108° = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ sowie den beiden Seiten EF und XE der Länge 1 erhält man aus dem Cosinussatz $|XF|^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot \cos 108° = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ und damit die Länge $|XF| = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

Einfache Berechnung im gleichschenkligen Dreieck mit drittem Winkel gleich 108° liefert $\angle ZAF = 36° = \angle FZA$. Deshalb ist das Dreieck AZF gleichschenklig und es folgt $|FZ| = |AF| = 1$.

Insgesamt ergibt sich also $|XF| + |FZ| = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ für den gesuchten Abstand.

Aufgabe 35. Man bestimme alle Tripel (a, b, c), die nur aus Primzahlen bestehen und die Gleichung

$$175a + 11ab + bc = abc$$

erfüllen. Gib als Lösung dieser Aufgabe die Summe aller möglichen Werte für c in diesen Tripel an.

Ergebnis: 281

Lösungsweg: Man kann die Gleichung äquivalent zu $a(bc - 11b - 175) = bc$ umformen. Aus dieser Gleichung kann man erkennen, dass $a = b$ oder $a = c$ gelten muss, da alle Variablen Primzahlen sein sollen. Im ersten Fall erhält man $ac - 11a - 175 = c$, also $(a - 1)(c - 11) = 186$ und somit nur die einzige Lösung $(2, 2, 197)$ mit Primzahlen. Im zweiten Fall ergibt sich $ab - 11b - 175 = b$, also $175 = b(a - 12)$ mit den beiden Lösungen $(47, 5, 47)$ und $(37, 7, 37)$. Deshalb ist der gesuchte Wert $197 + 47 + 37 = 281$.

Aufgabe 36. Hella und Jeremias wollen ein Haus kaufen. Sie suchen nach einem perfekten Haus, aber ihre Definitionen von „perfekt" unterscheiden sich. Sie finden 10 Angebote und beschließen, den folgenden Entscheidungsprozess zu versuchen: Beide ordnen die Häuser zufällig, wobei ein Unentschieden nicht erlaubt ist, und wenn die Top-3 Häuser von Hella und die von Jeremias genau ein Haus gemeinsam haben, kaufen sie dieses Haus. Wie groß ist die Chance, dass dieser Vorgang erfolgreich ist?

Ergebnis: $\frac{21}{40}$

Lösungsweg: Für jede Rangliste von Hella muss Jeremias genau ein Haus von Hellas Top-3 in seiner Top-3-Liste haben und die restlichen zwei von Hellas Top-3-Liste müssen auf seiner Rangliste unter den Plätzen 4 bis 10 sein. Für jede Rangfolge von Hella hat Jeremias also eine Chance von

$$\frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{7}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{21}{40}.$$

Aufgabe 37. Wir definieren die beiden Polynome

$$p(x) = ax^{2021} + bx^{2020} + \cdots + ax^{2k-1} + bx^{2k-2} + \cdots + bx^2 + ax + b$$

und

$$q(x) = ax^2 + bx + a,$$

wobei a und b positive reelle Zahlen sind. Es ist bekannt, dass $q(x)$ genau eine reelle Nullstelle hat. Bestimme die Summe aller reellen Nullstellen von $p(x)$.

Ergebnis: -2

Lösungsweg: Da das Polynom $p(x)$ faktorisiert werden kann als $(ax + b)(x^{2020} + x^{2018} + \cdots + x^2 + 1)$, wobei der zweite Faktor als Summe von Quadraten stets positiv ist, ist $x = \frac{-b}{a}$ die einzige reelle Nullstelle von $p(x)$.

Nach Voraussetzung hat das quadratische Polynom $q(x)$ nur eine reelle Nullstelle. Diese muss dann eine doppelte Nullstelle sein, also bekommt man $b^2 - 4a^2 = 0$ für die Diskriminante. Weil a und b positiv sind, folgt weiter $b = 2a$.

Die gesuchte Summe besteht also nur aus dem einen Summanden $x = \frac{-b}{a} = \frac{-2a}{a} = -2$.

Aufgabe 38. Finde die Summe aller Primzahlen p, für die es eine positive ganze Zahl n gibt, so dass die Dezimalbruchentwicklung von $\frac{n}{p}$ als kürzeste Periodenlänge die Länge 5 hat.

Ergebnis: 312

Lösungsweg: Primzahlen $p \in \{2, 3, 5\}$ scheiden aus, da in diesem Fall der Dezimalbruch endlich oder periodisch mit Periodenlänge 1 ist. Weiter muss $\operatorname{ggT}(n, p) = 1$ sein.

Angenommen, n und p haben die Eigenschaft, dass die Dezimalbruchentwicklung von $\frac{n}{p}$ irgendwo weit hinter dem Dezimalpunkt anfängt, eine Periode der Länge 5 zu haben. Dann kann man n mit einer geeigneten Potenz von 10 multiplizieren, so dass die Periode direkt an der Zehntelstelle beginnt. Dann ist

$$10^t \cdot \frac{n}{p} = a + q \cdot (10^{-5} + 10^{-10} + \cdots) = a + q \cdot \frac{1}{10^5 - 1},$$

wobei die positive ganze Zahl a der Vorkommaanteil ist und q die Periode als fünfstellige ganze Zahl mit möglicherweise führenden Nullen. Dann muss aber $p \mid (10^5 - 1) \cdot 10^t \cdot n$ und weiter $p \mid (10^5 - 1)$ gelten. Wegen $10^5 - 1 = 99999 = 3^2 \cdot 41 \cdot 271$ kommen also nur $p = 41$ und $p = 271$ in Frage.

Da $1/41 = 0.\overline{02439}$ und $1/271 = 0.\overline{00369}$ beide die gewünschte Form haben, ist die Lösung $41 + 271 = 312$.

Aufgabe 39. Vier internationale Náboj-Fans treffen sich. Jeder von ihnen spricht genau drei der fünf Sprachen Tschechisch, Deutsch, Englisch, Polnisch und Ungarisch. Sie sprechen keine weitere Sprache. Insgesamt gibt es also 10000 Möglichkeiten, die Sprachen den Personen zuzuordnen. In wie vielen dieser Möglichkeiten kann jemand einen Náboj-Workshop in einer Sprache halten, die alle verstehen?

Ergebnis: 5680

Lösungsweg: Es gibt $10 = \binom{5}{3}$ Möglichkeiten, bei denen alle vier Náboj-Fans dieselben drei Sprachen sprechen. Wenn sie mindestens zwei Sprachen gemeinsam haben, gibt es $10 = \binom{5}{2}$ Möglichkeiten, die zwei Sprachen zu wählen, und dann 3^4 Möglichkeiten, die dritte Sprache der vier Personen zu wählen. Wenn sie mindestens eine Sprache gemeinsam haben, gibt es $5 = \binom{5}{1}$ Möglichkeiten, die gemeinsame Sprache zu wählen, und dann $\binom{4}{2}^4 = 6^4$ Möglichkeiten, die beiden anderen Sprachen der vier Personen zu wählen. Unter Anwendung des Einschluss-Ausschluss-Verfahrens (Prinzip von Inklusion und Exklusion) ist die Gesamtzahl $5 \cdot 6^4 - 10 \cdot 3^4 + 10 = 6480 - 810 + 10 = 5680$.

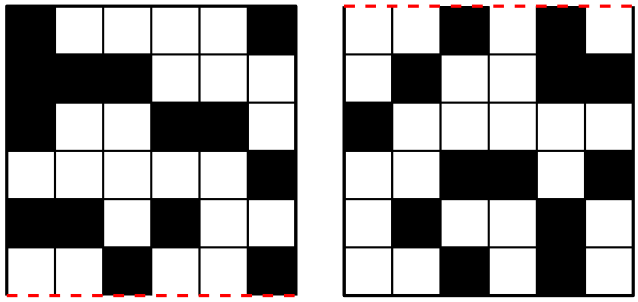
Aufgabe 40. Edith schreibt alle Brüche auf, deren Zähler und Nenner positive ganze Zahlen kleiner oder gleich 100 sind. Sie löscht alle, die nicht vollständig gekürzt sind, und listet dann den Rest vom kleinsten bis zum größten Bruch auf. Welcher Bruch steht in Ediths Liste unmittelbar vor $\frac{2}{3}$?

Ergebnis: $\frac{65}{98}$

Lösungsweg: Wir müssen Brüche mit möglichst großen Nennern versuchen, denn wenn $\frac{a}{b}$ kleiner als $\frac{2}{3}$ ist, dann ist $\frac{a+2}{b+3}$ größer als $\frac{a}{b}$ und immer noch kleiner als $\frac{2}{3}$. Das bedeutet insbesondere, dass wir nur für die Nenner 98, 99 und 100 das jeweils größte $\frac{a}{b} < \frac{2}{3}$ bestimmen und diese untereinander vergleichen müssen. Die möglichen Lösungen sind also $\frac{65}{98}$, $\frac{65}{99}$ und $\frac{66}{100} = \frac{33}{50}$. Vergleicht man diese Brüche, so erhält man

$$\frac{65}{99} < \frac{33}{50} < \frac{65}{98} < \frac{2}{3}.$$

Aufgabe 41. In ein $6 \times 6 \times 6$ Gitter werden 23 schwarze Einheitswürfel gelegt. Die Abbildung zeigt, wie das resultierende Objekt von oben (linkes Quadrat) und von vorne (rechtes Quadrat) aussieht. Ein weißes Quadrat bedeutet, dass sich in der jeweiligen Spalte kein schwarzer Würfel befindet. Die gemeinsame Kante der beiden entsprechenden Flächen des Gitters ist rot markiert. Bestimme den Oberflächeninhalt des schwarzen Objekts.



Ergebnis: 130

Lösungsweg: Die Oberfläche entspricht der Summe der Oberflächen der schwarzen Einheitswürfel minus der doppelten Anzahl von Seitenflächen, die ein Paar von zwei schwarzen Würfeln gemeinsam haben. Ein solches Paar schwarzer Würfel, die sich eine Fläche teilen, kann in drei Richtungen ausgerichtet werden: Wir nennen sie *oben-unten*, *vorne-hinten* und *links-rechts*. Wenn der Fall links-rechts auftritt, muss er auch als Paar von zwei schwarzen Quadraten erscheinen, die sich eine vertikale Seite teilen, welche dieselben beiden Spalten in beiden Projektionen trennt. Wenn wir Spalte für Spalte prüfen, können wir erkennen, dass dies niemals der Fall ist. Die vorne-hinten-Fälle müssen sich auf das linke Quadrat auswirken – das kommt zweimal in der ersten Spalte vor. Da die erste Spalte des rechten Quadrats eine einzelne schwarze Zelle enthält, sind die Positionen der schwarzen Würfel in der am weitesten links liegenden Schicht des großen Würfels eindeutig bestimmt, und es gibt tatsächlich zwei horizontale Flächen, die von jeweils zwei schwarzen Würfeln geteilt werden. Der letzte Fall oben-unten kann ähnlich behandelt werden. Es zeigt sich, dass dieser Fall aufgrund der fünften Spalten der Projektionen zwei gemeinsame Flächen beisteuert. Daraus ergibt sich als Ergebnis ein Oberflächeninhalt von $6 \cdot 23 - 2 \cdot 4 = 130$.

Aufgabe 42. Eine *teilende Zerlegung* einer positiven ganzen Zahl N ist eine Folge von positiven ganzen Zahlen $d_1, d_2, \ldots, d_k$ mit $k \geq 1$, $d_1 \neq 1$, so dass die Teilbarkeitsbedingungen $d_1 \mid d_2 \mid d_3 \mid \cdots \mid d_k \mid N$ erfüllt sind und $d_1 \cdot d_2 \cdot \cdots \cdot d_k = N$ gilt. Die Zahl d_k sei eine *Teilerspitze* der teilenden Zerlegung genannt. Was ist das arithmetische Mittel der Teilerspitzen von allen teilenden Zerlegungen von 720?

Ergebnis: 204

Lösungsweg: Wegen $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ gilt also $d_i = 2^{a_i} 3^{b_i} 5^{c_i}$. Dabei müssen die Folgen (a_i), (b_i), (c_i) der Exponenten monton wachsen und es muss $\sum a_i = 4$, $\sum b_i = 2$ sowie $c_k = 1$ und $c_i = 0$ für $i < k$ gelten. Es gibt 10 solche Verteilungen

$(a_i \mid b_i \mid c_i)$, die auf die folgenden Lösungen führen:

$$\begin{aligned}
&(1,1,1,1 \mid 0,0,1,1 \mid 0,0,0,1) \;\longrightarrow\; 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 30\\
&(1,1,2 \mid 0,1,1 \mid 0,0,1) \;\longrightarrow\; 2 \cdot 6 \cdot 60\\
&(2,2 \mid 1,1 \mid 0,1) \;\longrightarrow\; 12 \cdot 60\\
&(1,3 \mid 1,1 \mid 0,1) \;\longrightarrow\; 6 \cdot 120\\
&(0,4 \mid 1,1 \mid 0,1) \;\longrightarrow\; 3 \cdot 240\\
&(1,1,1,1 \mid 0,0,0,2 \mid 0,0,0,1) \;\longrightarrow\; 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 90\\
&(1,1,2 \mid 0,0,2 \mid 0,0,1) \;\longrightarrow\; 2 \cdot 2 \cdot 180\\
&(2,2 \mid 0,2 \mid 0,1) \;\longrightarrow\; 4 \cdot 180\\
&(1,3 \mid 0,2 \mid 0,1) \;\longrightarrow\; 2 \cdot 360\\
&(4 \mid 2 \mid 1) \;\longrightarrow\; 720
\end{aligned}$$

Die Summe der 10 Teilerspitzen beträgt also

$$30 + 2 \cdot 60 + 90 + 120 + 2 \cdot 180 + 240 + 360 + 720 = 2040$$

und ihr arithmetisches Mittel ist $\frac{2040}{10} = 204$.

Aufgabe 43. Das Spiel *Scrabboj* besteht aus einem 5×1 Spielbrett und einem Beutel voller unterscheidbarer Spielsteine, die mit jeweils exakt einem der Buchstaben N, A, B, O und J beschriftet sind. Wie viele verschiedene Spielsteine-Sets gibt es, so dass es 1440 Möglichkeiten gibt, aus den Steinen das Wort *NABOJ* zu bilden?

Ergebnis: 9450

Lösungsweg: Bezeichne mit n, a, b, o und j die Anzahl der Spielsteine mit Buchstaben N, A, B, O und J. Wir suchen die Anzahl 5-Tupel (n, a, b, o, j), für die

$$n \cdot a \cdot b \cdot o \cdot j = 1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$$

gilt. Jeder Primfaktor kann unabhängig n, a, b, o oder j zugeordnet werden, wobei jede unterschiedliche Zuordnung aller Primfaktoren ein weiteres 5-Tupel ergibt.

Für die Primzahl 2 müssen beispielsweise die fünf Kopien der 2 auf die fünf Faktoren verteilt werden, wobei sie mehrfach einem Faktor zugeordnet werden können. Gemäß der Formel für eine Kombination mit Wiederholung gibt es dafür $\binom{9}{4}$ Möglichkeiten. Analog gibt es $\binom{6}{4}$ Möglichkeiten für den Primfaktor 3 und $\binom{5}{4}$ Möglichkeiten für den Primfaktor 5. Deshalb gibt es insgesamt

$$\binom{9}{4} \cdot \binom{6}{4} \cdot \binom{5}{4} = 126 \cdot 15 \cdot 5 = 9450$$

verschiedene Spielsteine-Sets von *Scrabboj*.

Aufgabe 44. Bestimme die größte natürliche Zahl n, für die $4^{2021} + 4^n + 4^{3500}$ eine Quadratzahl ist.

Ergebnis: 4978

Lösungsweg: Wegen $4 = 2^2$ sind alle drei Summanden Quadratzahlen. Deshalb kann man zwei Wurzelwerte von ihnen auswählen und ihre Summe quadrieren und erhält beispielsweise

$$(2^{2021} + 2^n)^2 = 4^{2021} + 2 \cdot 2^{2021} \cdot 2^n + 4^n = 4^{2021} + 2^{2022+n} + 4^n.$$

Für $2022 + n = 2 \cdot 3500 = 7000$, also $n = 4978$, ist die angegebene Zahl also eine Quadratzahl. Die anderen beiden Möglichkeiten, zwei der drei Summanden für die Summe auszuwählen, führen durch analoge Rechnungen mit $\left(2^{2021} + 2^{3500}\right)^2$ bzw. $\left(2^n + 2^{3500}\right)^2$ auf die Werte $n = 2761$ und $n = 541$, für welche die angegebene Zahl eine Quadratzahl ist.

Also kann man die Vermutung aufstellen, dass $n = 4978$ die gesuchte Lösung ist. Um das zu beweisen, zeigt man, dass $4^{2021} + 4^n + 4^{3500}$ für $n = 4978 + m$ mit einer positiven ganzen Zahl m keine Quadratzahl sein kann. Der Ausdruck

$$4^{2021} + 4^{3500} + 4^{4978+m} = 4^{2021} \cdot (1 + 4^{1479} + 4^{2957+m})$$

ist genau dann eine Quadratzahl, wenn $1 + 4^{1479} + 4^{2957+m}$ eine Quadratzahl ist, da $4^{2021} = \left(2^{2021}\right)^2$ gilt. Nun folgt aber aus

$$\left(2^{2957+m}\right)^2 = 4^{2957+m} < 1 + 4^{1479} + 4^{2957+m} = 1 + 2^{2958} + 4^{2957+m} < 1 + 2 \cdot 2^{2957+m} + 4^{2957+m} = \left(2^{2957+m} + 1\right)^2,$$

dass der zweite Faktor immer zwischen zwei aufeinander folgenden Quadratzahlen liegt. Folglich ist $n = 4978$ die gesuchte Zahl.

Aufgabe 45. Wie viele Koeffizienten des Polynoms

$$P(x) = \prod_{n=2}^{2021} (x^n + (-1)^n n) = (x^2 + 2)(x^3 - 3)(x^4 + 4) \cdots (x^{2021} - 2021)$$

sind positiv, also echt größer als null?

Ergebnis: 1021616

Lösungsweg: Betrachte das Polynom

$$Q(x) = P(-x) = (x^2 + 2)(-x^3 - 3)(x^4 + 4) \cdots (-x^{2021} - 2021) = (-1)^{1010}(x^2 + 2)(x^3 + 3)(x^4 + 4) \cdots (x^{2021} + 2021)$$

und beachte, dass alle von null verschiedenen Koeffizienten positiv sind. Solche Koeffizienten entstehen, wenn wir beim Ausmultiplizieren von $Q(x)$ aus einigen Faktoren den Summanden x^n nehmen und aus den anderen das Absolutglied. Die gesuchte Anzahl ist also gleich der Anzahl verschiedener Summen s, die aus Teilmengen von $M = \{2, 3, \ldots, 2021\}$ berechnet werden können, wobei $s = 0$ für die leere Menge zu berücksichtigen ist und $s \leq S = 2 + \cdots + 2021 = 2043230$ gilt. Da in M die Eins fehlt, können $s = 1$ und $s = S - 1$ nicht dargestellt werden.

Wir zeigen indirekt, dass jede andere Summe $2 \leq s \leq S - 2$ realisiert werden kann. Wäre m die kleinste nicht als Summe realisierbare Zahl im angegebenen Intervall, dann wäre $m - 1$ als Summe einer Teilmenge $M_1 \subset M$ darstellbar. Ist k die kleinste Zahl in M_1, so müssen alle Zahlen aus M größer als k ebenfalls zu M_1 gehören, denn sonst könnte man eine der Zahlen aus M_1 durch deren Nachfolger ersetzen, der nicht in M_1 enthalten ist, und hätte eine Summendarstellung von m. Es gilt also

$$m - 1 = k + (k + 1) + \cdots + 2021.$$

Wäre $k > 3$, so wäre

$$2 + (k - 1) + (k + 1) + \cdots + 2021$$

eine Darstellung von m als Summe einer Teilmenge von M, ein Widerspruch. Für $k = 3$ erhalten wir $m - 1 = S - 2$, also $m = S - 1 \notin M$, für $k = 2$ würde $m = S + 1$ ebenfalls außerhalb des betrachteten Bereichs liegen.

Das Polynom $Q(x)$ hat daher $\frac{S}{2} + 1$ positive Koeffizienten durch gerade Potenzen von x und $\frac{S}{2} - 2$ positive Koeffizienten durch ungerade Potenzen von x. Das ursprüngliche Polynom $P(x)$ hat die Vorzeichen bei den ungeraden Koeffizienten umgedreht, daher hat es genau $\frac{S}{2} + 1 = 1021616$ positive Koeffizienten.

Aufgabe 46. Die *Würfelstadt von Morgen* hat einen Stadtplan, der wie ein kubisches $4 \times 4 \times 4$ Gitter aussieht. Jeder Punkt mit ganzzahligen Koordinaten wird als *Kreuzung* bezeichnet, und alle zwei Kreuzungen mit der Entfernung 1 sind durch eine gerade Straße verbunden. Die Kreuzung mitten in der Stadt, $(2, 2, 2)$, ist wegen Wartungsarbeiten geschlossen. Sandi möchte über den kürzest möglichen Weg auf den Straßen von der Kreuzung $(0, 0, 0)$ zur Kreuzung $(4, 4, 4)$ gelangen. Wie viele mögliche Wege gibt es?

Ergebnis: 26550

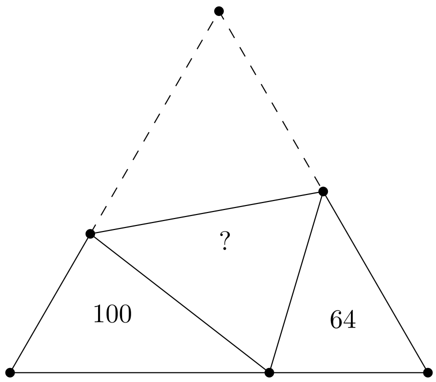
Lösungsweg: Zuerst berechnen wir, wie viele kürzeste Wege es ohne einschränkende Bedingung gibt: Wir müssen von $(0, 0, 0)$ nach $(4, 4, 4)$ gehen. Dazu müssen wir vier Straßen in x-Richtung, vier in y-Richtung und vier in z-Richtung in beliebiger Reihenfolge nehmen. Wenn wir zurückgehen, wird der Weg nicht der kürzeste sein. Das ergibt $\dfrac{12!}{4! \cdot 4! \cdot 4!}$ mögliche Wege.

Nun müssen wir die Anzahl jener Wege subtrahieren, die durch die Kreuzung $(2, 2, 2)$ gehen. Aufgrund der Symmetrie wissen wir, dass die Anzahl der Wege von $(0, 0, 0)$ nach $(2, 2, 2)$ gleich der Anzahl der Wege von $(2, 2, 2)$ nach $(4, 4, 4)$ ist und das ist gleich $\dfrac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$. Für jeden beliebigen Weg von $(0, 0, 0)$ nach $(2, 2, 2)$ gibt es $\dfrac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$ mögliche Fortsetzungen von $(2, 2, 2)$ nach $(4, 4, 4)$. Die Anzahl aller Wege durch die Kreuzung $(2, 2, 2)$ ist also $\left(\dfrac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}\right)^2 = \dfrac{6!^2}{2^6}$.

Damit ist die Gesamtzahl der gesuchten Wege $\dfrac{12!}{4!^3} - \dfrac{6!^2}{2^6} = 34650 - 8100 = 26550$.

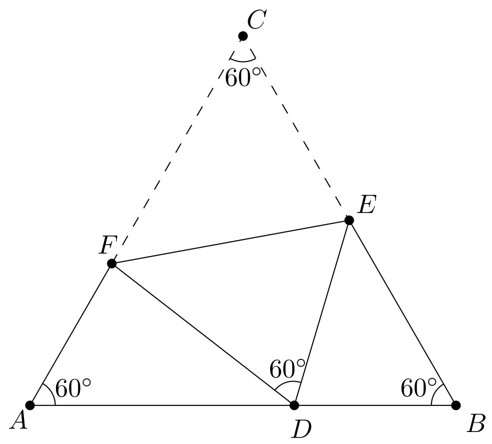
Aufgabe 47. Ein gleichseitiges Dreieck wird so gefaltet, dass eine Ecke genau auf der gegenüberliegenden Seite zu liegen kommt, siehe Abbildung. Dabei haben die neu entstandenen, nicht überlappenden Dreiecke die Flächeninhalte

100 und 64. Bestimme den Flächeninhalt des überlappenden Dreiecks.

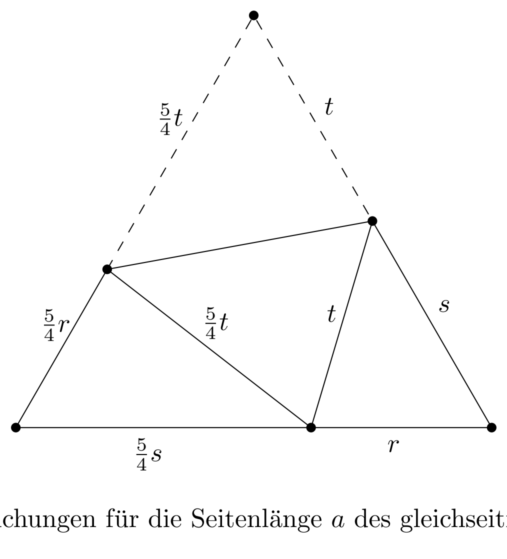


Ergebnis: 98

Lösungsweg: Die relevanten Punkte werden wie in der Abbildung bezeichnet.



Weil das Dreieck ABC gleichseitig ist, erhält man $\angle BDE + \angle DEB = 120° = \angle BDE + \angle FDA$ und hieraus $\angle DEB = \angle FDA$, weshalb die Dreiecke ADF und DBE ähnlich zueinander sind. Da sich die Flächeninhalte dieser Dreiecke wie $100 : 64$ verhalten, stehen die entsprechenden Seiten im Verhältnis $5 : 4$. Setzt man $r = |DB|$, $s = |BE|$, $t = |ED|$, so erhält man die Längen wie in nachfolgender Abbildung.



Hieraus kann man die folgenden Gleichungen für die Seitenlänge a des gleichseitigen Dreiecks ableiten:

$$\begin{aligned} a &= s + t && (1) \\ a &= \frac{5}{4}(r + t) && (2) \\ a &= \frac{5}{4}s + r && (3) \\ 64 &= \frac{1}{2}rs \cdot \sin 60° = rs \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} && (4) \end{aligned}$$

Aus (1)–(3) folgt $r = \frac{1}{3}a$, $s = \frac{8}{15}a$, $t = \frac{7}{15}a$, aus (4) damit weiter $a^2\sqrt{3} = 1440$ und für den Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3} = 360$. Diese Fläche zerlegt sich in $360 = 100 + 64 + 2A$, wobei A für den gesuchten Flächeninhalt steht. Es ergibt sich $A = 98$.

Aufgabe 48. Wir werfen eine faire Münze so lange, bis die Sequenz Kopf-Zahl-Kopf eintritt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sequenz Zahl-Kopf-Zahl-Kopf noch nicht vorgekommen ist?

Ergebnis: $\frac{5}{8}$

Lösungsweg: Sei E das Ereignis, dass die Sequenz Kopf-Zahl-Kopf, oder einfach KZK, eintritt, bevor $ZKZK$ vorkommt und $P(E)$ dessen Wahrscheinlichkeit. Für eine gegebene feste Folge s von Kopf und Zahl bezeichne $P(E|s)$ die Wahrscheinlichkeit, dass E in einer Sequenz eintritt, die mit s startet und zufällig weiter geht. Sei $x = P(E|K)$ und $y = P(E|Z)$. Wirft man ein oder zweimal (mit der fairen Münze) weiter, folgt

$$x = \frac{1}{2}P(E|KK) + \frac{1}{4}P(E|KZZ) + \frac{1}{4}P(E|KZK) \tag{5}$$

und analog mit bis zu drei Würfen weiter

$$y = \frac{1}{2}P(E|ZZ) + \frac{1}{4}P(E|ZKK) + \frac{1}{8}P(E|ZKZZ) + \frac{1}{8}P(ZKZK) \tag{6}$$

Da sowohl KZK und auch $ZKZK$ alternierende Sequenzen sind, gilt

$$\begin{aligned} x &= P(E|K) = P(E|KK) = P(E|ZKK), \\ y &= P(E|Z) = P(E|ZZ) = P(E|KZZ) = P(E|ZKZZ). \end{aligned}$$

Da außerdem $P(E|KZK) = 1$ und $P(E|ZKZK) = 0$ folgt aus den Gleichungen (5) und (6)

$$\begin{aligned} x &= \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{1}{4}, \\ y &= \frac{y}{2} + \frac{x}{4} + \frac{y}{8}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich $x = \frac{3}{4}$ und $y = \frac{1}{2}$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist dann $P(E) = \frac{1}{2}P(E|K) + \frac{1}{2}P(E|Z) = \frac{x+y}{2} = \frac{5}{8}$.

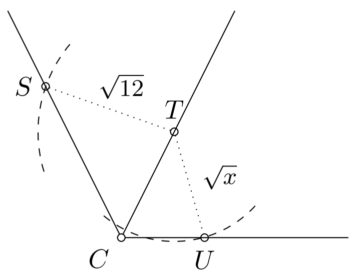
Aufgabe 49. Finde die kleinste positive reelle Zahl x mit folgender Eigenschaft: Es gibt mindestens ein Tripel (s, t, u) positiver reeller Zahlen, so dass die Gleichungen

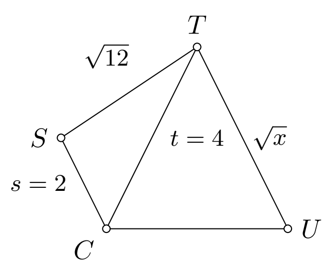
$$\begin{aligned} s^2 - st + t^2 &= 12, \\ t^2 - tu + u^2 &= x, \end{aligned}$$

gelten und keine zwei Tripel mit dieser Eigenschaft sich nur im letzten Eintrag u unterscheiden.

Ergebnis: 16

Lösungsweg: Für gegebene Werte von (s, t, u) kann man immer Punkte S, T, U und C in der Ebene wählen, so dass $|CS| = s$, $|CT| = t$, $|CU| = u$ und $\angle TCS = \angle UCT = 60°$ ist. Wir zeichnen dazu drei von C ausgehende Strahlen, die jeweils Winkel von $60°$ einschließen, auf denen S, T und U abgetragen sind (linke Abbildung).





Obige Gleichungen implizieren wegen $\cos 60° = 1/2$ mit dem Cosinussatz $|ST|^2 = 12$ und $|TU|^2 = x$.

Für festes t gibt es Lösungen der ersten Gleichung genau dann, wenn der Kreis um T mit Radius $\sqrt{12}$ den S-Strahl schneidet. Das ist genau für $0 < t \leq 4$ der Fall. Alternativ kann man das aus der Diskriminante der Gleichung $s^2 - st + t^2 - 12 = 0$ berechnen.

Für festes t aus diesem Bereich und gegebenes x gibt es nur eine Lösung $u > 0$ genau dann, wenn TU mindestens so lang ist wie TC. Der Fall, dass es nur eine Lösung gibt, weil TU senkrecht auf dem U-Strahl steht, muss nicht betrachtet werden, weil es zu festem x und etwas kleinerem t dann doch zwei positive Lösungen für u gibt, dieses x also nicht die geforderte Eigenschaft hat.

Dies gilt auch für $t = 4$ (rechte Abbildung). Es muss also $x \geq 16$ sein. Für kleinere x finden wir stets einen Punkt T und damit ein t, für das es sowohl ein $s > 0$ gibt, das die erste Gleichung erfüllt, als auch zwei positive u, welche die zweite Gleichung erfüllen.

Der kleinste Wert für x mit den geforderten Eigenschaften ist also $x = 16$.

Aufgabe 50. Für wie viele $x \in \{1, 2, 3, \dots 2020\}$ ist Folgendes möglich: Jakob addiert 2020 nicht-negative aufeinander folgende ganze Zahlen, Paul addiert $2020 + x$ nicht-negative aufeinander folgende ganze Zahlen und beide erhalten dieselbe Summe?

Ergebnis: 1262

Lösungsweg: Sei n der erste Summand von Jakobs Summe und m der erste Summand von Pauls Summe. Dann ist

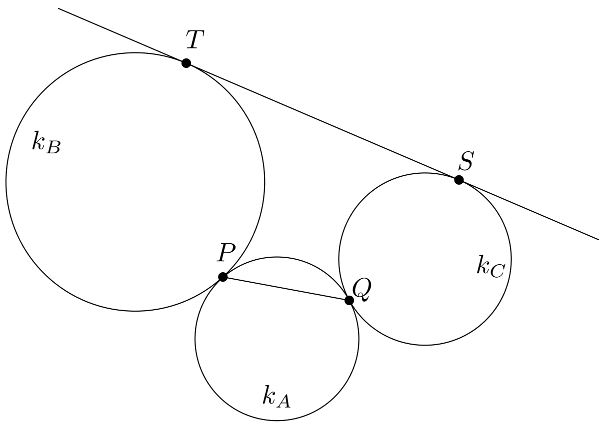
$$\begin{aligned} & 2020n + \frac{2019 \cdot 2020}{2} = (2020 + x)m + \frac{(2019 + x)(2020 + x)}{2} \\ \iff \quad & 4040(n - m - x) = x(2m + x - 1). \end{aligned} \tag{7}$$

Da die linke Seite der Gleichung (7) durch 8 teilbar ist, muss das auch für die rechte Seite gelten, also muss 8 ein Teiler von $x(2m + x - 1)$ sein. Ist x gerade, so ist $(2m + x - 1)$ ungerade und es muss $8 \mid x$ erfüllt sein. Für ungerade x muss $8 \mid 2m + x - 1$ gelten. Wir zeigen unten, dass dies durch geschickte Wahl von m stets erreicht werden kann. Weitere Möglichkeiten existieren nicht.

Für $k \in \{0, 1, \dots, 1009\}$ und ungerade $x = 2k + 1$ erfüllen $m = 2020 - k$ und $n = 2020 + 3k + 2$ Gleichung (7). Für $k \in \{1, 2, \dots, 252\}$ und $x = 8k$ erfüllen $m = 1263 - 4k$ und $n = 1263 + 9k$ Gleichung (7). In allen Fällen sind n und m positiv.

Also gibt es $1010 + 252 = 1262$ mögliche x.

Aufgabe 51. Die Kreise k_B und k_C berühren den Kreis k_A in den Punkten P bzw. Q. Bestimme den Radius r_A des Kreises k_A, wenn die Radien der Kreise k_B und k_C durch $r_B = 5$ und $r_C = 3$ gegeben sind, $|PQ| = 6$ gilt und die Länge der berührenden Strecke $|TS| = 12$ ist.

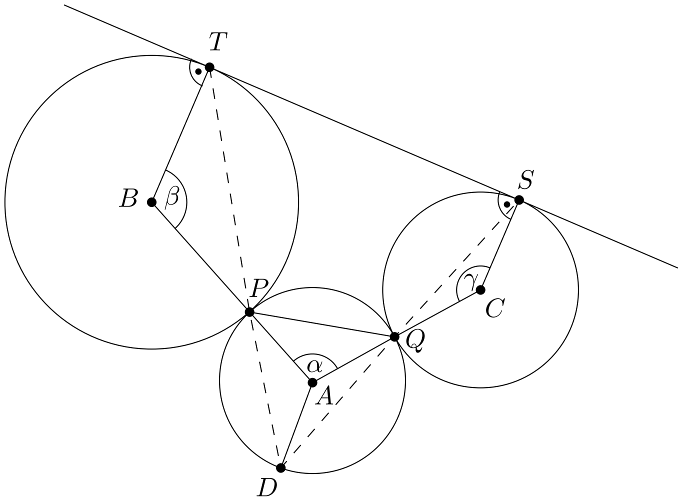


Ergebnis: $\frac{4+\sqrt{61}}{3} \doteq 3.93675$

Lösungsweg: Die Mittelpunkte der Kreise werden mit A, B, C bezeichnet. Außerdem seien $\alpha = \angle QAP, \beta = \angle PBT, \gamma = \angle SCQ$. Wegen $BT \perp TS$ und $CS \perp TS$ erhält man $\alpha + \beta + \gamma = 360°$ aufgrund der Winkelsumme im Fünfeck $TBACS$. Da TS eine Tangente an die Kreise k_B und k_C ist, ergibt sich mit dem Sehnentangentenwinkelsatz $\angle PTS = \frac{1}{2}\beta$ und $\angle TSQ = \frac{1}{2}\gamma$. Wegen

$$\angle SQP = 180° - (90° - \frac{1}{2}\alpha) - (90° - \frac{1}{2}\gamma) = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$$

folgt $\angle PTS + \angle SQP = 180°$ und hieraus weiter, dass $PQST$ ein Sehnenviereck ist.



Sei D der Schnittpunkt der Geraden TP und SQ. Da die Winkel bei T und S im Dreieck TSD die Größen $\frac{1}{2}\beta$ und $\frac{1}{2}\gamma$ haben, hat der Winkel bei D die Größe $180° - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\alpha$. Nach der Umkehrung des Zentri-Peripheriewinkelsatzes liegt D also auf dem Kreis k_A und das Dreieck APD ist gleichschenklig wie das Dreieck BPT. Da die Basiswinkel der beiden Dreiecke bei P Scheitelwinkel sind, sind beide Dreiecke sogar ähnlich. Analog ergibt sich $ADQ \sim CSQ$. Aus diesen Ähnlichkeiten erhält man die Verhältnisse

$$\frac{|TP|}{|DP|} = \frac{r_B}{r_A} \qquad \text{und} \qquad \frac{|SQ|}{|DQ|} = \frac{r_C}{r_A},$$

was zu

$$\frac{|DT|}{|DP|} = \frac{r_A + r_B}{r_A} \qquad \text{und} \qquad \frac{|DS|}{|DQ|} = \frac{r_A + r_C}{r_A}$$

führt. Da $PQST$ ein Sehnenviereck ist, sind die Dreiecke DST und DQP ähnlich, woraus man die Streckenverhältnisse

$$\frac{|TS|}{|PQ|} = \frac{|DS|}{|DP|} = \frac{|DT|}{|DQ|}$$

ableiten kann. Zusammen mit obigen Gleichungen erhält man

$$\frac{|TS|^2}{|PQ|^2} = \frac{|DS|}{|DP|} \cdot \frac{|DT|}{|DQ|} = \frac{(r_A + r_B) \cdot (r_A + r_C)}{r_A^2}.$$

Durch Einsetzen der gegebenen Werte kann man nun den Radius r_A durch Lösen der quadratischen Gleichung

$$4r_A^2 = (r_A + 3)(r_A + 5) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3r_A^2 - 8r_A - 15 = 0$$

berechnen. Die zwei Lösungen dieser Gleichung sind

$$\frac{8 \pm \sqrt{64 + 12 \cdot 15}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{61}}{3},$$

wobei $\frac{4+\sqrt{61}}{3} \doteq 3.93675$ die einzige positive Lösung und somit der gesuchte Wert ist.