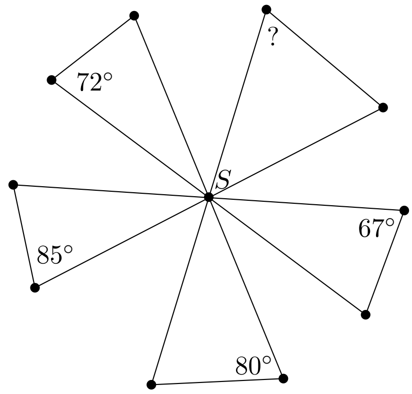
1. feladat Amikor a koráról kérdezték, Mariska néni a következő rejtvényt adta válaszul: „Öt, különböző korú gyermekem van, az egymást követő gyerekek között 4-4 év különbség van. Az első gyermekem 21 éves koromban született, a legfiatalabb gyermekem pedig most 21 éves." Határozzátok meg Mariska néni életkorát!

Eredmény: 58

Megoldás: A megadott adatokból könnyen meghatározható, hogy a keresett életkor $21 + 4 \cdot 4 + 21 = 58$.

2. feladat Egy régi szélmalom kereke öt háromszög alakú lapátból áll. A lapátokat öt, egyforma hosszú szakasz határozza meg, ezen szakaszok mindegyikének S a felezőpontja, és a szakaszok végpontjai az ábrán látható módon vannak összekötve. Határozzátok meg a kérdőjellel jelölt szög nagyságát fokokban mérve!



Eredmény: 56

Megoldás: Az öt háromszög S csúcshoz tartozó szögeinek összege 180°. Mivel a háromszögek egyenlő szárúak, így az öt megjelölt szög összege $\frac{5\cdot180^\circ-180^\circ}{2} = 360^\circ$, ebből pedig következik, hogy a kérdőjellel jelölt szög nagysága $360^\circ - 67^\circ - 80^\circ - 85^\circ - 72^\circ = 56^\circ$.

3. feladat Egy osztály tagjai egy atlétikai versenyen, három különböző versenyszámban indulnak. Minden diák részt vesz legalább egy versenyszámban. 22 diák indul futásban, 13 távolugrásban, 15 pedig súlylökésben. Tudjuk még azt is, hogy 8 diák indult futásban és távolugrásban is, 7 futásban és súlylökésben is, és 6-an választották a távolugrást és a súlylökést is. 3 lelkes diák mindhárom versenyszámban elindult a versenyen. Hány diák jár ebbe az osztályba?

Eredmény: 32

Megoldás: Adjuk össze azok számát, akikről tudjuk, hogy egy-egy versenyszámban indulnak, és ebből vonjuk ki azok számát, akikről tudjuk, hogy két versenyszámot választottak. Így a 3 lelkes versenyzőt, akik mindhárom versenyszámban indultak, már eggyel többször vontuk ki a kelleténél, így az ő számukat hozzá kell adni. Így a végeredmény: $22 + 13 + 15 - 8 - 7 - 6 + 3 = 32$.

4. feladat Egy számot szuperpáros számnak nevezünk, ha minden számjegye páros. Hány olyan 5-jegyű szuperpáros szám van, amihez ha 24680-at adunk, akkor is szuperpáros számot kapunk?

Eredmény: 90

Megoldás: Összesen öt páros egyjegyű szám létezik. Ahhoz, hogy az összeg biztosan szuperpáros legyen, a hagyományos írásbeli összeadás rendszere szerint az összeadott számjegypárok összege sehol nem haladhatja meg a 10-et. Mivel nem kezdhetünk számot 0-val, az első számjegyre három lehetőség van (2, 4 és 6), szintén három lehetőség a második számjegyre (0, 2 és 4), a harmadik számjegyre kettő, a negyedik számjegyre egy, az utolsó számjegyre pedig öt. Ezeket a lehetőségeket összeszorozva megkapjuk az eredményt: $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 = 90$.

5. feladat Élt egyszer egy bölcs király, a birodalmában négy koncentrikus kör alakú fal állt, mindegyiknek a király vára volt a középpontja. A körök sugara rendre 50, 100, 150, 200 volt, és a legnagyobb körön belül lakóterület volt (beleértve a kisebb falakon belüli területeket is). Mivel békeidő volt, a király úgy döntött, hogy lebontja ezt a négy falat, és az alapanyagot felhasználva a lehető legnagyobb kör alakú falat építi meg. Továbbra is a vára lesz a középpontban. Mekkora az új lakóterület és a régi lakóterület aránya (egynél nagyobb vagy egyenlő számként megadva)?

Eredmény: 25/4

Megoldás: Tudjuk, hogy a négy kör alakú fal összkerülete lesz az új fal kerülete. Jelöljük az új kör alakú fal sugarát r-rel. Ekkor $2\pi \cdot 50 + 2\pi \cdot 100 + 2\pi \cdot 150 + 2\pi \cdot 200 = 2\pi \cdot r$, amiből $r = 500$ adódik. Ebből a keresett arány $\frac{\pi\cdot500^2}{\pi\cdot200^2} = 25/4$.

6. feladat Zoé ki szeretne nyitni egy lakatot. Az alábbiakat tudja a négyjegyű kódról:

- minden számjegye különböző
- a 137 és a 17 osztja ezt a számot
- a számjegyek összege a lehető legkisebb prímszám

Mi a kód?

Eredmény: 9316

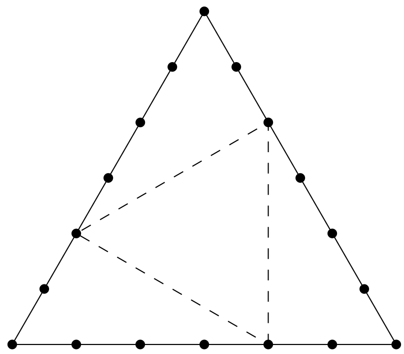
Megoldás: Mivel a keresett négyjegyű szám osztható a 137 és a 17 prímszámokkal, osztható a szorzatukkal is, azaz a keresett szám $137 \cdot 17 = 2329$ többszöröse. Mivel a kód négyjegyű, a lehetséges kódok $2329 \cdot 2 = 4658$, $2329 \cdot 3 = 6987$, valamint $2329 \cdot 4 = 9316$. Ezek számjegyeinek összege rendre 16, 23, 30, illetve 19. Ezek közül csak a 23 és a 19 prímszám, de mivel a keresett kód a legkisebb előforduló prímszámhoz tartozik, így a lakatot a 9316 szám nyitja.

7. feladat Négy sokszög van egy asztalon: egy szabályos háromszög, amelynek oldalai egy egység hosszúak és három másik egybevágó szabályos sokszög, szintén egységnyi hosszú oldalakkal. Ezek a sokszögek úgy helyezkednek el, hogy bármely két sokszögnek pontosan egy közös oldala van, és semelyik kettő nincs átfedésben. Mekkora a kerülete a négy sokszögből álló alakzatnak, ha a közös oldalakat nem számoljuk?

Eredmény: 27

Megoldás: Tegyük fel, hogy az egybevágó szabályos sokszögek mind n oldalúak! A szabályos sokszögek összeragasztásával kapott sokszög $3(n-3)$ oldalú, hiszen bármely két szabályos sokszögnek egy közös oldala van. Mivel egy szabályos háromszög belső szöge $60°$, a külső $300°$-os szöget az érintkező, a háromszög oldalaira írt egybevágó szabályos n-szögek felezik, tehát az n-szögnek $150°$-osak a belső szögei. Mivel egy szabályos n-szög belső szögeinek összege $(n-2) \cdot 180°$, így az $150n = 180(n-2)$ egyenletet kell megoldanunk, amiből $n = 12$ adódik. Az új alakzat oldalainak száma, és így egyúttal a keresett kerület is $3(12-3) = 27$.

8. feladat Adott egy szabályos háromszög, amelynek mindegyik oldalán kijelöltünk néhány pontot (beleértve a háromszög mindhárom csúcsát) úgy, hogy azok mindegyik oldalt 2021 egyenlő hosszúságú szakaszra osztják. Hány különböző szabályos háromszög jelölhető ki úgy, hogy mindhárom csúcs egybeesik a megjelölt pontok valamelyikével? Az ábra az egyik ilyen háromszöget mutatja arra az esetre, ha az adott szabályos háromszög oldalait 6 egyenlő részre osztjuk fel a pontokkal.



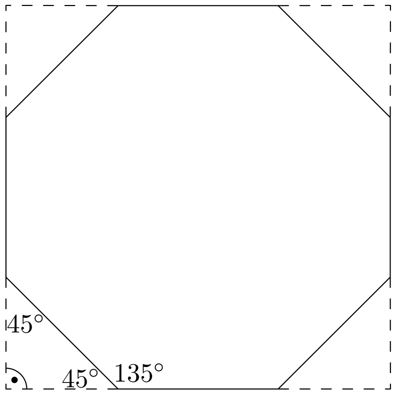
Eredmény: 8081

Megoldás: Az alábbiakban a szabályos háromszögeket csak *háromszög*eknek hívjuk. Van az eredeti háromszög, és $3 \cdot 2020$ olyan háromszög, ami az eredetinek pontosan egy csúcsát tartalmazza, és végül 2020 elforgatott háromszög amelyeknek nincs közös csúcsuk az eredetivel. Könnyű belátni, hogy ezek a háromszögek mind különbözőek, és ezeken kívül nincs más. Tehát összesen $1 + 3 \cdot 2020 + 2020 = 8081$ megfelelő háromszög van.

9. feladat Vera levágja egy négyzet alakú papírlap négy sarkát úgy, hogy szabályos nyolcszöget kapjon. A levágott sarkak együttes területe 300. Mennyi a szabályos nyolcszög oldalhossza?

Eredmény: $\sqrt{300} \doteq 17.32051$

Megoldás: A szabályos nyolcszög belső szögei $135°$-osak. Ez azt jelenti, hogy a Vera által levágott sarkak egyenlő szárú derékszögű háromszögek, melyeket összeilleszthetünk egy négyzetté, és az így kapott négyzet oldalhossza megegyezik a szabályos nyolcszög oldalhosszával. Ebből következik, hogy a nyolcszög oldalhossza $\sqrt{300}$.



10. feladat Keressétek meg a legnagyobb n háromjegyű pozitív egész számot, amelyre teljesülnek a következő állítások:

1. n számjegyeinek összege 16,
2. n számjegyeinek szorzata nem 0, de a szorzat egyes helyiértéken álló számjegye 0,
3. n számjegyeit összeszorozva és a szorzat számjegyeit összeadva 3-at kapunk.

Eredmény: 853

Megoldás: A második feltétel alapján tudjuk, hogy n-nek legalább az egyik számjegye 5 és legalább egy számjegye páros, viszont egyik számjegye sem lehet 0. Ebből kiindulva az első állítás az 5, 2, 9 vagy 5, 4, 7 vagy 5, 6, 5 vagy 5, 8, 3 számhármasokra teljesül. A négy lehetőség közül csak az 5, 8, 3 számhármas felel meg a harmadik állításnak, így az ezekből összeállítható legnagyobb háromjegyű szám lesz a megoldás, vagyis 853.

11. feladat Az 6437051928 számból öt számjegyet töröltünk, úgy, hogy a megmaradó ötszámjegyű szám a lehető legnagyobb legyen. Mi a megmaradó szám?

Eredmény: 75928

Megoldás: A tízezres helyiértéken úgy kapunk lehető legnagyobb értéket, ha a 7-estől balra álló három számjegyet töröljük. Utána már látható, hogy a maradék 2 jegy, amit törölni érdemes, a 0 és az 1. Tehát a megmaradó szám 75928.

12. feladat Legyen n egy pozitív egész szám. Vegyünk egy S_n növekvő sorozatot, amelynek az első tagja 1, és két szomszédos tagja közötti különbség mindig n. Például, az S_2 számsorozat $1, 3, 5, \ldots$ Hány olyan n érték van, melyre 2021 eleme az S_n sorozatnak?

Eredmény: 12

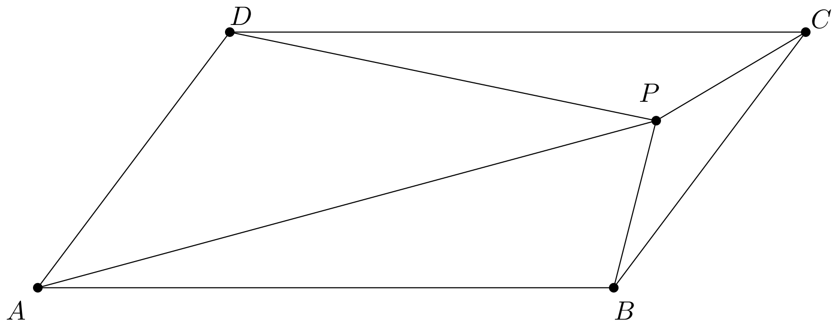
Megoldás: A 2021 akkor és csak akkor szerepel az S_n számsorozatban, ha $2021 = 1 + an$ valamilyen pozitív egész a-ra. Tehát $2020 = an$, azaz n osztója 2020-nak. A prímfelbontása $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$. Egy osztót úgy kapunk, hogy valahány prímtényezőt felhasználunk. A 2-es prímtényezőt bevehetjük 2-szer, 1-szer vagy 0 szor, az 5-öt és a 101-et vagy bevesszük, vagy nem. Ez összesen $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ lehetőség, azaz 2020-nak 12 osztója van. Ezek alapján 12 darab olyan n van, amelyre 2021 tagja az S_n sorozatnak.

13. feladat Van egy egyenes 90 méter hosszú folyósó 10 ablakkal, bármely két szomszédos ablak 10 méter távolságra van egymástól. Tomi lerakott hét robotot 7 különböző ablakhoz, és egy időpontban bekapcsolta az összeset. Mindegyik robot 10 méter/perc konstans sebességgel halad valamilyen irányba, amíg el nem éri a folyosó végét. Amikor a folyósó végére ér, visszafordul. Tomi megmérte az időt addig az időpontig, amikor már mindegyik robot mindegyikkel találkozott. Mi ennek az időpontnak a lehető legnagyobb értéke, másodpercekben megadva?

Eredmény: 510

Megoldás: Bármelyik A robot esetében meg tudjuk állapítani, hogy A melyik másik robottal fog legutoljára találkozni és kiszámolhatjuk, hogy ez a találkozás mikor fog bekövetkezni. A leghosszabb kiszámolt idő 8,5 perc, ami egyenlő 510 másodperccel, így ez utóbbi értéket keressük.

14. feladat A P pont az $ABCD$ paralelogramma belsejében fekszik, olyan módon, hogy a CDP háromszög területe háromszor akkora, mint a BCP háromszögé, és háromszor kisebb, mint a APD háromszögé. Adjátok meg az ABP háromszög területét, ha CDP területe 18.



Eredmény: 42

Megoldás: Az APD és BCP háromszöge együtt a paralelogramma területének felét fedik le. Ez alapján az ABP háromszög területe

$$\left(\frac{1}{3}+3\right)\cdot 18-18=42.$$

15. feladat Az 1058, 1486 és 2021 számokat ugyanazzal a $d>1$ pozitív egész számmal osztva mindig ugyanazt a maradékot kapjuk. Keressétek meg d értékét.

Eredmény: 107

Megoldás: A különbségeket nézve $1486-1058=428$ és $2021-1486=535$. Mivel a számok ugyanazt a maradékot adták d-vel osztva, a különbségeik d többszörösei. 428 and 535 legnagyobb közös osztója 107, ami prímszám, ezért a keresett szám 107.

16. feladat Egy futballstadion cserepadja 14 egyfős ülésből áll. A csapat új vezetése, amely az edzőből, a segédedzőből, a menedzserből és a fizioterapeutából áll, szeretne közelről megismerkedni a játékosokkal. Ezért meccs közben a cserepadon akarnak ülni a tíz cserejátékossal együtt úgy, hogy a csapatvezetők mindegyike két játékos közé ül le. Hányféleképpen tudják a vezetők ilyen módon kiválasztani a négy ülésüket? (Ha ugyanarra a négy ülésre két eltérő módon ülnek le a vezetőségi tagok, az két külön megoldásnak számít.)

Eredmény: 3024

Megoldás: Ha egymás mellé sorbaállítanánk a tíz cserejátékost, összesen kilenc rés lenne közöttük. Ezen rések mindegyikébe legfeljebb egy csapatvezető kerülhet. Mivel négy vezető van, összesen $9\cdot 8\cdot 7\cdot 6=3024$ különböző módon ülhetnek le, hogy teljesüljön a feltétel.

17. feladat Egy szabályos négyzet alapú gúla alapjának területe 1, míg a gúla teljes felszíne 3. Mekkora a térfogata?

Eredmény: $\sqrt{3}/6 \doteq 0.288675$

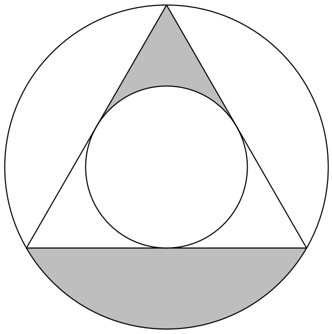
Megoldás: A gúla alapjának 1 egység hosszúak az élei. Ha a gúla teljes felszíne 3, akkor a négy háromszög alakú oldalának egyenkénti felszíne $1/2$ és így ezek magassága 1. Tehát ha a gúlát csúcsában és két oldalának magasságvonalában kettévágjuk, akkor egy 1 oldalhosszúságú egyenlő oldalú háromszöget kapunk, melynek magassága a gúla magasságával egyenlő. Ezért a gúla magassága $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Mivel a gúla térfogata egyenlő az alap és a magasság szorzatának egyharmadával, a végeredmény $\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}=\frac{1}{6}\sqrt{3}$.

18. feladat A mágikus Kána gép folyadékokat alakít át. Ha tiszta vizet kap, akkor a 6%-át borrá változtatja, és a maradék 94%-át meghagyja víznek. Ha tiszta bort kap, akkor 10%-át vízzé változtatja, és a maradék 90%-át úgy hagyja. Ha keveréket kap, akkor a komponenseken külön-külön elvégzi a fenti műveleteket. Mária vett bort és vizet, összesen 6000 litert, és mindet beleöntötte a Kána gépbe. Miután a gép leállt, Mária látta, hogy a keverék összetétele nem változott meg. Hány liter bor volt benne?

Eredmény: 2250

Megoldás: Legyen x literben a bor mennyisége, z pedig a vízé, még a Kána gépbe öntés előtt. Tudjuk, hogy a gép $0{,}06z$ liter vizet változtat borrá és $0{,}1x$ liter bort vízzé, valamint hogy x értéke ugyanannyi a gép működése előtt és után, emiatt igaz, hogy $0{,}06z=0{,}1x$. Illetve, mivel $x+z=6000$, felírhatjuk, hogy $0{,}06(6000-x)=0{,}1x$. Az egyenletet x-re megoldva $6000\cdot\frac{3}{8}=2250$-et kapunk.

19. feladat Az ábrán egy szabályos háromszög, valamint ennek a beírt és a köréírt köre látható. Mennyi a szürkére színezett részek együttes területe, ha a köréírt kör területe 140?



Eredmény: 35

Megoldás: Könnyen beláthatjuk, hogy az egyenlő oldalú háromszög beírt köre feleakkora, mint a köréírt köre, így az ábrán látható beírt kör területe $\frac{140}{4} = 35$. Továbbá a szürkére színezett rész pontosan $\frac{1}{3}$ része a két kör közötti különbségnek, vagyis ugyancsak 35.

20. feladat Ha adott 2021 pozitív egész szám, amelyeknek a szorzata kétszerese az összegüknek, keressük meg a lehető legnagyobb értéket, amit a számok egyike felvehet!

Eredmény: 4044

Megoldás: Jelöljük az egész számokat a következőképp: $c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_{2020} \geq c_{2021} \geq 1$. Arra vagyunk kíváncsiak, hogy mekkora c_1 lehető legnagyobb értéke, ha a

$$c_1 \cdots c_{2021} = 2 \cdot (c_1 + \cdots + c_{2021}) \tag{1}$$

egyenlet teljesül. Osszunk az egyenlet bal oldalával, és becsüljük meg felülről a kifejezést úgy, hogy c_3-tól kezdve a nevezőkben lévő kisebb c_i számok értékét 1-nek rögzítjük:

$$1 = 2\left(\frac{1}{c_2 \cdots c_{2021}} + \cdots + \frac{1}{c_1 \cdots c_{2020}}\right) \leq 2\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{2019}{c_1 c_2}\right) = 2\frac{2019 + c_1 + c_2}{c_1 c_2}.$$

Ha szorzunk $c_1 c_2$-vel és átrendezzük az egyenletet, megkapjuk, hogy

$$(c_1 - 2)(c_2 - 2) = c_1 c_2 - 2c_1 - 2c_2 + 4 \leq 2 \cdot 2019 + 4 = 4042.$$

Ha $c_2 \geq 3$, akkor $c_1 \leq 4044$, és szélsőséges esetben a $c_1 = 4044$, $c_2 = 3$, $c_3 = \cdots = c_{2021} = 1$ számhármas teljesíti is az (1)-es egyenletet – ennél nagyobb c_1 értéket ebben az esetben nem kaphatunk. Ugyanakkor ha $c_2 \leq 2$, akkor a $c_2 \geq c_3 \cdots \geq c_{2021}$ számok közt $k \geq 0$ kettes és $2020 - k$ egyes található, így az (1)-es egyenletet átírhatjuk a következőképp:

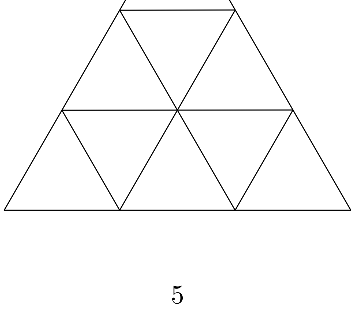
$$c_1 2^k = 2(c_1 + 2k + 2020 - k).$$

Ezt tovább egyszerűsíthetjük $c_1(2^{k-1} - 1) = 2020 + k$ alakra és így beláthatjuk, hogy $k \leq 1$-re nincs olyan c_1, amire teljesül ez az egyenlet, $k \geq 2$-re pedig megkapjuk, hogy

$$c_1 = \frac{2020 + k}{2^{k-1} - 1} \leq 2022 < 4044,$$

így a végeredmény 4044.

21. feladat Az ábrán látható kilenc kis háromszögbe különböző pozitív egész számokat akarunk írni, úgy, hogy bármely kettő, élszomszédos mezőben fekvő számnak legyen 1-nél nagyobb közös osztója. Mi a kilenc beírt szám összegének lehető legkisebb értéke?



Eredmény: 59

Megoldás: Először figyeljük meg, hogy három mezőnek van egy szomszédja, másik háromnak kettő, és még másik háromnak három. Ez azt jelenti, hogy ha egy p prím a kilenc szám egyike, akkor p-nek legalább egy többszörösének is a számok közt kell lennie. Továbbá vegyük észre, hogy az 1 nem lehet a számok egyike. Jelöljük egy lehetséges kitöltés kilenc számának összegét S-sel.

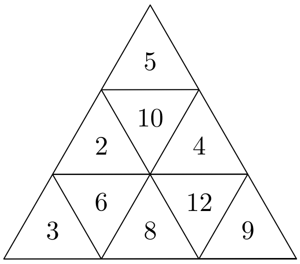
Ha egy lehetséges kitöltésben szerepel egy $p \geq 11$ prím, akkor legalább egy $k \cdot p$ többszörösnek szintén szerepelnie kell, ahol $k \geq 2$. Töltsük ki a fennmaradó hét kis háromszöget a lehető legkisebb számokkal, nem figyelve arra, hogy teljesüljön rájuk a közös osztós szabály.

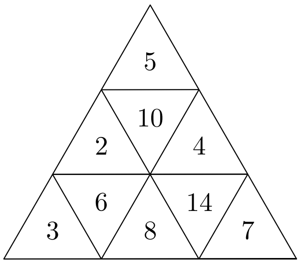
Ekkor $S \geq 2+3+4+5+6+7+8+p+k \cdot p = 35+(k+1) \cdot p \geq 35+33 = 68$.

Most tegyük fel azt, hogy nincs $p \geq 11$ prím egy lehetséges kitöltésben, és nézzük meg a következő négy alesetet:

- Az 5 és a 7 egyaránt szerepel: $S \geq 5+k_5 \cdot 5+7+k_7 \cdot 7+2+3+4+6+8 = (k_5+1) \cdot 5+(k_7+1) \cdot 7+23 \geq 15+21+23 = 59$
- Az 5 szerepel, de a 7 nem: $S \geq 5+k \cdot 5+2+3+4+6+8+9+ \begin{cases} 10 \geq 20+32+10 = 62 & \text{ha} \quad k \geq 3 \\ 12 = 15+32+12 = 59 & \text{ha} \quad k = 2 \end{cases}$
- Nem szerepel sem az 5, sem a 7: $S \geq 2+3+4+6+8+9+10+12+14 = 68$
- A 7 szerepel, de az 5 nem: $S \geq 2+3+4+6+7+8+9+10+k \cdot 7 \geq 49+14 = 63$

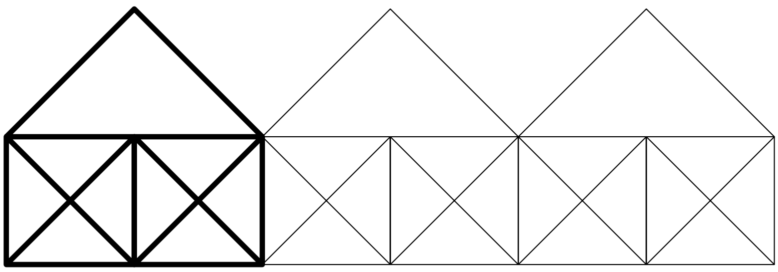
Összességében arra juthatunk, hogy az 59 esélyes a legkisebb összeg értékére, amennyiben kitöltéskor teljesül a közös osztós feltétel. A fenti esetek közül mindkét 59 összegű számcsoportot be tudjuk írni a háromszögbe a szabályok betartásával:





Tehát a válasz 59.

22. feladat Lili folyamatosan ismételve rajzolgatja ugyanazt a házat. Egy ház két egyforma négyzetből és egy egyenlő szárú derékszögű háromszögből áll. Minden új házat közvetlenül az eddigiek mellé rajzol. Ezen az ábrán láthatjuk az első három házat.



Minimum hány házat kell Lilinek rajzolnia, hogy legalább 2021 háromszöget össze tudjon számolni az ábrán?

Eredmény: 93

Megoldás: Legyen egy ház területe 3 egység.

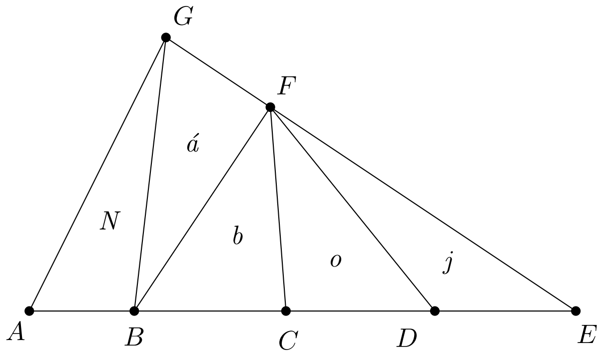
Az első házban összeszámolhatunk nyolc háromszöget, melyek mérete 1/4, nyolcat, melyek mérete 1/2 és hármat, melyek mérete 1. Ez összesen 19 háromszög.

A második házban ugyanennyi háromszög található, plusz két 1 egység méretű háromszög, melyek ebből a házból átlógnak az előző ház területére. Tehát a második házban 21 háromszöget számolunk össze.

A harmedik háztól számítva mindegyik újonnan lerajzolt ház ugyanannyit ad hozzá a háromszögek számához, mint a második ház, plusz egy 4 egység méretű háromszöget, ami átlóg az előző két ház területére. Vagyis a harmadiktól számítva mindegyik későbbi ház 22 háromszöget tartalmaz.

Mivel $2021-19-21 = 1981$ és $1981 = 90 \cdot 22+1$, Lilinek legalább $2+90+1 = 93$ házat kell lerajzolnia.

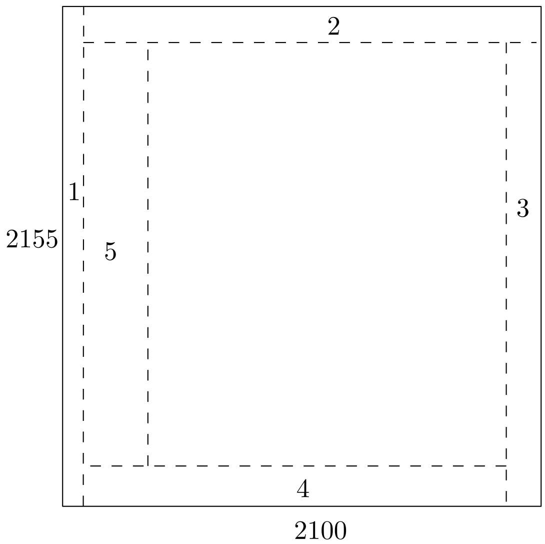
23. feladat A N, $á$, b, o, j háromszögeknek egyforma a területe. Milyen hosszú az AB szakasz, ha $CD = 5$?



Eredmény: $\frac{15}{4}$

Megoldás: A BEG és BEF háromszögek területének aránya $4 : 3$. Mivel ennek a két háromszögnek közös a BE oldala, az erre az oldalra mért magasságuk aránya is $4 : 3$. Az ABG és CDF háromszögeknek ugyanakkora a területe, így megkapjuk, hogy $AB = \frac{3}{4}CD = \frac{15}{4}$.

24. feladat Annának van egy nagy téglalap alakú papírlapja, oldalainak mérete 2155 és 2100. Anna levág egy 1 szélességű csíkot a hosszabbik oldalnál, aztán óramutató járása szerint haladva levág egy 2 szélességű csíkot a rövidebb oldalnál, majd egy 3 szélességű csíkot a hosszabb oldalnál. Így folytatja, mindig eggyel növelve a levágott csík szélességét, egészen odáig, míg ez lehetséges. (Lásd az ábrán).

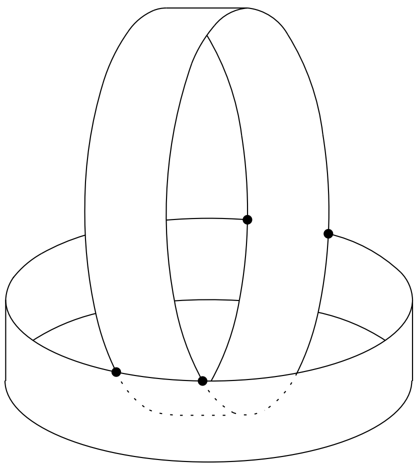


Végül kap egy téglalapot, amiből már nem tud levágni ilyen növekvő méretű csíkot. Mekkora ennek a téglalapnak a területe?

Eredmény: 6375

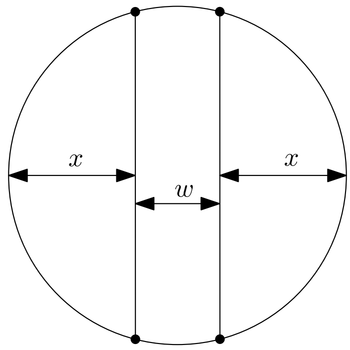
Megoldás: Anna egészen addig tud páratlan szélességű csíkokat levágni, amíg $1 + 3 + \cdots + 2n - 1 = n^2 < 2100$. Mivel $45^2 = 2025 < 2100 < 2116 = 46^2$, a 89 szélességű a legutolsó páratlan szélességű csík, amit levághat. Továbbá addig tud páros szélességű csíkokat levágni, amíg $2 + 4 + \cdots + 2n = n(n + 1) < 2155$. Tekintve, hogy $45 \cdot 46 = 2070 < 2155 < 2162 = 46 \cdot 47$, a legnagyobb páros szélességű csík, amit Anna levághat, 90 széles. Így a megmaradt téglalap területe $(2100 - 2025) \cdot (2155 - 2070) = 75 \cdot 85 = 6375$.

25. feladat Két azonos kinézetű gyűrű sugara 4 és szélessége w. Az egyik vízszintesen fekszik az asztalon, míg a másik függőlegesen áll, pontosan négy ponton érinti az alsó gyűrűt (lásd az ábrát), és a legalsó pontja 1 magasságban van az asztal fölött. Mi w értéke?



Eredmény: $\frac{10}{3}$

Megoldás: Legyen w a keresett gyűrűszélesség és figyeljük meg a két egymáson lévő gyűrű felülnézeti képét:



Ebből következik, hogy az asztal fölött függőlegesen álló gyűrű magassága $1 = w - x$. Így $8 = 2x + w = 2(w-1) + w = 3w - 2$ és ebből megkapjuk, hogy $w = \frac{10}{3}$.

26. feladat Egy 14-ed fokú polinom együtthatói egész számok, a főegyütthatója pozitív, és 14 különböző egész gyöke van. A nulla helyen felvett értéke p, ami pozitív szám. Keressük meg p lehető legkisebb értékét.

Eredmény: 29030400

Megoldás: A polinomot felírhatjuk $c \cdot (x-a_1) \cdot (x-a_2) \cdot \dots \cdot (x-a_{14})$ alakban, ahol $a_1, a_2, \dots, a_{14}$ páronként különböző egészek és c egy pozitív szám (mivel c maga a főegyüttható). A 0-nál felvett érték megegyezik a $c \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{14}$ szorzattal. Mivel ennek a minimum értékét keressük, c-nek a lehető legkisebb értéket adjuk, tehát $c = 1$. Hogy minimalizáljuk a többi gyök összegét, a nullához lehető legközelebbi értékeket kell nekik adnunk, vagyis $1, -1, 2, -2 \dots$. Azonban páros darab negatív számot kell kiválasztanunk, így a végeredmény $6! \cdot 8! = 29030400$.

27. feladat A szokásos kézírásával Bea a 4, 5 és 7 számjegyeket két tollvonással írja le, az összes többi számjegyet egy vonással. Hány tollvonást használ összesen, ha leírja az összes egész számot 1-től 2021-ig?

Eredmény: 8783

Megoldás: Ha Bea leírja az egész számokat 1-től 2021-ig, akkor 9 egyjegyű számot, 90 kétjegyű számot, 900 háromjegyű számot és $2021 - 1000 + 1 = 1022$ négyjegyű számot ír le. Összesen $9 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 + 1022 \cdot 4 = 6977$ számjegyet ír le. Az összes számjegyhez szükséges egy tollvonás, továbbá még egy tollvonást igényel a 4, 5 vagy 7 értékű számjegyek leírása. Tehát elég összeszámolnunk, hogy hányszor fordulnak elő ezek a számjegyek. Mivel a 2021 nem tartalmazza a 4, 5 és 7 számok egyikét sem, csak a 2020-nál nem nagyobb egész számokat nézzük.

Számoljuk meg a Bea által leírt 4-es számokat. A 2020-ig leírt számok $1/10$ része tartalmazza a 4-et az egyes helyiértéken, vagyis 202 szám. A tízes helyiértéken a 2000-ig leírt számok $1/10$ részében fordul elő a 4, 2001 és 2020 között egyszer sem. Ez összesen 200 előfordulás a tízesek helyén. Hasonlóképp a százas helyiértéken 200-szor szerepel a 4. Bea összességében $202 + 200 + 200 = 602$-szer írja le a 4-es számjegyet. Ugyanez a helyzet az 5-tel és a 7-tel is.

Következésképp Bea 6977 számjegyet ír le, melyek közül $3 \cdot 602 = 1806$ a 4, 5 és 7 számok egyike. Tehát összesen $6977 + 1806 = 8783$ tollvonást használ.

28. feladat Az alábbi táblázatot ki akarjuk tölteni az $1, 1, 2, 2, \ldots, 8, 8$ számokkal, úgy, hogy minden n szám esetén pontosan n darab egyéb cella legyen n két előfordulása között. Három számot már beírtunk:

					6	7		2							

Írjátok be a többi számot a szabályok szerint. A szürkével jelölt részen lévő négyjegyű szám adja a feladat megoldását. Egy példa, az $1, 1, 2, 2, 3, 3$ számokkal helyesen kitöltve:

3	1	2	1	3	2

Eredmény: 3845

Megoldás: A jelölés könnyebbsége érdekében a megadott táblázatot egy tizenhat elemből álló f sorozatnak tekintjük. A három megadott elem, vagyis $f(6) = 6$, $f(7) = 7$, $f(9) = 2$ alapján egyenként megkapjuk, hogy $f(13) = 6$, $f(15) = 7$ és $f(12) = 2$.

					6	7		2			2	6		7	

Alapvetően két megoldási módszer létezik: vagy azt nézzük meg, hogy egy adott számpár hova kerülhet, vagy azt, hogy egy adott cellába melyik számok kerülhetnek (a Sudokuhoz hasonlóan).

Példaképp nézzük meg, hogy a két 3-as számot hogy írhatjuk be a táblázatba. Három lehetőség létezik: $f(1) = f(5) = 3$ vagy $f(4) = f(8) = 3$ vagy $f(10) = f(14) = 3$.

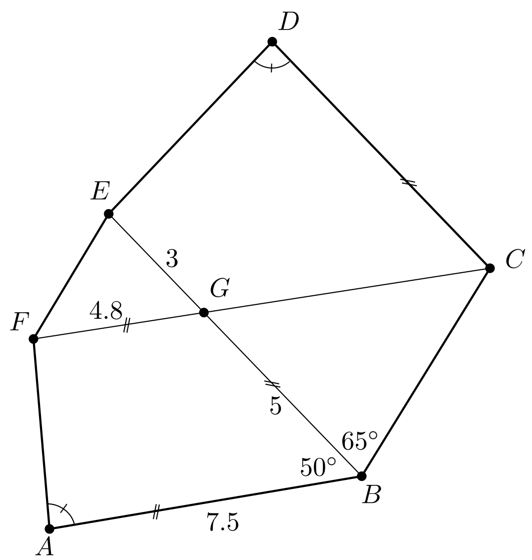
Beláthatjuk, hogy az $f(10) = f(14) = 3$ megoldás esetén egyedül $f(16) = 4$ kerülhet az $f(16)$-os cellába és emiatt $f(11) = 4$. Viszont így már sehogy sem tudnánk beírni a két 8-ast a táblázatba. Az $f(4) = f(8) = 3$ megoldás két lehetőséget ad az 5-ös számpár elhelyezésére: $f(5) = f(11) = 5$ vagy $f(10) = f(16) = 5$. Mindkét lehetőség azonnali ellentmondást eredményez.

Az $f(1) = f(5) = 3$ megoldás egyetlen lehetőséget hagy az $f(2) = f(11) = 8$ elhelyezésére, így a maradék cellákat csak egyféleképp tudjuk kitölteni a szabálynak megfelelően: $f(4) = f(10) = 5$, $f(3) = f(8) = 4$ és $f(14) = f(16) = 1$.

3	8	4	5	3	6	7	4	2	5	8	2	6	1	7	1

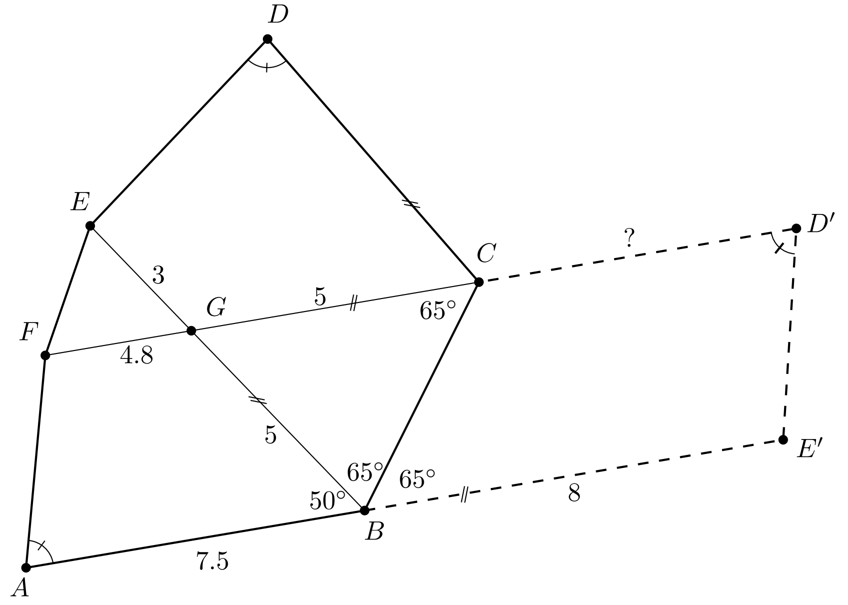
Tehát az egyetlen megoldásból származó négyjegyű megoldás a 3845.

29. feladat Az $ABCDEF$ konvex hatszög BE és CF átlói a G pontban metszik egymást. Ahogy az ábra is mutatja, $AB = 7{,}5$, $BG = 5$, $GE = 3$, $GF = 4{,}8$, $BAF\sphericalangle = CDE\sphericalangle$, $ABG\sphericalangle = 50°$, $CBG\sphericalangle = 65°$, továbbá AB párhuzamos CF-fel és CD párhuzamos BE-vel. Határozzátok meg a CD szakasz hosszát.



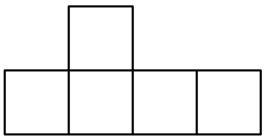
Eredmény: $5.7 = \frac{57}{10}$

Megoldás:



Mivel $50^\circ + 65^\circ + 65^\circ = 180^\circ$ és van két-két egymással párhuzamos szakasz, a feladatban lévő hatszöget megkapjuk, ha az $AE'D'F$ paralelogrammát összehajtjuk a BC szakasz mentén (mivel $BAF\sphericalangle = CDE\sphericalangle$, így valóban paralelogramma; lásd az ábrát). Ezzel megegyező eredményt kapunk, ha a D és E csúcsokat a BC szakasz egyenesére tükrözzük. Ha ezek mellett megfigyeljük, hogy BCG egyenlő szárú háromszög, az oldalhossz-feltételekből következik, hogy $CD = AB + BE' - CF = AB + EG - FG = 5.7$.

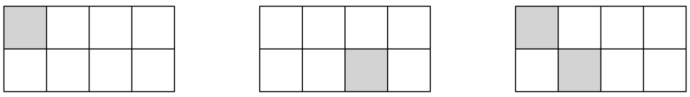
30. feladat Nóra és Sára *Torpedót* játszanak. Egyéb hajók mellett mindkettőjüknek van egy-egy ilyen alakú helipados cirkálója is:



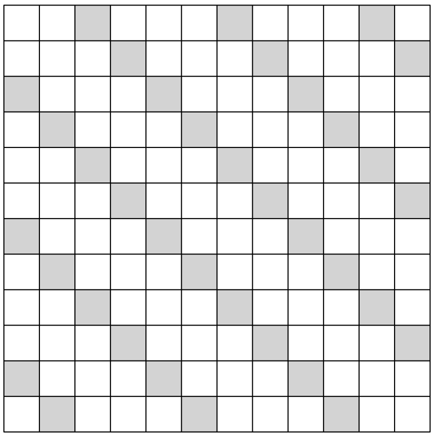
Nóra elrejti a cirkálót valahol a 12×12 -es játéktáblán. Papíron és ceruzával játsszák a játékot, így a fentebbi formát szabad elforgatni vagy tükrözni. Legalább hányször kell Sárának lőnie (azaz egy mezőt megtippelnie) hogy biztosan eltalálja Nóra cirkálóját legalább egyszer?

Eredmény: 36

Megoldás: Nézzünk meg egy 4×2-es táblarészt. Ahogy az első két ábrán látszik, egy mező megjelölése még nem jelent biztos találatot, mivel még egy módon el lehet helyezni a cirkálót, hogy ne érje találat. Továbbá egyértelmű, hogy ha egy mezőt választunk az egyik sorban és egyet a másikban, akkor lehetetlen elrejteni a cirkálót ezen a táblarészen; a harmadik ábra ezt szemlélteti. Tehát minden 4×2-es táblarészen szükség van legalább két lövésre, vagyis összesen legalább $18 \cdot 2 = 36$-ot kell lőnie Sárának.



Alternatív megoldásként az alábbi átlós lövésmintázat a 12×12-es játéktáblán szintén jó szemlélteti, hogy 36 lövés elégséges ahhoz, hogy Sára legalább egyszer eltalálja a cirkálót.



31. feladat Egy adott a pozitív egész szám alapján rajzolhatunk egy ABC hegyesszögű háromszöget úgy, hogy $BC = a$ és a h_b, h_c magasságvonalak hossza is egész szám. A lehetséges háromszögek közül a legnagyobb területe 101,4. Mi az a értéke?

Eredmény: 13

Megoldás: Mivel ABC hegyesszögű, beláthatjuk, hogy a $T = \frac{1}{2}ah_a$ terület maximalizálásához a h_b és h_c magasságoknak a lehető leghosszabbnak kell lenniük. Így $h_b = h_c = a-1$, ezáltal ABC egyenlő szárú. Nevezzük a BC oldal felezőpontját M-nek és a h_c magasságvonal talppontját C_0-nak. Ha a Pitagorasz-tételt alkalmazzuk az $ABM \sim CBC_0$ hasonló derékszögű háromszögekre, megkapjuk, hogy

$$101{,}4 = T = \frac{1}{2}ah_a = \frac{a^2(a-1)}{4\sqrt{2a-1}}.$$

Mivel 101,4 racionális szám, $2a-1$-nek mindenképp páratlan négyzetszámnak kell lennie, $(2k+1)^2$ alakban, ahol $k \geq 0$ egész szám, és így $a = \frac{(2k+1)^2+1}{2} \in \{1, 5, 13, 25, 41, \dots\}$. Az első néhány értéket behelyettesítve észrevehetjük, hogy a terület szigorúan növekszik a növelésével, és megtalálhatjuk, hogy a helyes megoldás $a = 13$.

32. feladat Ludwig vett 1000 pozitív egész számot, melyek összege 1 200 500. Ha növekvő sorrendbe rakja ezeket a számokat, akkor a szomszédos számok különbsége mindig 2 vagy 7 lesz. A legkisebb szám értéke 101. Ludwig most maximalizálni akarja a legnagyobb számot úgy, hogy az eddigi feltételek mindegyike továbbra is igaz legyen. Mennyi ennek a számnak a maximális értéke?

Eredmény: 3099

Megoldás: Jelöljük $n_1 = 101, n_2, \dots, n_{1000}$-rel ezt a pozitív egsézekből álló sorozatot. Feltéve, hogy két szomszédos szám közötti különbség mindig 2, azt kapjuk, hogy $n_{1000} = 101 + 2 \cdot 999 = 2099$ és $\sum_{i=1}^{1000} n_i = 2200 \cdot 500 = 1\,100\,000$. Tehát a Ludwig által kapott összeg és a lehető legkisebb összeg közötti különbség $100500 = 20100 \cdot 5$. Ha $n_{i+1} - n_i = 7$, kettő helyett, akkor az összeg $(1000 - i) \cdot 5$-tel nő, n_{1000} pedig öttel nő. Ezért ahhoz, hogy maximalizáljuk n_{1000}-t, de az összeg továbbra is 1 200 500 legyen, a 7-es távolságokat a lehető legnagyobb sorszámú tagok között kell elhelyeznünk. Tehát Ludwig hétre állítja a távolságot $n_{i+1} - n_i$ között, ahol $i = 800, \dots, 999$ (az összes többi helyen a távolság továbbra is 2) és így megkapja n_{1000} lehető legnagyobb értékét: $n_{1000} = 101 + 2 \cdot 999 + 200 \cdot 5 = 3099$.

33. feladat Mi a legkisebb pozitív egész, amelyet le tudunk írni csak a 2 és 9 számjegyek segítségével, páratlan sok számjegye van, és osztható 11-gyel?

Eredmény: 29 292 929 292

Megoldás: Vegyük észre, hogy $100 \equiv 1 \pmod{11}$. Emiatt egy számot 100-zal szorozva nem változik meg a 11-es maradéka. Ha egy szám tartalmaz két egymást követő azonos a számjegyet, akkor felírható $x \cdot 10^{n+2} + 11a \cdot 10^n + y$ alakban, amiből kitörölve ezt a két számjegyet $x \cdot 10^n + y$-t kapunk, amelynek ugyanaz a 11-es maradéka, mint az eredeti számnak.

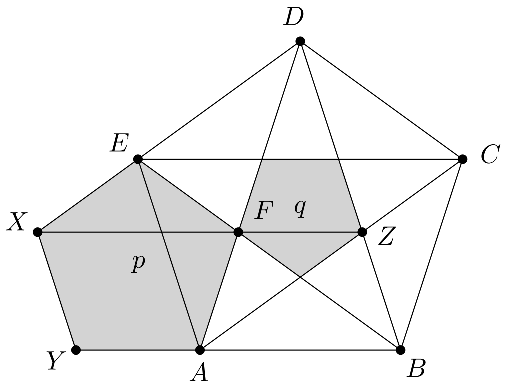
Tehát a keresett válaszban nem szerepel két egymást követő kettes vagy kilences, különben törölnénk őket és kisebb számot kapnánk. Szóval próbáljuk ki a $2929\cdots292$ vagy $9292\cdots929$ alakú számokat, amíg el nem érünk egy 11-gyel oszthatót.

Segít a válaszban, ha ismerjük a 11-gyel való oszhatóság kritériumát. Egy szám akkor és csak akkor osztható 11-gyel, ha a páros helyiértéken álló számjegyek összegéből kivonva a páratlan helyiértéken álló számjegyek összegét, 11-gyel osztható számot kapunk. Mivel felváltva használjuk a 2-eseket és 9-eseket, keressük a legkisebb n-t amelyre $2n - 9(n+1)$ vagy $9n - 2(n+1)$ 11 többszöröse. Mindkét esetben $n = 5$ megfelelő, tehát 29 292 929 292 és 92 929 292 929 jó jelöltek. A kettő közül a kisebb számot választjuk.

34. feladat Legyen $ABCDE$ egy szabályos ötszög, és F az AD és BE átlók metszéspontja. Az AFE egyenlő szárú háromszöget kiegészíthetjük $AFEXY$ szabályos ötszöggé, jelöljük ezt az ötszöget p-vel. Szerepel az ábrán egy másik ötszög, q, amelynek a csúcsai az $ABCDE$ ötszög átlóinak metszéspontjai. Feltéve hogy $AF = 1$, mekkora a legnagyobb távolság p egy csúcsa és q egy csúcsa között?

Eredmény: $(3+\sqrt{5})/2 \doteq 2.61803$

Megoldás: Vegyük észre, hogy a p és q ötszögek párhuzamosan hasonlóak az F pontra tükrözve (és nagyítva), így az X és Z pontok közti szakasz áthalad az F ponton. Ez a szakasz az egyik lehetőség a kettőből, ha a p és q ötszögek egy-egy csúcsa közti legnagyobb távolságot keressük.



Az egyes csúcsokban lévő szögek értékét végigkövetve a következőkre juthatunk: (1) $AFE\sphericalangle = 108°$, így a koszinusztörvény miatt $AE = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$; (2) az AFZ, XFD, DFE háromszögek egyenlő szárúak. Tehát

$$XF = DF = DE = AE = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})$$

és

$$ZF = AF = 1.$$

Vagyis a keresett távolság $XF + ZF = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$.

35. feladat Vegyük az összes olyan, prímekből álló (a, b, c) számhármast, amely megoldása az alábbi egyenletnek:

$$175a + 11ab + bc = abc.$$

Mi c összes lehetséges értékének az összege?

Eredmény: 281

Megoldás: Az egyenletet át tudjuk alakítani erre: $a(bc - 11b - 175) = bc$. Ebből következik, hogy $a = b$ vagy $a = c$, mivel ezek prímek. Az első esetben $ac - 11a - 175 = c \Leftrightarrow (a-1)(c-11) = 186$, amiből a $(2, 2, 197)$ az egyenlet megoldása a prímek körében. A másik esetben $ab - 11b - 175 = b \Leftrightarrow 175 = b(a-12)$, amiből az alábbi két megoldást kapjuk a prímek körében: $(47, 5, 47)$ és $(37, 7, 37)$. Vagyis a lehetséges c értékek összege: $197 + 47 + 37 = 281$.

36. feladat Tamás és Mária venni szeretnének egy házat. A tökéletes helyet keresik, de eltérő definícióik vannak arról, hogy mi is a ,,tökéletes”. Találtak már 10 lehetséges házat, és az alábbi döntési módszert dolgozták ki: mind a ketten véletlenszerűen sorba rendezik a házakat (döntetlen nem megengedett). Ha pontosan egy házra igaz, hogy a legjobb három között van Tamás és Mária listájában is, akkor ezt a házat választják. Mekkora az esélye annak, hogy ez a módszer sikeres?

Eredmény: $\frac{21}{40}$

Megoldás: Mária bármely sorrendje esetén az kell nekünk, hogy Tamásnak a 3 legjobb háza közül pontosan egy legyen Mária 3 legjobb háza közt, a másik kettő pedig Mária sorrendjében a 4. és a 10. közt. Mária bármely sorrendje esetén, Tamás esélye

$$\frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{7}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{21}{40}.$$

37. feladat Definiáljuk az alábbi polinomokat:

$$p(x) = ax^{2021} + bx^{2020} + \cdots + ax^{2k-1} + bx^{2k-2} + \cdots + bx^2 + ax + b$$

és

$$q(x) = ax^2 + bx + a,$$

ahol a és b pozitív valós számok. Tudjuk, hogy $q(x)$-nek pontosan egy valós gyöke van. Keressük meg $p(x)$ összes valós gyökének összegét.

Eredmény: -2

Megoldás: A $p(x)$ polinomot az alábbi szorzattá tudjuk bontani $(ax+b)(x^{2020} + x^{2019} + \cdots + x^2 + 1)$, ahol a második tag pozitív, így az $x = \frac{-b}{a}$ lesz a $p(x)$ polinom egyetlen valós gyöke.

Mivel a $q(x)$ polinomnak egy gyöke van, ezért a diszkrimináns $b^2 - 4a^2 = 0$, és mivel a, b pozitív, ezért $b = 2a$. Vagyis $x = \frac{-b}{a} = \frac{-2a}{a} = -2$.

38. feladat Keressétek meg az összes p prímszám összegét, amelyre létezik olyan pozitív egész n, hogy $\frac{n}{p}$ tizedestört alakban kifejtve ismétlődő, és a legrövidebb ismétlődési ciklusa 5 hosszú.

Eredmény: 312

Megoldás: Feltételezhetjük, hogy $n < p$ és hogy az $\frac{n}{p}$ tizedestört alakja 5 jegyenként ismétlődik rögtön a tizedesjegy után. (Ha $\frac{n}{p}$ csak *később* lesz ismétlődő, akkor elcsúsztathatjuk a tizedesjegyet úgy, hogy n-t megszorozzuk 10 megfelelő hatványával, majd, ha így $n \geq p$, akkor lecseréljük $n' < p$-re, ahol $n = kp + n'$: ez mindössze "kitörli" a szám egészrészét.) Ha az $\frac{n}{p}$ ismétlődő tizedestört alakja $0.\overline{ABCDE}$, akkor $99999 \cdot \frac{n}{p} = 10^5 \cdot \frac{n}{p} - \frac{n}{p} = ABCDE$ egész szám. Mivel $n < p$ és p prímszám, következik, hogy $p \mid 99999$, vagyis $p \mid 3^2 \cdot 41 \cdot 271$. Mind 1/3-nak, mind 2/3-nak egyjegyű az ismétlődési ciklusa, viszont $1/41 = 0.\overline{02439}$ és $1/271 = 0.\overline{00369}$ megfelelnek a kitételnek, így a végeredmény $41 + 271 = 312$.

39. feladat Négy ember ül egy teremben, mindegyikük pontosan három nyelven beszél e közül az öt nyelv közül: cseh, német, angol, lengyel, magyar. Más nyelven nem beszélnek. Könnyen látható, hogy 10000-féleképp rendelhetjük a nyelveket az emberekhez. Ezen belül hány olyan kimenet van, amelyben valaki előadást tud tartani nekik egy olyan nyelven, amit mind megértenek?

Eredmény: 5680

Megoldás: $10 = \binom{5}{3}$ olyan kimenet létezik, ahol mindannyian ugyanazt a három nyelvet beszélik. Ahhoz, hogy legalább két közös nyelvük legyen, $10 = \binom{5}{2}$-féleképp választhatjuk ki ezt a két nyelvet, majd 3^4 módon választhatjuk ki a négy ember harmadik nyelvét. Ha azt akarjuk, hogy legalább egy közös nyelvük legyen, $5 = \binom{5}{1}$-féleképp választhatjuk ki az egy közös nyelvet, majd $\binom{4}{2}^4 = 6^4$ módon választhatjuk ki a négy ember két-két másik nyelvét. A szitaformulát alkalmazva megkapjuk a keresett eredményt, ami $5 \cdot 6^4 - 10 \cdot 3^4 + 10 = 6480 - 810 + 10 = 5680$.

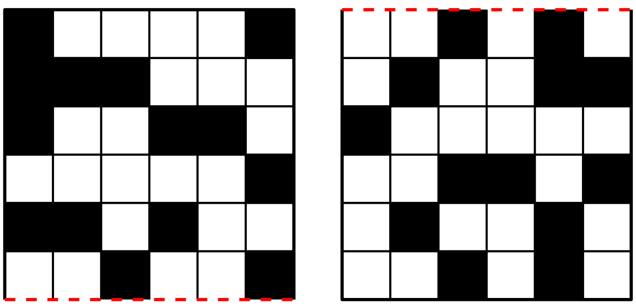
40. feladat Juli leírja az összes olyan törtszámot, amelynek a számlálója és a nevezője is 100-nál nem nagyobb egész szám, utána törli azokat, amelyek egyszerűsíthetők. A megmaradó számokat növekvő sorrendbe rendezi. Juli listájában melyik szám szerepel közvetlenül $\frac{2}{3}$ előtt?

Eredmény: $\frac{65}{98}$

Megoldás: Olyan törtszámokkal kell próbálkoznunk, amelyeknek a lehető legnagyobb a nevezője, mert ha $\frac{a}{b}$ kisebb, mint $\frac{2}{3}$, akkor $\frac{a+2}{b+3}$ nagyobb, mint $\frac{a}{b}$, viszont kisebb, mint $\frac{2}{3}$. Ez azt jelenti, hogy a 98, 99 és 100 nevezőkkel érdemes próbálkozni. A lehetséges megoldások tehát $\frac{65}{98}$, $\frac{65}{99}$ és $\frac{66}{100} = \frac{33}{50}$. Ha összehasonlítjuk ezeket a törteket, megkapjuk, hogy

$$\frac{65}{99} < \frac{33}{50} < \frac{65}{98} < \frac{2}{3}.$$

41. feladat Egy $6 \times 6 \times 6$-os rácsban huszonhárom fekete egységkockát helyeztünk el. Az ábra mutatja, hogy hogy néz ki felülről (balra) és elölről (jobbra). Egy fehér mező azt mutatja, hogy abban az oszlopban nincsen fekete kiskocka. A két ábrázolt lap közös élét pirossal jelöltük. Határozzátok meg a fekete alakzat felszínét.



Eredmény: 130

Megoldás: A fekete alakzat felszíne megyezik a fekete kockák felszínével mínusz kétszer azok a lapok, ami két fekete kockának a határa. Ezek a párok háromféleképpen állhatnak: "fel-le", "elöl-hátul" és "balra-jobbra". A "balra-jobbra" párok esetén, a két fekete kocka elölről és felülről nézve is egy-egy vízszintesen érintkező oldalpárt alkot, melyek azonos oszlopokban szerepelnek a két vetület esetén. Végignézve az oszlopokat láthatjuk, hogy ilyen nem fordul elő. Az "elöl-hátul" érintkezéshez a bal oldali négyzetben kell két négyzetnek függőlegesen érintkeznie. Ez kétszer fordul elő az első oszlopban. Mivel a jobb oldali ábrán az első oszlopban csak egyetlen fekete négyzet van, így tudjuk, hogy ez a két érintkezés a nagy kockában is két érintkezés lesz. A "fel-le" párok esetén az előzőhöz hasonló esetet kapunk, csak a két ábrát felcserélve kell nézni (ekkor az ötödik oszlopban lesz két érintkezés, amik valóban érintkezés lesz, mivel a felülről nézve csak egy kocka szerepel az ötödik oszlopban). Összesítve a kérdéses felszín mérete $6 \cdot 23 - 2 \cdot 4 = 130$.

42. feladat Nevezzük egy N pozitív egész szám *osztó felbontásának* az alábbit: $d_1, d_2, \ldots, d_k$ pozitív egészek sorozata, ahol $k \geq 1$, $d_1 \neq 1$, és a $d_1 \mid d_2 \mid d_3 \mid \cdots \mid d_k \mid N$ oszthatóságok teljesülnek, továbbá $d_1 \cdot d_2 \cdot \cdots \cdot d_k = N$. Ekkor a d_k számot nevezzük az *osztó felbontás vezetőjének*. A 720 összes lehetséges osztó felbontásának vezetőinek mi a számtani közepe?

Eredmény: 204

Megoldás: Tudjuk, hogy $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$. A $d_1, d_2, \ldots d_k$ sorozatban bármely p prím kitevői monoton növekvő sorozatot alkotnak, melyek összege p kitevője 720 prímtényezős alakjában. Ez a sorozat $p = 2$ esetében lehet $(1,1,1,1)$, $(1,1,2)$, $(2,2)$, $(1,3)$, (4), vagy ezek közül bármelyik tetszőleges számú nullával az elején. 3 esetében lehetséges véggződése a sorozatnak $(1,1)$ vagy (2), 5 esetében pedig csak az (1). Ezen sorozatok bármelyik kombinációjával osztó felbontást kapunk. Vagyis 720-nak összesen 10 osztó felbontása létezik és ezek vezetőinek számtani közepe $\frac{2+4+4+8+16}{5} \cdot \frac{3+9}{2} \cdot 5 = 204$.

43. feladat A Scrabboj játék egy 5×1-es táblából és egy zsáknyi megkülönböztethető betűkockából áll. A kockák mindegyikén pontosan egy szerepel a N, A, B, O, J betűk közül. Hányféle olyan különböző Scrabboj játékcsomag létezik, amelynek a betűkockáiból pontosan 1440-féleképp lehet kirakni a $NABOJ$ szót?

Eredmény: 9450

Megoldás: Legyen a N, A, B, O, J betűkkel ellátott játékkockák száma egyenként n, a, b, o, j. Azoknak a (n, a, b, o, j) ötös számcsoportoknak a számát keressük, amelyekre igaz, hogy

$$naboj = 1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Mindegyik prímtényezőt szétoszthatjuk a n, a, b, o, j számok közt és különféle felosztások különféle ötös számcsoportokat eredményeznek. Összesen

$$\binom{5}{1} + \binom{5}{2} \cdot 2 + \binom{5}{2} \cdot 2 + \binom{5}{3} \cdot 3 + \binom{5}{3} \cdot 3 + \binom{5}{4} \cdot 4 + \binom{5}{5} = 126$$

módon tudjuk szétosztani a 2-eseket, ami rendre a prímtényező 5-ös kitevőjének az alábbi felosztásaival egyezik meg: 5, $4+1$, $3+2$, $3+1+1$, $2+2+1$, $2+1+1+1$, $1+1+1+1+1$. Továbbá

$$\binom{5}{1} + \binom{5}{2} = 15$$

módon tudjuk szétosztani a 3-asokat, ami a kitevő 2 és $1+1$ felosztásaival egyezik meg. Végül pedig

$$\binom{5}{1} = 5$$

módon oszthatjuk ki az 5-ös prímtényezőt. Ez összességében

$$126 \cdot 15 \cdot 5 = 9450$$

különböző Scrabboj játékcsomag.

44. feladat Melyik a legnagyobb n pozitív egész szám, amelyre $4^{2021} + 4^n + 4^{3500}$ négyzetszám?

Eredmény: 4978

Megoldás: Beláthatjuk, hogy az összeadás mindhárom tagja tökéletes négyzet, hiszen $4 = 2^2$. Így ha kiválasztunk közülük kettőt és négyzetre emeljük az összegüket, akkor megkaphatjuk pl. a következőt:

$$(2^{2021} + 2^n)^2 = 4^{2021} + 2 \cdot 2^{2021} \cdot 2^n + 4^n = 4^{2021} + 2^{2022+n} + 4^n.$$

Ha ezt a kifejezést megfeleltetjük a feladatban szereplő egyenlettel, akkor arra jutunk, hogy

$$4^{3500} = 2^{2022+n} \qquad \iff \qquad n = 4978$$

és erre az értékre mindenképp tökéletes négyzetet kapunk. A három tag közül még kétféleképp lehet kettőt kiválasztani, ha ezeken elvégezzük ugyanezeket a lépéseket, akkor $n = 541$-et és $n = 2761$-et kapunk. Így feltételezhetjük, hogy az $n = 4978$ a keresett megoldás. Ennek bebizonyításához mutassuk meg, hogy $4^{2021} + 4^n + 4^{3500}$ nem tökéletes négyzet, ha $n = 4978 + m$, ahol m pozitív egész szám. A

$$4^{2021} + 4^{3500} + 4^{4978+m} = 4^{2021} \cdot (1 + 4^{1479} + 4^{2957+m})$$

kifejezés akkor és csak akkor tökéletes négyzet, ha $(1 + 4^{1479} + 4^{2957+m})$ is tökéletes négyzet, mivel $4^{2021} = \left(2^{2021}\right)^2$. Viszont a

$$\left(2^{2957+m}\right)^2 = 4^{2957+m} < 1 + 4^{1479} + 4^{2957+m} = 1 + 2^{2958} + 4^{2957+m} < 1 + 2 \cdot 2^{2957+m} + 4^{2957+m} = \left(2^{2957+m} + 1\right)^2$$

kifejezésből látszik, hogy a második tényező biztosan két egymást követő négyzetszám között van. Ezért $n = 4978$ a keresett megoldás.

45. feladat

$$P(x) = \prod_{i=2}^{2021} (x^i + (-1)^i i) = (x^2 + 2)(x^3 - 3)(x^4 + 4) \cdots (x^{2021} - 2021)$$

A fentebbi polinom hány együtthatója pozitív (szigorúan nagyobb, mint nulla)?

Eredmény: 1021616

Megoldás:

Vegyük a

$$Q(x) = P(-x) = (x^2 + 2)(-x^3 - 3)(x^4 + 4) \cdots (-x^{2021} - 2021) = (-1)^{1010}(x^2 + 2)(x^3 + 3)(x^4 + 4) \cdots (x^{2021} + 2021)$$

polinomot és lássuk be, hogy minden nem nullával egyenlő együtthatója pozitív. Azt állítjuk, hogy ezek az együtthatók pontosan megegyeznek az x^k kitevőivel, ahol k értéke a lehető legkisebbtől, vagyis 0-tól, a legnagyobbig, vagyis $S := 2 + \cdots + 2021 = 2043230$-ig terjed, kivéve pontosan két értéket: 1 és $S - 1$. Ha elképzeljük a Q-t definiáló 2020 tag szorzatát, világos, hogy nincs benne lineáris tag, és ugyanez mondható el az x^{S-1}-ről is: ha mindegyik zárójelből kiválasztjuk az x-ek kitevőjét, megkapjuk x^S-t, máskülönben a kitevő legfeljebb $S - 2$.

Most azt kell bebizonyítanunk, hogy a fenti tartományban az összes többi kitevő pozitív együtthatóval van jelen, vagy ezzel ekvivalensen azt, hogy a legkisebb 1-nél nagyobb szám, ami nem felírható a $\{2, 3, \ldots, 2021\}$ egy részhalmazának összegeként (nevezzük ezt a számot m-nek) egyenlő $S - 1$-el. Azt állítjuk, hogy

$$m - 1 = k + (k + 1) + \ldots + 2021$$

valamely $k = 2, 3, \ldots, 2021$ értékre. Ebből világosan látszik, hogy $m \geq 3$ és így lehetségesnek kell lennie, hogy $m - 1$-et felírjuk $\{2, 3, \ldots, 2021\}$ egy részhalmazának összegeként. Továbbá a $\{k, k + 1, \ldots, 2021\}$-en kívüli összes részhalmazban elég az összeg egyik tagjának értékét megnövelni 1-el ahhoz, hogy megkapjuk m lehetséges értékét. Emellett tudjuk, hogy $k \leq 3$, mivel máskülönben

$$2 + (k - 1) + (k + 1) + \ldots + 2021$$

kifejezheti m-et. Ezért $m = 1 + 3 + 4 + \ldots + 2021 = S - 1$. Következésképp $Q(x)$-nek $\frac{S}{2} + 1$ pozitív együtthatója van az x páros kitevőiből és $\frac{S}{2} - 2$ pozitív kitevője az x páratlan kitevőiből. Az eredeti $P(x)$ polinomnak ellentétes előjelűek a páratlan kitevőihez tartozó együtthatói, így pontosan $\frac{S}{2} + 1 = 1021616$ pozitív együtthatója van.

46. feladat A *Jövő Kockavárosának* térképe egy $4 \times 4 \times 4$-es kockaháló. Minden egész értékű koordinátákkal rendelkező pont egy kereszteződés, és az egymástól 1 egység távolságra lévő kereszteződéseket egyenes útszakasz köti össze. A város közepén lévő, $(2, 2, 2)$ koordinátájú kereszteződést útfelújítás miatt lezárták. Dávid a lehető legrövidebb úton szeretne eljutni a $(0, 0, 0)$ kereszteződésből a $(4, 4, 4)$ kereszteződésbe. Hány lehetséges útvonal közül választhat?

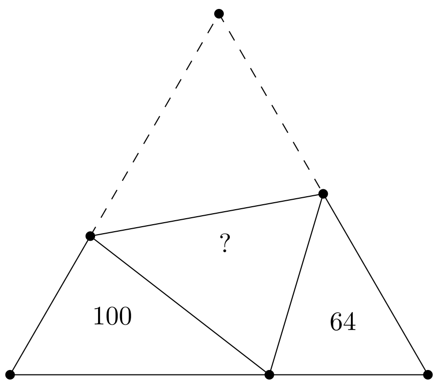
Eredmény: 26550

Megoldás: Először számoljuk meg, hány legövidebb út van, ha nincsen útlezárás. Hogy $(0, 0, 0)$-ból $(4, 4, 4)$-be jusson, Dávid 4 lépést tesz az x koordinátatengely irányába, 4 lépést az y irányba, és 4 lépést a z irányba. Ha bármikor „visszafele irányba" lép, akkor a kapott útvonal már nem lesz a lehető legrövidebb. Tehát $\frac{12!}{4! \cdot 4! \cdot 4!}$ lehetséges útvonal van.

Számoljuk meg, ezek közül hány útvonal megy át a $(2, 2, 2)$ kereszteződésen. $(0, 0, 0)$-ból $(2, 2, 2)$-be $\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$-féleképpen tud eljutni, és minden egyes útvonalat $\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$-féleképeen tud folytatni $(2, 2, 2)$-ből $(4, 4, 4)$-be. Tehát összesen $\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} \cdot \frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{6! \cdot 6!}{2^6}$ útvonalat találtunk.

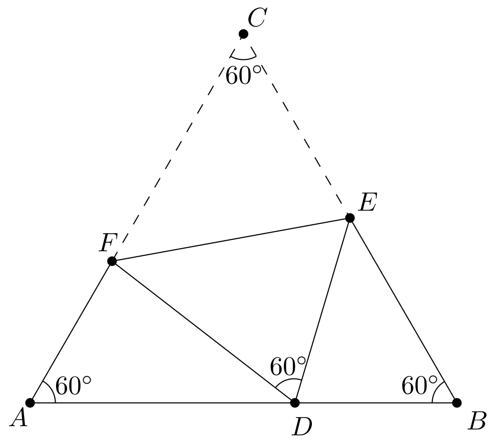
Ezek alapján azoknak az utaknak a száma, amelyek nem mennek át a $(2, 2, 2)$ kereszteződésen, $\frac{12!}{4!^3} - \frac{6!^2}{2^6} = 26550$.

47. feladat Egy szabályos háromszöget összehajtunk úgy, hogy az egyik csúcsa érinti a szemben lévő oldalt, és az így létrejött kettő, nem takarásban lévő háromszög területe 100 és 64, ahogy az ábra mutatja. Mennyi a harmadik háromszög területe?

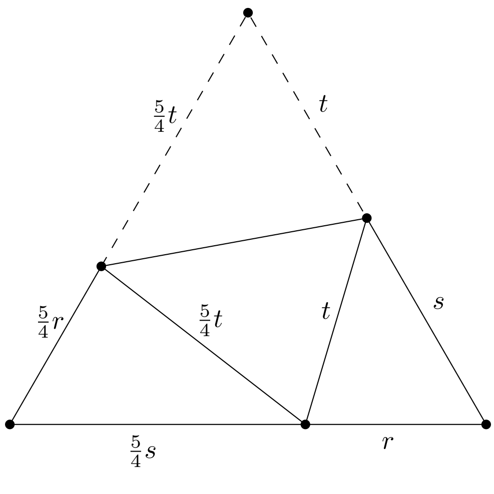


Eredmény: 98

Megoldás: Nevezzük el a pontokat az ábrán látható módon.



Mivel az ABC háromszög szabályos, $BDE\sphericalangle + DEB\sphericalangle = 120° = BDE\sphericalangle + FDA\sphericalangle$, azaz $DEB\sphericalangle = FDA\sphericalangle$. Emiatt az ADF és BED háromszögek hasonlóak. A két háromszög területeinek aránya $100 : 64$, így az egymásnak megfelelő oldalak aránya $5 : 4$. Ha az $r = DB$, $s = BE$, $t = ED$ hosszakat használjuk, az alábbi ábrát kapjuk:



Legyen a az eredeti szabályos háromszög oldalhossza, így az alábbi egyenleteket kapjuk

$$a = s + t \tag{2}$$

$$a = \frac{5}{4}(r + t) \tag{3}$$

$$a = \frac{5}{4}s + r \tag{4}$$

$$64 = \frac{1}{2}rs \cdot \sin 60° = rs \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}. \tag{5}$$

Az egyenletrendszer alapján $r = \frac{a}{3}$ és $s = \frac{8a}{15}$. Ezt visszahelyettesítva a (5) egyenletbe,

$$1440 = a^2\sqrt{3} = 4S$$

ahol S a szabályos háromszög területe. A keresett A területre teljesül, hogy $100 + 64 + 2A = 360$, tehát $A = 98$.

48. feladat Feldobunk egy szabályos kétoldalú érmét többször, egészen addig, míg a fej-írás-fej sorozat elő nem fordul. Mekkora a valószínűsége, hogy az írás-fej-írás-fej még nem fordult elő?

Eredmény: $\frac{5}{8}$

Megoldás: Nevezzük E-nek az az eseményt, amikor a fej-írás-fej sorozat (röviden FIF), előbb fordul elő, mint az $IFIF$ és legyen $P(E)$ ennek az eseménynek a valószínűsége. Legyen s a fej és írás fix véges sorozata, és jelöljük $P(E|s)$-sel annak a valószínűségét, hogy az E esemény olyan sorozatban fordul elő, ami s-sel kezdődik és véletlenszerűen folytatódik. Legyen $x = P(E|F)$ és $y = P(E|I)$. Mivel az érme szabályos, egy vagy két lépéssel továbbhaladva (úgy, hogy a legújabb eredményt mindig az adott sorozat legvégére írjuk) megkapjuk, hogy

$$x = \frac{1}{2}P(E|FF) + \frac{1}{4}P(E|FII) + \frac{1}{4}P(E|FIF) \tag{6}$$

és ennek mintájára három lépés után megkapjuk, hogy

$$y = \frac{1}{2}P(E|II) + \frac{1}{4}P(E|IFF) + \frac{1}{8}P(E|IFII) + \frac{1}{8}P(IFIF) \tag{7}$$

Mivel FIF és $IFIF$ váltakozó sorok, arra jutunk, hogy

$$\begin{aligned} x &= P(E|F) = P(E|FF) = P(E|IFF), \\ y &= P(E|I) = P(E|II) = P(E|FII) = P(E|IFII). \end{aligned}$$

Továbbá mivel $P(E|FIF) = 1$ és $P(E|IFIF) = 0$, a (6)-es és (7)-es egyenleteket az alábbi módon átírhatjuk:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{1}{4}, \\ y &= \frac{y}{2} + \frac{x}{4} + \frac{y}{8}. \end{aligned}$$

Ebből megkapjuk, hogy $x = \frac{3}{4}$ és $y = \frac{1}{2}$. A keresett valószínűség tehát $P(E) = \frac{1}{2}P(E|F) + \frac{1}{2}P(E|I) = \frac{x+y}{2} = \frac{5}{8}$.

49. feladat Melyik a legkisebb x pozitív valós szám, amelyre igaz a következő állítás? Létezik legalább egy olyan (s, t, u) pozitív valós számhármas, amelyre teljesül, hogy

$$\begin{aligned} s^2 - st + t^2 &= 12, \\ t^2 - tu + u^2 &= x, \end{aligned}$$

és nincs két ilyen tulajdonságú számhármas, amelyeknek csak az utolsó eleme különbözik.

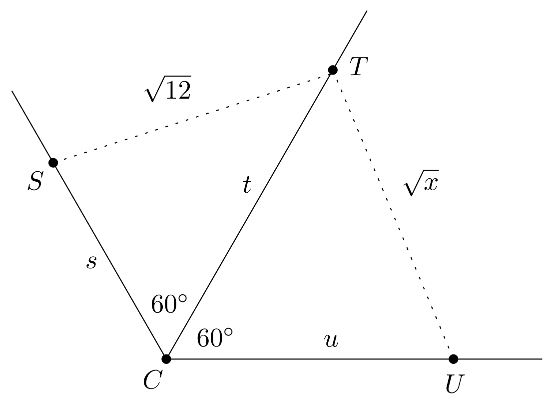
Eredmény: 16

Megoldás: Vegyük fel a síkban az S, T, U és C pontokat úgy, hogy $CS = s$, $CT = t$, $CU = u$ és

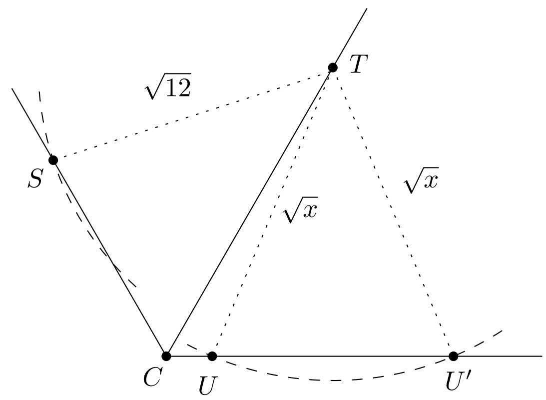
$$SCT\sphericalangle = TCU\sphericalangle = 60°,$$

ahogy az alábbi ábra mutatja. A koszinusztörvény ($\cos 60° = 1/2$) miatt a feladatban szereplő egyenletek alapján feltételezhetjük, hogy $ST^2 = 12$ és $TU^2 = x$. Mivel a T pont SC szakasztól való távolsága legfeljebb $\sqrt{12}$, és akkor és csak akkor egyenlő $\sqrt{12}$-vel, ha $TSC\sphericalangle = 90°$, megkapjuk, hogy

$$t \le \frac{\sqrt{12}}{\sin(60°)} = 4.$$



A következőkben rögzítsük a C pontot és a belőle kiinduló három félegyenest, és az S, T, U pontokat csak a hozzájuk tartozó félegyenesen mozgassuk! Ha $\sqrt{x} < 4$, akkor el tudjuk helyezni a TU szakaszt az UCT szög szárai közt (vagyis találhatunk megfelelő u és t értékeket) úgy, hogy $CU < CT \leq 4$, valamint $CUT\sphericalangle \neq 90°$ (ha az U pontot nagyon közel helyezzük a C ponthoz). Az első egyenlőtlenségből és a szögre vonatkozó megkötésből következik, hogy a T középpontú, $\sqrt{x}$ sugarú kör két pontban érinti a CU félegyenest, U-ban és U'-ben (lásd az alábbi ábrát), ami ellentmond az u különbözőségét tiltó feltételnek. A második egyenlőtlenség azt feltételezi, hogy a T középpontú, $\sqrt{12}$ sugarú kör legalább egy pontban érinti a CS félegyenest, ami az S pont. Ez a két megállapítás arra utal, hogy $x \geq 4$.



$\sqrt{x} = 4$-re (és bármely más fix $\sqrt{x} \geq 4$ értékre), illetve bármely $0 < t \leq 4$-re csak egy ilyen U érintőpont létezik, és így az említett megkötés teljesül. A fentiek mintájára a T középpontú, $\sqrt{12}$ sugarú kör legalább egy S pontban érinti a CS félegyenest, és az ebből adódó $(s, t, u) = (CS, CT, CU)$ számhármas behelyettesíthető az egyeenletrendszerbe, hogy megkapjuk x-et. Ebből következik, hogy a lehető legkisebb x érték, ami megfelel a feltételeknek, $4^2 = 16$.

Megjegyzés: Alternatív megoldásként a geometriai érvelés helyett vizsgálhatjuk a másodfokú egyenlet megoldásainak számát meghatározó diszkriminánst is.

50. feladat Hány olyan $x \in \{1, 2, 3, \ldots 2020\}$ szám van, amelyre lehetséges, hogy Markó összeadott 2020 egymást követő nemnegatív egész számot, és Misi összeadott $2020 + x$ egymást követő nemnegatív egész számot, és ugyanazt az eredményt kapták?

Eredmény: 1262

Megoldás: Legyen n Markó összegének első tagja és m Misi összegének első tagja. Így

$$2020n + \frac{2019 \cdot 2020}{2} = (2020 + k)m + \frac{(2019 + x)(2020 + x)}{2},$$

$$2020(n - m) = x\frac{2m + 2019 + 2020 + x}{2}.$$

Azt kell megmutatnunk, hogy mindegyik páratlan x-re léteznek ilyen n, m értékek, valamint minden olyan páros x-re is, ami osztható 8-cal. Legyen $x := 2k + 1$:

$$0 \equiv 2020(n - m) = (2k + 1)\frac{2m + 2019 + 2020 + 2k + 1}{2} \equiv (2k + 1)\frac{2m + 2k}{2} = (2k + 1)(m + k) \pmod{2020}$$

Ez az m bármely k értékre $m = 2020 - k$ és a következő egyenlet teljesül:

$$2020(n - 2020 + k) = (2k + 1)\frac{4040 - 2k + 2019 + 2020 + 2k + 1}{2} = (2k + 1)\frac{8080}{2} = (2k + 1)(4040),$$

$$(n - 2020 + k) = 2(2k + 1),$$

$$n = 2020 - k + 4k + 2 = 2020 + 3k + 2.$$

Ezért a $(2020 + 3k + 2; 2020 - k)$ számpárra létezik ilyen x érték, és ez az érték $x = 2k + 1$. Az $x = 8k$-ra pedig a következő lesz igaz:

$$2020(n - m) = 8k\frac{2m + 2019 + 2020 + 8k}{2} = 4k(2m + 2019 + 2020 + 8k)$$

$$0 \equiv 505(n - m) = k(2m + 2019 + 2020 + 8k) \equiv k(2m + 8k - 1) \pmod{505}.$$

Beláthatjuk, hogy vagy $k \equiv 505$ vagy $2m + 8k - 1 \equiv 505$. Mivel k lehet bármely 2020/8-nál kisebb nemnegatív egész szám, a $2m + 8k - 1 \equiv 505$ lesz igaz, így $2m = 505(2l + 1) - 8k + 1$ és $m = 505l + 253 - 4k$, ahol l értéke bármi lehet, amivel m pozitív értéket vesz fel: $l \in \{0, 1, 2\}$. Az n értékét a következőképp kapjuk meg:

$$505(n - 505l - 253 + 4k) = k(1010l + 506 - 8k + 2019 + 2020 + 8k) = 505k(2l + 9),$$

$$n - 505l - 253 + 4k = k(2l + 9),$$

$$n = k(2l + 9) + 505l + 253 - 4k.$$

Most pedig azt kell bebizonyítanunk, hogy bármely x-re, amelyre igaz, hogy $2|x$ és $8 \nmid x$, nem létezik megfelelő (n, m) megoldás. Legyen $x = 2k$, ahol k páratlan egész.

$$2020(n - m) = 2k\frac{2m + 2019 + 2020 + 2k}{2} = k(2m + 2019 + 2020 + 2k)$$

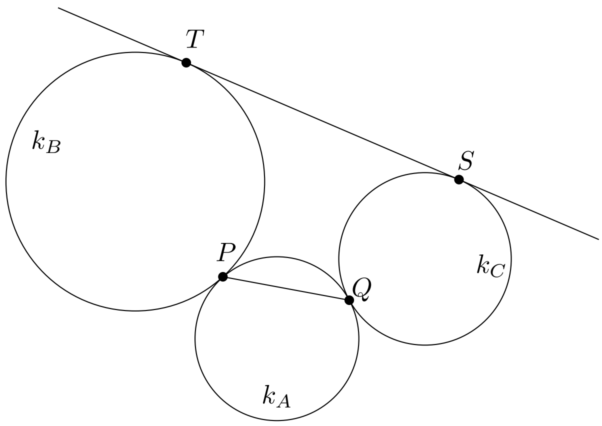
Az egyenlet bal oldala osztható 4-gyel, a jobb oldala viszont nem, mivel $2m + 2020 + 2k + 2019$ páratlan. Legyen $x = 4k$, ahol k páratlan egész.

$$2020(n - m) = 4k\frac{2m + 2019 + 2020 + 2k}{2} = 2k(2m + 2019 + 2020 + 4k),$$

$$1010(n - m) = k(2m + 2019 + 2020 + 4k),$$

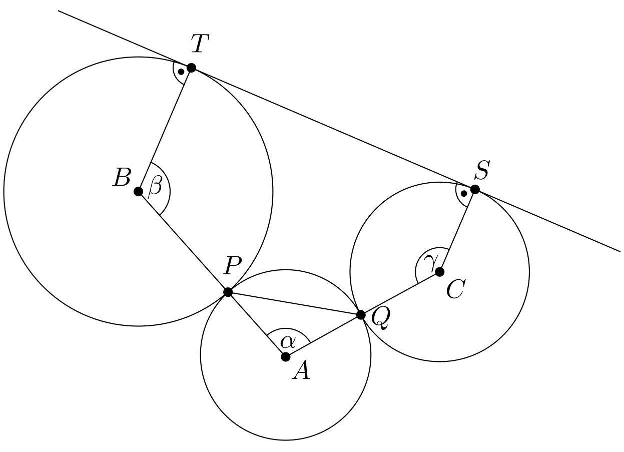
Mivel az egyenlet bal oldala osztható 2-vel és a jobb oldala nem, nincs megoldás az n, m számokra. Innen tudhatjuk, hogy k vagy páratlan vagy osztható 8-cal. A 2020-nál kisebb páratlan egészek száma 1010 és a 8-cal oszthatók száma $2016/8 = 252$. Ezért összesen 1262 lehetséges x van.

51. feladat A k_B és k_C körök rendre a P és Q pontban érintik a k_A kört. Milyen hosszú a k_A kör r_A sugara, ha k_B sugara $r_B = 5$ és k_C sugara $r_C = 3$, továbbá $PQ = 6$ és a közös érintőszakasz hossza $TS = 12$?



Eredmény: $\frac{4+\sqrt{61}}{3} \doteq 3.93675$

Megoldás: Legyen A, B, C a három kör középpontja. Továbbá legyen $\alpha = QAP\sphericalangle, \beta = PBT\sphericalangle, \gamma = SCQ\sphericalangle$. Mivel $BT \perp TS$ és $CS \perp TS$, a $TBACS$ ötszög belső szögeinek összege miatt megkapjuk, hogy $\alpha + \beta + \gamma = 360°$.



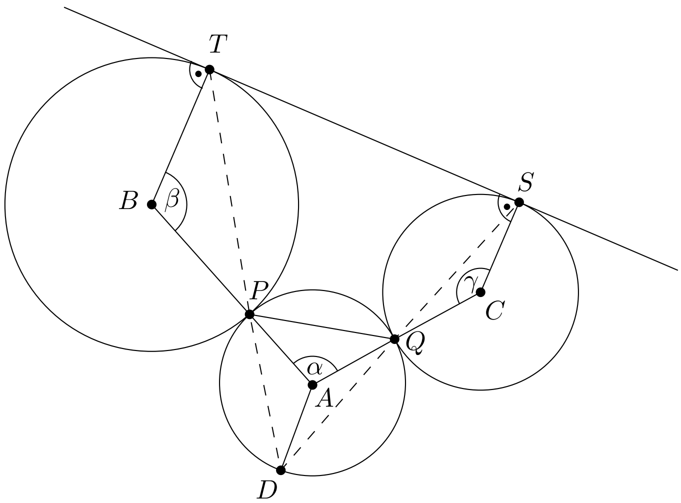
Mivel a TS szakasz a k_B és k_C körök közös érintőpontjainak távolsága, megkapjuk, hogy $PTS\sphericalangle = \frac{1}{2}\beta$ és $TSQ\sphericalangle = \frac{1}{2}\gamma$. Az alapján, hogy

$$SQP\sphericalangle = 180° - (90° - \frac{1}{2}\alpha) - (90° - \frac{1}{2}\gamma) = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma),$$

következtethetünk arra, hogy $PTS\sphericalangle + SQP\sphericalangle = 180°$ és így a $PQST$ négyszög húrnégyszög. Legyen D a TP és SQ egyenesek metszéspontja. Mivel $PQST$ húrnégyszög, a DST és DQP háromszögek hasonlóak, amiből következik, hogy

$$\frac{PQ}{TS} = \frac{DP}{DS} = \frac{DQ}{DT}.$$

Ugyancsak a $PTS\sphericalangle = \frac{1}{2}\beta$ és $TSQ\sphericalangle = \frac{1}{2}\gamma$ szögek alapján megkapjuk, hogy $SDT\sphericalangle = QDP\sphericalangle = \frac{1}{2}\alpha$, ami azt jelenti, hogy a D pont a k_A köríven van.



Tehát tudjuk, hogy $DPA\sphericalangle = TPB\sphericalangle$ és az APD és BPT háromszögek is hasonlók. Ugyanezzel az analógiával megkapjuk, hogy $ADQ\triangle \sim CSQ\triangle$. Ezen hasonlóságok alapján a

$$\frac{TP}{DP} = \frac{r_B}{r_A} \qquad \text{és} \qquad \frac{SQ}{DQ} = \frac{r_C}{r_A}$$

egyenlőségekre jutunk, ami alapján pedig a következőkre:

$$\frac{DT}{DP} = \frac{r_A + r_B}{r_A} \qquad \text{és} \qquad \frac{DS}{DQ} = \frac{r_A + r_C}{r_A}.$$

Ezeket az eredményeket a fenti egyenletbe behelyettesítve megkapjuk, hogy

$$\frac{TS^2}{PQ^2} = \frac{DS}{DP} \cdot \frac{DT}{DQ} = \frac{(r_A + r_B) \cdot (r_A + r_C)}{r_A^2}.$$

Így már ki tudjuk számolni r_A-t úgy, hogy behelyettesítjük a kapott értékeket, ami a következő másodfokú egyenlethez vezet:

$$\frac{144}{36} \cdot r_A^2 = r_A^2 + 8r_A + 15 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3r_A^2 - 8r_A - 15 = 0.$$

Az egyenlet két lehetséges megoldását az alábbi alakban kapjuk meg:

$$\frac{8 \pm \sqrt{64 + 12 \cdot 15}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{61}}{3}.$$

Ezek közül az egyetlen pozitív értékű megoldás a $\frac{4+\sqrt{61}}{3} \doteq 3.93675$.