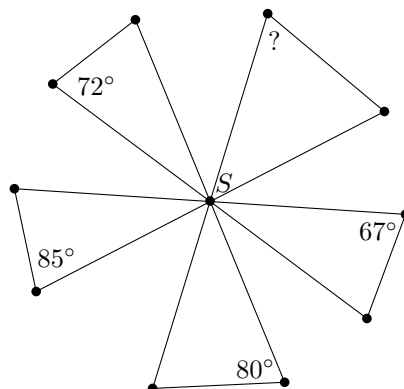


Zadanie 1. Zapytana o swój wiek, babcia Marysia odpowiedziała zagadką: Mam piątkę dzieci w różnym wieku i pomiędzy każdymi sąsiednimi są 4 lata różnicy. Pierwsze dziecko urodziłam gdy miałam 21 lat, a teraz moje najmłodsze dziecko ma 21 lat. Wyznacz wiek babci.

Wynik. 58

Rozwiązanie. Wiek babci może być łatwo obliczony w następujący sposób: $21 + 4 \cdot 4 + 21 = 58$.

Zadanie 2. Stary wiatrak ma pięć trójkątnych skrzydeł. Skonstruowano go z pięciu odcinków równej długości, których środki pokrywają się w punkcie S , a następnie połączono odpowiednie ich końce (patrz rysunek). Wyznacz miarę kąta oznaczonego znakiem zapytania (w stopniach).



Wynik. 56

Rozwiązanie. Rozważmy powstałe pięć równoramiennych trójkątów. Suma miar kątów wewnętrznych tych trójkątów przy wierzchołku S wynosi 180° . Wobec tego miar sumy pięciu zaznaczonych kątów wynosi $\frac{5 \cdot 180^\circ - 180^\circ}{2} = 360^\circ$ skąd wynika, że szukany kąt ma miarę $360^\circ - 67^\circ - 80^\circ - 85^\circ - 72^\circ = 56^\circ$.

Zadanie 3. Uczniowie pewnej klasy brali udział w trzech różnych konkurencjach sportowych. Każdy uczeń wystartował w co najmniej jednej konkurencji. Ostatecznie 22 uczniów wybrało sprint, 13 zdecydowało się na skok w dal, a 15 spróbowało swoich sił w pchnięciu kulą. Ponadto wiemy, że 8 uczniów wybrało zarówno sprint jak i skok w dal, 7 postanowiło wziąć udział w sprincie i pchnięciu kulą, a 6 w skoku w dal i pchnięciu kulą. Było też 3 bardzo ambitnych uczniów, którzy wystartowali we wszystkich trzech konkurencjach. Ilu jest uczniów w tej klasie?

Wynik. 32

Rozwiązanie. Dodajmy liczby uczestników każdego konkursu a następnie odejmijmy liczbę uczestników dwóch różnych konkursów. Widzimy, że wówczas trójka ambitnych uczniów została odjęta o jeden raz za dużo, więc należy ich liczbę jeszcze raz dodać. Zatem odpowiedź to $22 + 13 + 15 - 8 - 7 - 6 + 3 = 32$.

Zadanie 4. Liczbę nazwiemy *superparzystą* jeśli wszystkie jej cyfry są parzyste. Ile pięciocyfrowych liczb superparzystych ma tę własność, że po zsumowaniu z liczbą 24680 otrzymujemy inną liczbę superparzystą?

Wynik. 90

Rozwiązanie. Jest pięć jednocyfrowych liczb parzystych. Aby wynik opisanego dodawania był superparzysty, każda suma dwóch cyfr obliczana w procesie tradycyjnego algorytmu dodawania musi być mniejsza niż 10. Uwzględniając, że liczba nie może rozpoczynać się cyfrą 0, uzyskujemy po trzy możliwości dla każdej z dwóch pierwszych cyfr, dwie dla trzeciej cyfry, jedną dla czwartej oraz pięć dla ostatniej. Łącznie dostajemy $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 = 90$ liczb.

Zadanie 5. Dawno, dawno temu żył pewien mądry król. Jego posiadłości otaczały cztery okrągłe mury o wspólnym środku w zamku i promieniach kolejno 50, 100, 150, 200 (tereny pomiędzy murami także należały do posiadłości króla). W królestwie panował pokój, więc król postanowił, że wyburzy wszystkie cztery mury i zbuduje z pozyskanego z nich materiału nowy okrągły mur o największym możliwym obwodzie, ponownie z jego zamkiem w środku. Jaki jest stosunek pola nowych posiadłości do pola wcześniejszych posiadłości (jako liczba większa lub równa 1)?

Wynik. $25/4$

Rozwiązanie. Wiemy, że suma obwodów czterech murów będzie równa obwodowi nowego muru. Oznaczmy promień nowego dłuższego muru przez r . Mamy $2\pi \cdot 50 + 2\pi \cdot 100 + 2\pi \cdot 150 + 2\pi \cdot 200 = 2\pi \cdot r$, skąd wnioskujemy, że r jest sumą promieni czterech murów: $r = 500$. Stosunek powierzchni obszarów wynosi zatem $\frac{\pi \cdot 500^2}{\pi \cdot 200^2} = 25/4$.

Zadanie 6. Jadzia próbuje otworzyć zamek. Wie, że kod jest czterocyfrowy oraz:

- wszystkie jego cyfry są różne,
- 17 i 137 są jego dzielnikami,
- suma jego cyfr jest możliwie najmniejsza.

Jaki jest kod do zamka?

Wynik. 9316

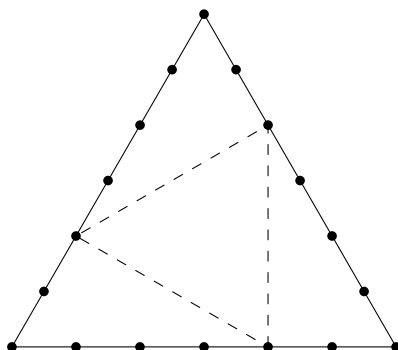
Rozwiązanie. Ponieważ szukana liczba jest podzielna przez liczby pierwsze 137 i 17, więc musi być wielokrotnością $137 \cdot 17 = 2329$. Zauważmy, że ta liczba nie spełnia wszystkich warunków oraz że liczbę tę można pomnożyć tylko przez 2, 3 lub 4, aby nadal była liczbą czterocyfrową. Liczymy $2329 \cdot 2 = 4658$, $2329 \cdot 3 = 6987$ i $2329 \cdot 4 = 9316$, które mają odpowiednio sumy cyfr równe 23, 30 i 19. Ponieważ 19 jest z nich najmniejsza, więc liczba 9316 jest szukanym kodem do zamka.

Zadanie 7. Na stole leżą cztery wielokąty: trójkąt równoboczny o jednostkowym boku i trzy inne przystające wielokąty foremne, również o jednostkowym boku. Każde dwa spośród tych wielokątów mają dokładnie jeden wspólny bok, ale na siebie nie nachodzą. Jaki jest obwód powstałej figury (nie bierzemy pod uwagę wspólnych boków dwóch wielokątów)?

Wynik. 27

Rozwiązanie. Przyjmijmy, że trzy przystające wielokąty otaczające trójkąt mają po n boków. Wówczas wynik wynosi $3(n - 3)$, ponieważ każdy taki wielokąt dzieli dokładnie 3 boki z innymi wielokątami (wliczając w to trójkąt) oraz każdy bok ma długość 1. Skoro dwa kąty n -kąta i kąt trójkąta równobocznego składają się łącznie na kąt pełny, to nasz n -kąąt foremny ma kąt wewnętrzny równy 150° . Ponieważ suma kątów wewnętrznych n -kąta wynosi $(n - 2) \cdot 180^\circ$, więc liczba n jest rozwiązaniem równania $150n = 180(n - 2)$, skąd $n = 12$. Wstawiając to do podanego powyżej wzoru dostajemy, że powstała figura ma obwód 27.

Zadanie 8. Dany jest trójkąt równoboczny z zaznaczonymi punktami na obwodzie (wliczając jego trzy wierzchołki). Punkty te dzielą każdy z boków na 2021 równych odcinków. Wyznacz liczbę różnych trójkątów równobocznych o wierzchołkach w zaznaczonych punktach. Rysunek przedstawia przykładowy trójkąt z zaznaczonymi punktami w przypadku, gdy bok dzielimy na 6 równych części.



Wynik. 8081

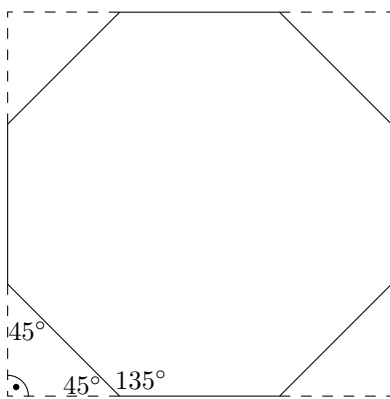
Rozwiązanie. Przez „trójkąt” będziemy rozumieli trójkąt równoboczny o wierzchołkach w zaznaczonych punktach. Oprócz całego danego trójkąta jest $3 \cdot 2020$ trójkątów, które mają z nim dokładnie jeden wspólny wierzchołek oraz 2020 trójkątów, które nie mają z nim wspólnych wierzchołków (ale mają wspólny środek). W sumie uzyskujemy $1 + 3 \cdot 2020 + 2020 = 8081$ trójkątów.

Zadanie 9. Od kwadratowej kartki papieru Weronika odcięła cztery naroża, uzyskując ośmiokąt foremny. Łączna powierzchnia odciętych kawałków jest równa 300. Jaka jest długość boku uzyskanego ośmiokąta foremnego?

Wynik. $\sqrt{300} \approx 17.32051$

Rozwiązanie. Każdy z kątów wewnętrznych ośmiokąta foremnego ma miarę 135° . Wobec tego cztery odcięte przez Weronikę trójkąty są prostokątne i równoramienne, a zatem można z nich ułożyć kwadrat o boku takim, jak bok

wyciętego ośmiokąta. Stąd wniosek, że szukana długość to $\sqrt{300}$.



Zadanie 10. Znajdź największą trzycyfrową dodatnią liczbę całkowitą n , która ma następujące własności:

1. suma cyfr n wynosi 16,
2. iloczyn cyfr n jest różny od 0, ale cyfra jedności tego iloczynu wynosi 0,
3. suma cyfr iloczynu cyfr n wynosi 3.

Wynik. 853

Rozwiązanie. Z drugiego warunku wiemy, że jedną z cyfr n jest 5, oraz co najmniej jedna z cyfr n jest parzysta. Co więcej, żadna z cyfr nie może być równa 0. Korzystając z pierwszego warunku, dostajemy następujące możliwości: 5, 2, 9 lub 5, 4, 7 lub 5, 6, 5 lub 5, 8, 3. Ale tylko 5, 8, 3 spełnia ostatni warunek. Stąd największą możliwą trzycyfrową liczbą spełniającą warunki zadania jest 853.

Zadanie 11. Z liczby 6437051928 usunięto dokładnie pięć cyfr w taki sposób, żeby uzyskana liczba pięciocyfrowa była jak największa. Jaka liczbę otrzymano?

Wynik. 75928

Rozwiązanie. Największa możliwa liczba dziesiątek tysięcy po usunięciu co najwyżej pięciu cyfr z lewej strony jest równa 7. Skoro zostaje uzyskana po usunięciu trzech pierwszych cyfr wyjściowej liczby, jasne jest, że dwiema pozostałymi usuwanymi liczbami powinny być 0 oraz 1. Wobec tego 75928 to szukana wartość.

Zadanie 12. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Rozważmy rosnące ciągi S_n rozpoczynające się od 1 o stałej różnicy n pomiędzy kolejnymi wyrazami. Przykładowo, S_2 to ciąg 1, 3, 5, ... Dla ilu wartości n liczba 2021 jest wyrazem ciągu S_n ?

Wynik. 12

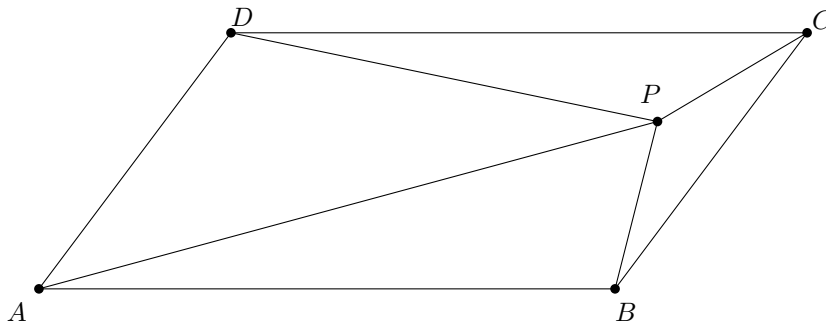
Rozwiązanie. Liczba 2021 jest wyrazem ciągu S_n wtedy i tylko wtedy, gdy $2021 = 1 + an$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej a . Innymi słowy, $2020 = an$. Oznacza to, że n musi być dzielnikiem 2020. Rozkład 2020 na czynniki pierwsze to $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$. Każdy dzielnik 2020 uzyskuje się, biorąc niektóre z tych liczb pierwszych. Możemy wziąć czynnik 2 zero, jeden lub dwa razy, czyli mamy 3 możliwości. 5 można wziąć lub nie — czyli 2 możliwości i to samo dotyczy 101. W sumie mamy $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ możliwości wyboru dzielników 2020. Stąd 2021 występuje w 12 ciągach.

Zadanie 13. Dany jest prosty 90-metrowy korytarz z dziesięcioma oknami rozmieszczonymi w równych odstępach co 10 metrów od siebie. Tomek umieścił siedem robotów przy siedmiu różnych oknach, po czym włączył je wszystkie w tym samym momencie. Po włączeniu każdy robot przemieszcza się ze stałą prędkością 10 metrów na minutę w pewnym kierunku wzdłuż korytarza aż dotrze do jego końca, wtedy natychmiast zawraca i kontynuuje ruch w przeciwnym kierunku. Tomek mierzył czas do momentu, gdy każdy robot spotkał już wszystkie pozostałe. Jaka największa wartość w sekundach mógł zmierzyć?

Wynik. 510

Rozwiązanie. Dla danego robota A możemy określić okno startowe i początkowy kierunek poruszania robota, który natknąłby się na A po najdłuższym możliwym czasie — jest to okno bezpośrednio za A i przeciwny kierunek (gdyby robot znajdował się na końcu korytarza, zakładamy na potrzeby tego rozumowania, że kieruje się na zewnątrz). Łatwo obliczyć, że czas do pierwszego spotkania jest wówczas równy 8.5 minuty, czyli 510 sekund.

Zadanie 14. Wewnątrz równoległoboku $ABCD$ znajduje się punkt P o tej własności, że pole trójkąta CDP jest równe trzykrotności pola trójkąta BCP i jednej trzeciej pola trójkąta APD . Znajdź pole trójkąta ABP wiedząc, że pole trójkąta CDP wynosi 18.



Wynik. 42

Rozwiązanie. Trójkąty APD i BCP pokrywają łącznie połowę powierzchni równoległoboku. Zatem pole trójkąta ABP jest równe:

$$\left(\frac{1}{3} + 3\right) \cdot 18 - 18 = 42.$$

Zadanie 15. Dzieląc 1058, 1486 oraz 2021 przez pewną dodatnią liczbę całkowitą $d > 1$ uzyskujemy za każdym razem tę samą resztę. Wyznacz liczbę d .

Wynik. 107

Rozwiązanie. Różnice między trzema danymi liczbami są równe $1486 - 1058 = 428$ oraz $2021 - 1486 = 535$. Skoro dane liczby dają tę samą resztę przy dzieleniu przez d , to powyższe różnice są wielokrotnościami d . Największy wspólny dzielnik liczb 428 oraz 535 jest równy liczbie pierwszej 107, jest więc to jedyna możliwa wartość d .

Zadanie 16. Na ławce rezerwowych pewnego stadionu piłkarskiego jest dokładnie czternaście miejsc. Nowe kierownictwo drużyny, złożone z trenera, pomocnika trenera, menedżera oraz fizjoterapeuty, chce zapoznać się bliżej z graczami. W związku z tym planuje podczas meczu siedzieć na ławce pośród dziesięciu rezerwowych zawodników w taki sposób, aby każdy członek kierownictwa siedział pomiędzy dwoma zawodnikami. Na ile sposobów kierownictwo może wybrać cztery krzesła aby osiągnąć ten cel? Jeśli te same cztery krzesła zostaną zajęte, ale kierownictwo siedzi w innej kolejności, to uznajemy te sposoby za różne.

Wynik. 3024

Rozwiązanie. Wyobraźmy sobie, że przed zajęciem miejsc zawodnicy rezerwowi ustawili się w szeregu. Skoro jest ich dziesięciu, to między nimi jest dziewięć odstępów i każdy z nich może zostać zajęty przez co najwyżej jednego członka kierownictwa. To daje $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ możliwości zajęcia miejsc zgodnie z danymi warunkami.

Zadanie 17. Ostrosłup prawidłowy czworokątny ma w podstawie kwadrat o polu 1, a jego pole powierzchni całkowitej jest równe 3. Jaka jest objętość tego ostrosłupa?

Wynik. $\sqrt{3}/6 \approx 0.288675$

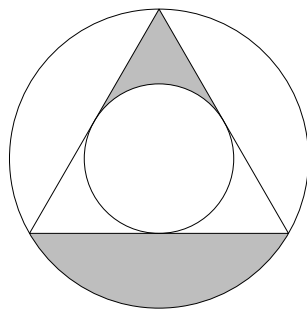
Rozwiązanie. Każda z krawędzi podstawy ma długość 1. Skoro cały ostrosłup ma powierzchnię 3, to każda z jego trójkątnych ścian bocznych ma pole $1/2$, czyli równoważnie, wysokość opuszczoną z wierzchołka ostrosłupa równą 1. To oznacza, że w przekroju ostrosłupa płaszczyzną zawierającą jego wierzchołek oraz wysokości przeciwległych ścian bocznych otrzymujemy trójkąt równoboczny o boku 1, którego wysokość jest równa wysokości ostrosłupa. Ze wzoru na objętość ostrosłupa uzyskujemy wynik $\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{6}\sqrt{3}$.

Zadanie 18. Magiczna maszyna z Kany Galilejskiej zamienia wodę na wino i odwrotnie. Jeśli wleje się do niej wodę, zamienia ona 6 % jej objętości w wino, a pozostałe 94 % wody pozostaje niezmienione. Jeśli zaś do maszyny wleje się wino, zamienia ona 10 % jego objętości w wodę, a pozostałe 90 % wina pozostaje niezmienione. Gdy do maszyny wleje się mieszaninę wody i wina, przetwarza ona oba składniki osobno w wyżej opisany sposób. Beata kupiła wodę i wino, łącznie 6000 litrów, i wlała taką mieszaninę do maszyny. Po zakończeniu pracy maszyny okazało się, że otrzymała wyjściową miksturę. Ile litrów wina było w tej miksturze?

Wynik. 2250

Rozwiązanie. Oznaczmy przez x ilość wina (w litrach), przez z zaś ilość wody, którą Beata wlała do maszyny. Wiemy, że $0.06z$ litrów wody zamieniło się w wino, a $0.1x$ litrów wina przemieniło się w wodę. Żeby warunek zadania był spełniony musi zachodzić $0.06z = 0.1x$. Używając założenia $x + z = 6000$ dostajemy równanie $0.06(6000 - x) = 0.1x$. Wynik wynosi więc 2500.

Zadanie 19. Rysunek przedstawia trójkąt równoboczny oraz okrąg wpisany i opisany na nim. Znajdź pole zacienionego obszaru wiedząc, że pole okręgu opisanego na trójkącie wynosi 140.



Wynik. 35

Rozwiązanie. Łatwo przekonać się, że promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny jest dwa razy mniejszy od promienia okręgu na nim opisanego, a zatem pole okręgu wpisanego wynosi $\frac{140}{4} = 35$. Co więcej, zacieniony obszar to dokładnie $\frac{1}{3}$ obszaru który jest różnicą pól dwóch danych okręgów, a więc wynosi 35.

Zadanie 20. Iloczyn pewnych 2021 dodatnich liczb całkowitych jest dwukrotnością ich sumy. Jaka jest największa możliwa wartość największej z tych liczb?

Wynik. 4044

Rozwiązanie. Oznaczmy dodatnie liczby całkowite spełniające zadane warunki przez $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_{2020} \geq c_{2021} \geq 1$. Chcemy wyznaczyć największą możliwą wartość c_1 przy założeniu, że zachodzi równość

$$c_1 \cdot \dots \cdot c_{2021} = 2 \cdot (c_1 + \dots + c_{2021}). \quad (1)$$

Dzieląc przez lewą stronę i szacując niektóre mianowniki z wykorzystaniem nierówności $c_i \geq 1$, uzyskujemy

$$1 = 2 \left(\frac{1}{c_2 \cdot \dots \cdot c_{2021}} + \dots + \frac{1}{c_1 \cdot \dots \cdot c_{2020}} \right) \leq 2 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{2019}{c_1 c_2} \right) = 2 \frac{2019 + c_1 + c_2}{c_1 c_2}.$$

Mnożąc przez $c_1 c_2$ i przekształcając, otrzymujemy

$$(c_1 - 2)(c_2 - 2) = c_1 c_2 - 2c_1 - 2c_2 + 4 \leq 2 \cdot 2019 + 4 = 4042.$$

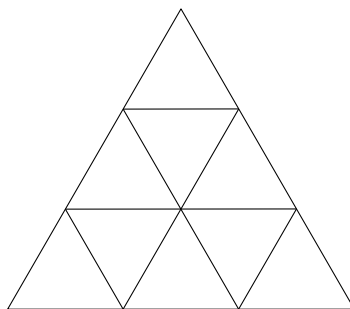
Jeśli $c_2 \geq 3$, to $c_1 \leq 4044$, a biorąc $c_1 = 4044$, $c_2 = 3$ oraz $c_3 = c_4 = \dots = c_{2021} = 1$, dostajemy układ liczb spełniających równanie (1), co oznacza, że wartość 4044 jest osiągalna. Z drugiej strony, jeśli $c_2 \leq 2$, to wśród liczb $c_2 \geq c_3 \geq \dots \geq c_{2021}$ jest $k \geq 0$ dwójek oraz $2020 - k$ jedynek, a równość (1) przybiera postać

$$c_1 2^k = 2(c_1 + 2k + 2020 - k),$$

którą można uprościć do $c_1(2^{k-1} - 1) = 2020 + k$. Dla $k \leq 1$ nie istnieje odpowiednie c_1 , a dla $k \geq 2$ uzyskujemy

$$c_1 = \frac{2020 + k}{2^{k-1} - 1} \leq 2022 < 4044.$$

Zadanie 21. W każdy z dziewięciu małych trójkątów przedstawionych na rysunku Wojtek wpisał dodatnią liczbę całkowitą, przy czym żadna z tych liczb się nie powtórzyła. Ponadto, każde dwie liczby wpisane w trójkąty sąsiadujące bokiem mają wspólny dzielnik większy od 1. Jaka jest najmniejsza możliwa suma dziewięciu wpisanych liczb?



Wynik. 59

Rozwiązanie. Zauważmy, że spośród dziewięciu trójkątów trzy trójkąty mają po jednym sąsiedzie, trzy mają po dwóch sąsiadów oraz trzy mają po trzech sąsiadów. Oznacza to, że jeżeli jedną z wpisanych liczb jest liczba pierwsza p , to przynajmniej jedna inna wpisana liczba jest jej wielokrotnością. Ponadto 1 nie może zostać wpisane w żaden z trójkątów. Oznaczmy sumę wpisanych liczb (w poprawnym wypełnieniu) przez S .

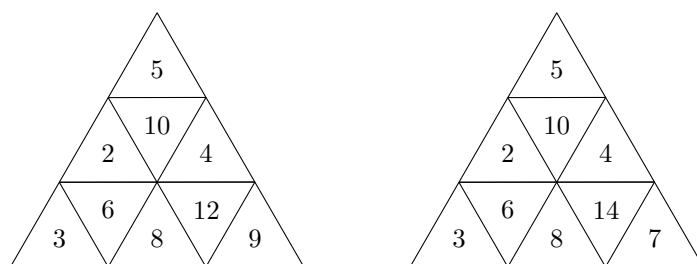
Jeżeli pośród wpisanych liczb jest liczba pierwsza $p \geq 11$, to wpisana jest również jej pewna wielokrotność kp dla $k \geq 2$. Wypełniając pozostałe siedem trójkątów najmniejszymi dostępnymi liczbami (nie zważając na regułę sąsiedniego boku) otrzymujemy, że

$$S \geq 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + p + k \cdot p = 35 + (k+1) \cdot p \geq 35 + 33 = 68.$$

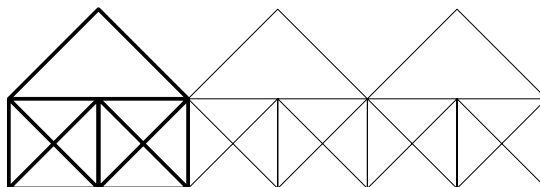
Załóżmy teraz, że pośród wpisanych liczb (w poprawnym wypełnieniu) nie występuje liczba pierwsza $p \geq 11$. Rozważmy cztery przypadki:

- Liczby 5 i 7 są wpisane: $S \geq 5 + k_5 \cdot 5 + 7 + k_7 \cdot 7 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 = (k_5 + 1) \cdot 5 + (k_7 + 1) \cdot 7 + 23 \geq 15 + 21 + 23 = 59$,
- Liczba 5 jest wpisana, a 7 nie jest: $S \geq 5 + k \cdot 5 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 9 + \begin{cases} 10 \geq 20 + 32 + 10 = 62 & \text{dla } k \geq 3; \\ 12 = 15 + 32 + 12 = 59 & \text{dla } k = 2, \end{cases}$
- Ani 5, ani 7 nie są wpisane: $S \geq 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 9 + 10 + 12 + 14 = 68$,
- Liczba 7 jest wpisana, a 5 nie jest: $S \geq 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + k \cdot 7 \geq 49 + 14 = 63$.

Podsumowując, każda możliwa suma wynosi przynajmniej 59 i tę sumę można uzyskać (nawet na dwa sposoby):



Zadanie 22. Łucja zawsze rysuje takie same domki: składają się z dwóch przystających kwadratów i równoramiennego trójkąta prostokątnego będącego dachem. Każdy nowy domek jest dorysowywany obok już istniejących. Na rysunku zaprezentowane są pierwsze trzy domki:

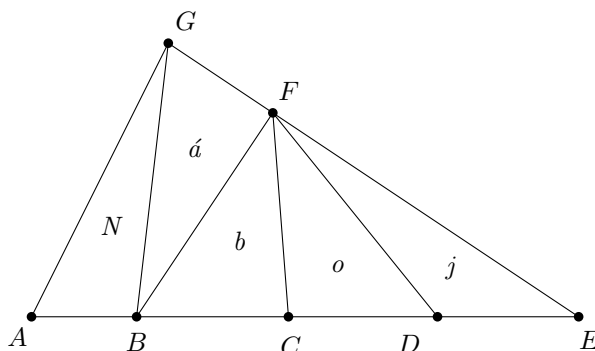


Ile minimalnie domków musi narysować Łucja, by na jej rysunku znajdowało się co najmniej 2021 trójkątów?

Wynik. 93

Rozwiązanie. Przyjmijmy, że wszystkie domki mają pole równe 3. W pierwszym domku jest 8 trójkątów o powierzchni $\frac{1}{4}$, 8 o powierzchni $\frac{1}{2}$ i 3 o powierzchni 1. W drugim domku znajdziemy te same trójkąty co w pierwszym oraz dwa dodatkowe trójkąty o polu 1, które sięgają między domkami. Zatem drugi domek zwiększa liczbę trójkątów o 21. Zaczynając od trzeciego domku, każdy kolejny będzie zawierał te same trójkąty co drugi domek oraz trójkąt o polu 4 przechodzący przez 3 domki. Zwiększa zatem liczbę trójkątów o 22. Skoro $2021 - 19 - 22 = 1981$ i $1981 = 90 \cdot 22 + 1$, Łucja potrzebuje narysować $2 + 90 + 1 = 93$ domki.

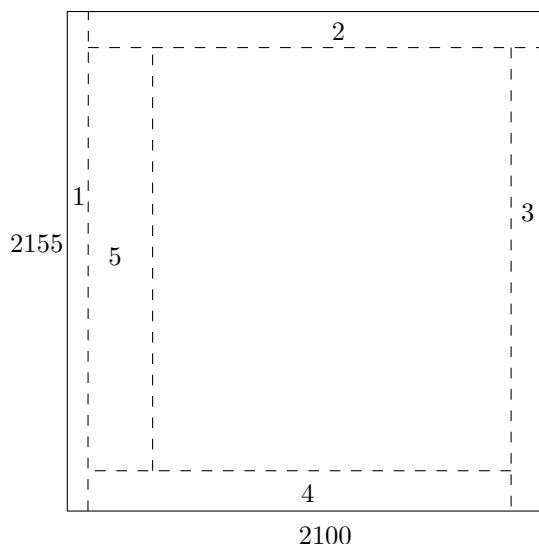
Zadanie 23. Trójkąty N , $\acute{a}$, b , o i j mają takie samo pole. Oblicz długość odcinka AB , jeśli $CD = 5$.



Wynik. 15/4

Rozwiązanie. Stosunek pól trójkątów $\triangle BEG$ i $\triangle BEF$ wynosi 4 : 3. Skoro te dwa trójkąty mają taką samą podstawę BE , to ich wysokości pozostają także w proporcji 4 : 3. Trójkąty $\triangle ABG$ i $\triangle CDF$ mają takie samo pole, zatem $AB = \frac{3}{4}CD = \frac{15}{4}$.

Zadanie 24. Justyna ma dużą prostokątną kartkę papieru o wymiarach 2155 na 2100. Odcina pasek o szerokości 1 wzdłuż dłuższego boku, a następnie kontynuując zgodnie z ruchem wskazówek zegara, pasek o szerokości 2 wzdłuż krótszego boku i ponownie pasek o szerokości 3 wzdłuż dłuższego boku. Kontynuuje odcinanie pasków za każdym razem zwiększając szerokość paska o jeden tak długo jak to jest możliwe (patrz rysunek poniżej).

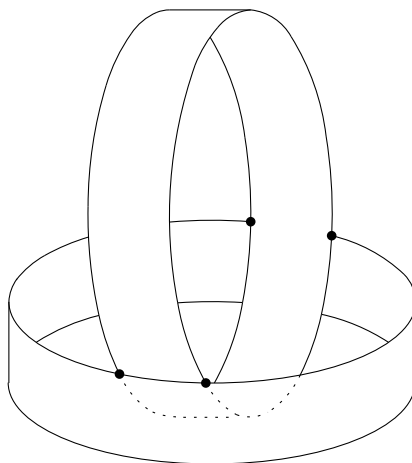


Kończy, gdy nie może odciąć kolejnego paska. Znajdź pole prostokąta, który jej pozostał.

Wynik. 6375

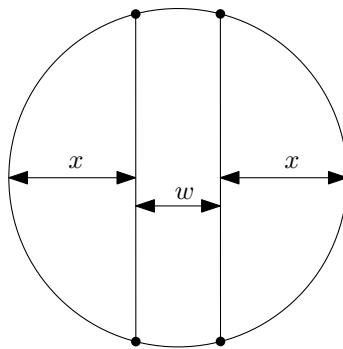
Rozwiązanie. Justyna może odcinać paski o nieparzystej szerokości tak długo, jak $1 + 3 + \dots + 2n - 1 = n^2 < 2100$. Ponieważ $45^2 = 2025 < 2100 < 2116 = 46^2$, więc pasek o szerokości 89 jest ostatnim paskiem o nieparzystej szerokości, który może odciąć. Co więcej, może odcinać paski o parzystej szerokości tak długo, jak $2 + 4 + \dots + 2n = n(n+1) < 2155$. Ponieważ $45 \cdot 46 = 2070 < 2155 < 2162 = 46 \cdot 47$, to pasek o szerokości równej 90 jest ostatnim paskiem o parzystej szerokości, który może odciąć. Zatem pozostały prostokąt ma pole $(2100 - 2025) \cdot (2155 - 2070) = 75 \cdot 85 = 6375$.

Zadanie 25. Jeden z dwóch identycznych pierścieni o promieniu 4 i nieznannej szerokości w leży poziomo na stole. Drugi jest umieszczony pionowo, dotyka pierwszego w czterech punktach (patrz rysunek), a jego najniższy punkt jest oddalony o 1 od powierzchni stołu. Ile wynosi w ?



Wynik. 10/3

Rozwiązanie. Rozważmy płaszczyznę górnego brzegu leżącego poziomo pierścienia i oznaczmy przez x taką liczbę, że $w + 2x$ jest jego średnicą (patrz rysunek).



Zauważmy, że każdy z zaznaczonych odcinków jest wspólną cięciwą narysowanego okręgu oraz jednego z okręgów brzegowych pionowego pierścienia. Ponieważ pierścienie są identyczne, te okręgi są przystające, a zatem najniższy punkt pionowego pierścienia znajduje się na wysokości $w - x$. Wykorzystując równość $w - x = 1$, uzyskujemy $8 = 2x + w = 2(w - 1) + w = 3w - 2$ i w konsekwencji $w = \frac{10}{3}$.

Zadanie 26. Wielomian stopnia 14 o współczynnikach całkowitych ma dodatni współczynnik przy najwyższej potędze oraz 14 parami różnych całkowitych pierwiastków. Jego wartość p w zerze jest dodatnia. Znajdź najmniejszą możliwą wartość p .

Wynik. 29030400

Rozwiązanie. Wielomian może zostać zapisany jako $c \cdot (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_{14})$ dla pewnych parami różnych liczb całkowitych $a_1, a_2, \dots, a_{14}$ oraz liczby całkowitej c . Współczynnik przy najwyższej potędze wynosi c , więc z założenia c jest dodatnie. Wartość w zerze (p) jest równa wyrazowi wolnemu wielomianu, czyli iloczynowi $c \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{14}$. Skoro iloczyn ten ma być zminimalizowany, ustalamy najmniejsze możliwe c , czyli $c = 1$. Dla zminimalizowania iloczynu pozostałych czynników (pierwiastków wielomianu) należy je w miarę możliwości zbliżyć do zera, czyli wybrać $1, -1, 2, -2, \dots$. Skoro jednak (z założenia) całość iloczynu jest dodatnia, liczba ujemnych czynników musi być parzysta, co prowadzi natychmiast do rezultatu $p = 6! \cdot 8! = 29030400$.

Zadanie 27. Karolina pisze cyfry 4, 5 i 7 za pomocą dwóch pociągnięć ołówkiem, a wszystkie pozostałe cyfry jednym pociągnięciem. Ile pociągnięć ołówkiem wykona Karolina pisząc wszystkie liczby całkowite od 1 do 2021 włącznie?

Wynik. 8783

Rozwiązanie. Podczas pisania Karolina zapisze 9 liczb jednocyfrowych, 90 liczb dwucyfrowych, 900 liczb trzycyfrowych i $2021 - 1000 + 1 = 1022$ liczby czterocyfrowe. Łącznie jest to $9 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 + 1022 \cdot 4 = 6977$ cyfr. Dla każdej zapisanej cyfry Karolina wykona co najmniej jedno pociągnięcie ołówkiem, przy czym drugie pociągnięcie pojawi się wyłącznie dla cyfr 4, 5, 7. Wystarczy więc wyznaczyć liczbę tych cyfr spośród liczb od 1 do 2020 (liczba 2021 nie zawiera żadnej z tych trzech szczególnych cyfr).

Policzmy najpierw wystąpienia cyfry 4. Dla dokładnie $1/10$ liczb nie większych od 2020, czyli dla 202 liczb, będzie to cyfra jedności. Cyfrą dziesiątek z kolei będzie dla $1/10$ liczb nie większych od 2000 (i w żadnej większej), co daje kolejnych 200 wystąpień. Podobnie cyfra 4 występuje 200 razy jako cyfra setek (i ani razu jako cyfra tysięcy). Łącznie uzyskujemy więc $202 + 200 + 200 = 602$ dodatkowe pociągnięcia ołówkiem związane z pisanem cyfry 4. Dla cyfr 5 oraz 7 w analogiczny sposób uzyskujemy ten sam wynik.

Ostatecznie Karolina napisze 6977 cyfr, przy czym $3 \cdot 602 = 1806$ wymaga dodatkowego pociągnięcia ołówkiem, a zatem łączna liczba pociągnięć to $6977 + 1806 = 8783$.

Zadanie 28. Poniższy pasek należy tak wypełnić liczbami $1, 1, 2, 2, \dots, 8, 8$, aby dla każdej liczby n w pasku między dwoma wystąpieniami n było dokładnie n innych komórek. Trzy liczby są już podane:

					6	7		2							
--	--	--	--	--	---	---	--	---	--	--	--	--	--	--	--

Wstaw pozostałe liczby zgodnie z zasadami i jako odpowiedź podaj 4-cyfrową liczbę powstałą z cyfr z zacieniowanego obszaru.

Dla liczb 1, 1, 2, 2, 3, 3 poprawnie wypełnionym paskiem byłby:

3	1	2	1	3	2
---	---	---	---	---	---

Wynik. 3845

Rozwiązanie. Dla uproszczenia notacji oznaczmy liczbę wpisaną w i -tą od lewej komórkę przez $f(i)$. Z treści zadania wynika, że $f(6) = 6$, $f(7) = 7$, $f(9) = 2$, skąd jednoznacznie można wywnioskować, że $f(13) = 6$, $f(15) = 7$ oraz $f(12) = 2$.

					6	7		2			2	6		7	
--	--	--	--	--	---	---	--	---	--	--	---	---	--	---	--

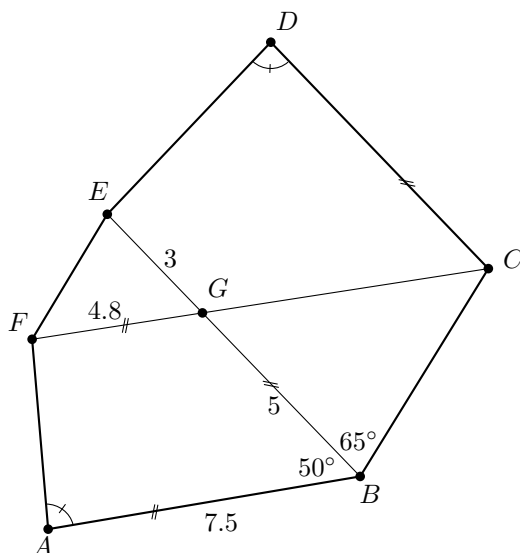
Są trzy możliwości umieszczenia na pasku pary trójek tak, aby między nimi były trzy komórki: $f(1) = f(5) = 3$, $f(4) = f(8) = 3$ lub $f(10) = f(14) = 3$. Łatwo zauważyć, że jeśli $f(10) = f(14) = 3$, to $f(16) = 4$ jest jedyną możliwą wartością $f(16)$ i w konsekwencji również $f(11) = 4$. Jednak wówczas nie ma możliwości umieszczenia pary ósemek. W przypadku, gdy $f(4) = f(8) = 3$ otrzymujemy dwa możliwe rozmieszczenia pary piątek: $f(5) = f(11) = 5$ lub $f(10) = f(16) = 5$, z których każde prowadzi do sprzeczności.

Wobec tego $f(1) = f(5) = 3$ i w konsekwencji $f(2) = f(11) = 8$ to jedyny sposób rozkolowania ósemek. Teraz łatwo uzupełnić pozostałe pola tak, aby warunki zadania były spełnione: mamy kolejno $f(4) = f(10) = 5$, $f(3) = f(8) = 4$ i wreszcie $f(14) = f(16) = 1$.

3	8	4	5	3	6	7	4	2	5	8	2	6	1	7	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

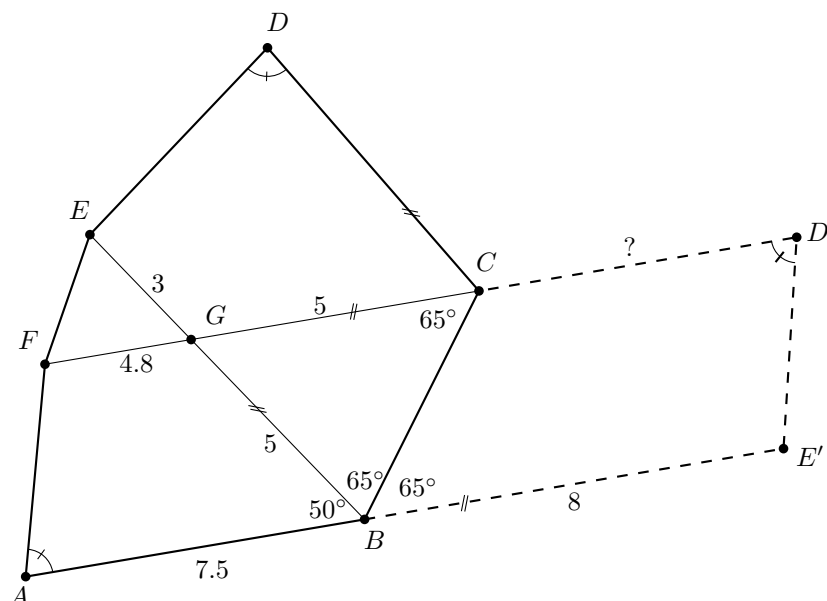
Stąd wniosek, że (jedyne) rozwiązanie stanowi liczba 3845.

Zadanie 29. Punkt G jest przecięciem przekątnych BE i CF wypukłego sześciokąta $ABCDEF$ oraz są spełnione następujące zależności: $AB = 7.5$, $BG = 5$, $GE = 3$, $GF = 4.8$, $\angle BAF = \angle CDE$, $\angle ABG = 50^\circ$, $\angle CBG = 65^\circ$. Ponadto AB jest równoległe do CF i CD jest równoległe do BE . Oblicz długość odcinka CD .



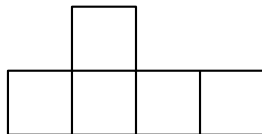
Wynik. 57/10

Rozwiązanie.



Skoro $50^\circ + 65^\circ + 65^\circ = 180^\circ$, to wobec danych równoległości oraz równości kątów przy wierzchołkach A i D , opisana konfiguracja powstaje poprzez zgięcie równoległoboku $AE'D'F$ wzdłuż odcinka BC (patrz rysunek). Z równoramienności trójkąta BCG wynika więc, że $CD = AB + BE' - CF = AB + EG - FG = 5.7$.

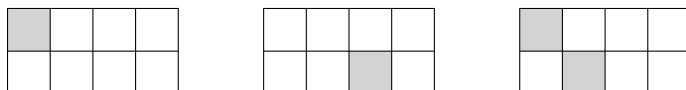
Zadanie 30. Żwirek i Muchomorek grają w statki. Oprócz innych statków, każdy z nich ma także krążownik z miejscem lądowania dla helikopterów:



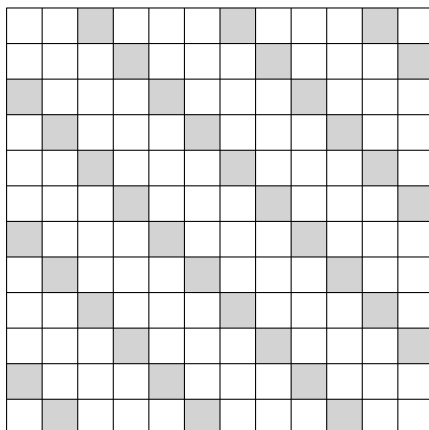
Żwirek ukrył swój krążownik gdzieś na polu bitwy o wymiarach 12×12 . Ponieważ grają w grę na liściu paproci, powyższy rysunek krążownika może być obrócony lub odbity na drugą stronę. Ile razy Muchomorek musi strzelić, tzn. wybrać pole na planszy, aby mieć pewność trafienia krążownika co najmniej raz?

Wynik. 36

Rozwiązanie. Rozważmy prostokąt o wymiarach 4×2 złożony z pól planszy. Jak na pierwszych dwóch rysunkach, jeden strzał nie gwarantuje trafienia, ponieważ istnieje możliwość ustawienia krążownika tak by pozostał nietrafiony. Oczywiście wybór dwóch pól w dwóch różnych wierszach gwarantuje trafienie krążownika (przykładowo na trzecim obrazku). Zatem, dla każdego bloku o wymiarach 4×2 potrzebne są co najmniej dwa strzały, co daje łącznie co najmniej $18 \cdot 2 = 36$ strzałów.



Z drugiej strony, następujący wzór na planszy o wymiarach 12×12 pokazuje, że 36 strzałów wystarczy, by trafić krążownik co najmniej raz.



Zadanie 31. Dla ustalonej dodatniej liczby całkowitej a konstruujemy taki trójkąt ostrokątny ABC , że $BC = a$ oraz długości h_b, h_c odpowiednich wysokości są dodatnimi liczbami całkowitymi. Jakie jest a , jeśli największe możliwe pole takiego trójkąta wynosi 101.4?

Wynik. 13

Rozwiązanie. Skoro ABC jest ostrokątny, to $h_b < a$ oraz $h_c < a$. Z drugiej strony, łatwo zauważyć, że aby zmaksymalizować pole $S = \frac{1}{2}ah_a$, obydwie wysokości h_b, h_c powinny być tak długie, jak to możliwe (istotnie, zwiększenie np. wysokości h_b przy zachowaniu warunku $h_b < a$ oraz długości h_c powoduje, że h_a także się zwiększa). W związku z tym możemy założyć, że $h_b = h_c = a - 1$, a ABC jest równoramienny. Oznaczmy środek podstawy BC przez M , a spodek wysokości poprowadzonej z wierzchołka C przez C_0 . Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do podobnych trójkątów prostokątnych $ABM \sim CBC_0$ wyznaczamy

$$101.4 = S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{a^2(a-1)}{4\sqrt{2a-1}}.$$

Skoro 101.4 jest liczbą wymierną, to liczba $2a - 1$ musi być nieparzystym kwadratem liczby całkowitej, powiedzmy $2a - 1 = (2k + 1)^2$ dla pewnej liczby całkowitej $k \geq 0$ i w związku z tym $a = \frac{(2k+1)^2+1}{2} \in \{1, 5, 13, 25, 41, \dots\}$. Sprawdzenie pierwszych kilku wartości w połączeniu z obserwacją, że pole rośnie wraz ze wzrostem a , prowadzi do znalezienia poprawnej odpowiedzi $a = 13$.

Zadanie 32. Łukasz obliczył sumę 1000 dodatnich liczb całkowitych i dostał w wyniku liczbę 1 200 500. Gdyby ustawić wszystkie te liczby w porządku rosnącym, różnica każdych dwóch kolejnych liczb wynosiłaby 2 lub 7. Najmniejsza z tych liczb to 101. Jaka jest największa możliwa wartość największej z tych liczb?

Wynik. 3099

Rozwiązanie. Niech $n_1 = 101, n_2, \dots, n_{1000}$ będą danymi liczbami ustawionymi w porządku rosnącym. Przy założeniu, że różnica każdych dwóch kolejnych jest równa 2, uzyskujemy $n_{1000} = 101 + 2 \cdot 999 = 2099$, skąd $\sum_{i=1}^{1000} n_i = 2200 \cdot 500 = 1\,100\,000$. Stąd wniosek, że różnica między sumą Łukasza a najmniejszą możliwą sumą jest równa $100\,500 = 20\,100 \cdot 5$. Jeśli dla pewnego i mamy $n_{i+1} - n_i = 7$ zamiast 2, to suma zwiększa się o $(1000 - i) \cdot 5$, a wartość n_{1000} zwiększa się o 5. W konsekwencji, aby zmaksymalizować n_{1000} przy stałej sumie wszystkich liczb 1 200 500, różnice równe 7 (zamiast 2) powinny pojawić się przy jak największych indeksach. Zauważmy, że $20\,100 = \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 201$ jest liczbą trójkątną, czyli jest równa sumie $1 + 2 + 3 + \dots + 200$. Wobec tego, jeśli Łukasz zmieni różnice $n_{i+1} - n_i$ dla $i = 800, \dots, 999$ z 2 na 7 (w opisanym wyżej układzie o minimalnej sumie), otrzyma największą możliwą wartość $n_{1000} = 101 + 2 \cdot 999 + 200 \cdot 5 = 3099$.

Zadanie 33. Jaka jest najmniejsza dodatnia liczba całkowita, która w zapisie dziesiętnym zawiera wyłącznie cyfry 2 i 9, ma nieparzystą liczbę cyfr i jest podzielna przez 11?

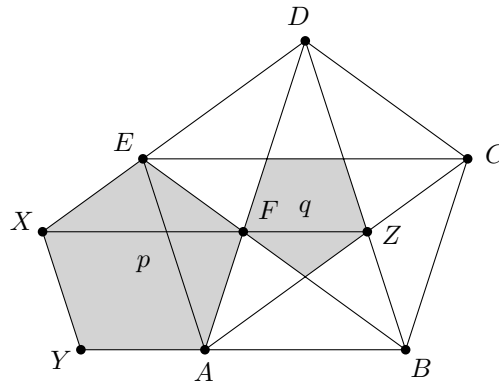
Wynik. 29 292 929 292

Rozwiązanie. Dodatnia liczba całkowita jest podzielna przez 11 wtedy i tylko wtedy, gdy suma cyfr na pozycjach nieparzystych odjęta od sumy cyfr na pozycjach parzystych jest podzielna przez 11. Stąd natychmiast płynie wniosek, że w rozwiązaniu nie może być pary kolejnych dwójek lub dziewiątek, gdyż wówczas można je wykreślić, otrzymując mniejszą liczbę spełniającą warunki zadania. Skoro dwójki i dziewiątki mają występować naprzemiennie, wystarczy znaleźć najmniejsze n takie, że $2n - 9(n + 1)$ lub $9n - 2(n + 1)$ jest podzielne przez 11. W obydwu przypadkach rozwiązaniem jest $n = 5$, co odpowiada podzielnym przez 11 liczbom 11-cyfrowym 29 292 929 292 i 92 929 292 929. Odpowiedzią jest mniejsza z nich.

Zadanie 34. Niech F będzie przecięciem przekątnych AD i BE pięciokąta foremnego $ABCDE$. Trójkąt równoramienny AFE można dopełnić do pięciokąta foremnego $AFEXY$ — oznaczmy go przez p . Innym pięciokątem foremnym jest wielokąt o wierzchołkach będących przecięciami przekątnych wielokąta $ABCDE$ — oznaczmy go przez q . Wiedząc, że $AF = 1$, znajdź największą możliwą odległość między pewnym wierzchołkiem pięciokąta p , a pewnym wierzchołkiem pięciokąta q .

Wynik. $(3 + \sqrt{5})/2 \approx 2.61803$

Rozwiązanie. Zauważmy, że istnieje jednokładność o środku w punkcie F przekształcająca p na q . Stąd wniosek, że odcinek łączący punkty najbardziej odległe punkty pięciokątów p i q przechodzi przez F . Nazwijmy te punkty X i Z .



Zauważmy, że kąt AFE ma miarę 108° , zatem z twierdzenia cosinusów dla AFE otrzymujemy, że $AE = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. Ponadto, trójkąty AFY , XFD , DFE są równoramienne. Stąd:

$$XF = DF = DE = AE = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$$

oraz

$$FZ = AF = 1.$$

Wobec tego poszukiwana odległość wynosi $XF + FZ = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$.

Zadanie 35. Rozważmy wszystkie trójki (a, b, c) liczb pierwszych będące rozwiązaniami równania

$$175a + 11ab + bc = abc.$$

Jaka jest suma wszystkich możliwych wartości c w tych rozwiązaniach?

Wynik. 281

Rozwiązanie. Należy przekształcić równanie do postaci $a(bc - 11b - 175) = bc$. Stąd widać od razu, że $a = b$ lub $a = c$, skoro wszystkie trzy zmienne winny być liczbami pierwszymi. W pierwszym przypadku otrzymujemy $ac - 11a - 175 = c \iff (a - 1)(c - 11) = 186$, co pozostawia dla liczb pierwszych jedyne rozwiązanie $(2, 2, 197)$. W drugim przypadku otrzymujemy $ab - 11b - 175 = b \iff 175 = b(a - 12)$, skąd kolejne dwa rozwiązania: $(47, 5, 47)$ i $(37, 7, 37)$. Dlatego poszukiwaną wartością jest $197 + 47 + 37 = 281$.

Zadanie 36. Andrzej i Ania chcą kupić dom. Oboje szukają miejsca doskonałego, ale inaczej definiują „doskonałość”. Znaleźli już 10 ofert i postanowili wypróbować następującą metodę na podjęcie decyzji: każde z nich uporządkuje oferty w sposób losowy (bez remisów) i jeśli trzy pierwsze oferty z rankingu Ani i trzy pierwsze oferty z rankingu Andrzeja będą miały dokładnie jeden wspólny element, to wybiorą ten dom. Jakie jest prawdopodobieństwo, że uda im się znaleźć dom w ten sposób?

Wynik. 21/40

Rozwiązanie. Dla dowolnych trzech pierwszych domów w rankingu Ani, Andrzej musi mieć dokładnie jeden z nich wśród trzech pierwszych ofert w swoim rankingu, a pozostałe dwa domy mieć w rankingu na miejscach między 4 a 10. Więc dla dowolnego rankingu Ani, to prawdopodobieństwo wynosi

$$\frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{7}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{21}{40}.$$

Zadanie 37. Niech $p(x)$ i $q(x)$ będą wielomianami postaci

$$p(x) = ax^{2021} + bx^{2020} + \dots + ax^{2k-1} + bx^{2k-2} + \dots + bx^2 + ax + b$$

oraz

$$q(x) = ax^2 + bx + a,$$

gdzie a i b są dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Wiadomo, że $q(x)$ ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty. Znajdź sumę wszystkich pierwiastków rzeczywistych wielomianu $p(x)$.

Wynik. -2

Rozwiązanie. Zauważmy, że $p(x) = (ax + b)(x^{2020} + x^{2019} + \dots + x^2 + 1)$. Drugi czynnik jest zawsze dodatni, gdyż można go przedstawić w postaci ułamka $\frac{x^{2021}-1}{x-1}$ dla $x \neq 1$, którego licznik i mianownik są zawsze tego samego znaku. Tym samym $x_0 = -\frac{b}{a}$ jest jedynym pierwiastkiem wielomianu p .

Wielomian q ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty, a zatem jego wyróżnik $b^2 - 4a^2$ wynosi 0. Skoro a i b są dodatnie, to $b = 2a$, a zatem $x_0 = -\frac{b}{a} = -\frac{2a}{a} = -2$.

Zadanie 38. Znajdź sumę wszystkich liczb pierwszych p , dla których istnieje taka dodatnia liczba całkowita n , że rozwinięcie dziesiętne ułamka $\frac{n}{p}$ ma okres podstawowy długości 5.

Wynik. 312

Rozwiązanie. Niech p będzie liczbą pierwszą, dla której ułamek $\frac{n}{p}$ ma okres podstawowy długości 5, który zaczyna się na k -tym miejscu po przecinku. Przyjmując $n' = 10^k n$, a następnie $n = n' - kp$, gdzie $n < p$ otrzymujemy ułamek $\frac{n}{p}$, którego okres zaczyna się tuż po przecinku i nie ma on części całkowitej. Stąd $\frac{n}{p} = 0.\overline{ABCDE}$, a zatem liczba

$$99999 \cdot \frac{n}{p} = 10^5 \cdot \frac{n}{p} - \frac{n}{p} = \overline{ABCDE}$$

jest całkowita. Skoro $n < p$, a p jest liczbą pierwszą, to $p \mid 99999$, czyli $p \mid 3^2 \cdot 41 \cdot 271$. Oba ułamki $1/3$ i $2/3$ mają okres podstawowy długości 1, jednak $1/41 = 0.02439$ oraz $1/271 = 0.00369$, a zatem szukaną sumą jest $41 + 271 = 312$.

Zadanie 39. Cztery osoby siedzą w pokoju i każda z nich posługuje się dokładnie trzema z następujących języków: czeski, niemiecki, angielski, polski i węgierski. Nie znają żadnych innych języków. Jest 10000 możliwych przypisać języków do osób. W ilu z nich jedna osoba może zrobić wykład w języku, który wszyscy zrozumieją?

Wynik. 5680

Rozwiązanie. W $10 = \binom{5}{3}$ możliwych scenariuszach wszyscy posługują się trzema takimi samymi językami. Możliwych scenariuszy, gdy posługują się co najmniej dwoma tymi samymi językami jest $810 = 10 \cdot 3^4 = \binom{5}{2} \cdot 3^4$ (najpierw wybieramy dwa języki, a następnie dla każdej z czterech osób wybieramy trzeci język). Liczba sytuacji, gdy zgromadzeni posługują się co najmniej jednym wspólnym językiem, to $6480 = 5 \cdot 6^4 = \binom{5}{1} \cdot \binom{4}{2}^4$ — wybieramy jeden wspólny język dla wszystkich, a następnie dla każdego dobieramy dwa z czterech pozostałych. Używając zasady włączeń i wyłączeń otrzymujemy wynik: $5 \cdot 6^4 - 10 \cdot 3^4 + 10 = 6480 - 810 + 10 = 5680$.

Zadanie 40. Julia zapisała na tablicy wszystkie ułamki, których licznik i mianownik są dodatnimi liczbami całkowitymi wynoszącymi co najwyżej 100. Następnie zmasowała te, które są skracalne i zapisała na kartce wszystkie pozostałe w porządku rosnącym. Jaki ułamek znajduje się bezpośrednio przed $\frac{2}{3}$ na kartce Julii?

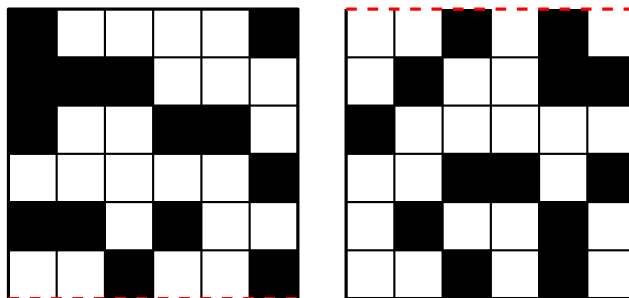
Wynik. 65/98

Rozwiązanie. Niech $\frac{x}{y}$ będzie szukany ułamek. Zauważmy, że skoro $\frac{x}{y} < \frac{2}{3}$, to również $\frac{x+2}{y+3} < \frac{2}{3}$. Oznacza to, że $y \in \{98, 99, 100\}$, gdyż w przeciwnym razie $\frac{x+2}{y+3}$ występowałoby pomiędzy $\frac{x}{y}$ a $\frac{2}{3}$. Dopasowując dla każdego z trzech możliwych y największe możliwe x , otrzymujemy, że $\frac{x}{y}$ wynosi $\frac{65}{98}$, $\frac{65}{99}$ lub $\frac{66}{100} = \frac{33}{50}$. Zachodzi

$$\frac{65}{99} < \frac{33}{50} < \frac{65}{98} < \frac{2}{3},$$

a więc to $\frac{65}{98}$ znajduje się tuż przed $\frac{2}{3}$.

Zadanie 41. Dwadzieścia trzy czarne sześciany jednostkowe są ułożone wewnątrz sześcianu $6 \times 6 \times 6$. Rysunek przedstawia jak uzyskana figura wygląda z góry (rysunek po lewej) oraz z przodu (rysunek po prawej). Białe kwadraciki oznaczają, że nie ma czarnego sześcianu w odpowiadającej mu kolumnie. Wspólna krawędź tych dwóch ścian jest zaznaczona czerwoną przerywaną linią. Wyznacz pole powierzchni czarnej figury.



Wynik. 130

Rozwiązanie. Pole powierzchni czarnej figury jest sumą pól powierzchni wszystkich sześcianów jednostkowych pomniejszonej o dwukrotność liczby par ścian sześcianów, które nakładają się na siebie. Każda taka para występuje w jednym z trzech kierunków, tj. *góra-dół*, *przód-tył* lub *prawo-lewo*.

Gdyby pewna para sześcianów miała wspólną ścianę w kierunku prawo-lewo, to jej ślad w rzucie z góry byłby dwoma kwadratami, których wspólna krawędź rozdzielałaby pewne dwie kolumny. Co więcej, w rzucie z przodu te sześciany zostawiłyby ślad dwóch kwadratów, których wspólna krawędź rozdzielałaby te same kolumny, co krawędź w rzucie z góry. Sprawdzając kolumna po kolumnie nietrudno się przekonać, że taki przypadek nie ma miejsca.

Przypadek przód-tył ma wpływ tylko na rzut z góry. W pierwszej kolumnie zdarza się on dwukrotnie. Skoro pierwsza kolumna rzutu z przodu zawiera dokładnie jeden czarny kwadrat, to pozycje sześcianów w najbardziej wysuniętej na lewo ścianie są jednoznacznie wyznaczone i, w istocie, są tam dokładnie dwie pary sześcianów o wspólnej ścianie w kierunku przód-tył.

Analizując analogicznie kierunek góra-dół, otrzymujemy, że dokładnie dwie pary sześcianów współdzielą ściany w tym kierunku (obie znajdują się w piątej kolumnie na rzutach). Wobec tego poszukiwane pole wynosi $6 \cdot 23 - 2 \cdot 4 = 130$.

Zadanie 42. *Dzielącym rozkładem* dodatniej liczby całkowitej N nazywamy taki ciąg dodatnich liczb całkowitych $d_1, d_2, \dots, d_k$, że $k \geq 1$, $d_1 \neq 1$ oraz zachodzi ciąg podzielności $d_1 \mid d_2 \mid d_3 \mid \dots \mid d_k \mid N$, przy czym $d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_k = N$. Liczbę d_k nazywamy *liderem* tego rozkładu. Jaka jest średnia arytmetyczna liderów wszystkich możliwych dzielących rozkładów liczby 720?

Wynik. 204

Rozwiązanie. Zachodzi $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$. Wykładniki każdej liczby pierwszej p występującej w rozkładzie na czynniki pierwsze liczb $d_1, d_2, \dots, d_k$ tworzą niemalejący ciąg, który sumuje się do wykładnika p w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby 720. Dla $p = 2$ ciąg wykładników może być postaci $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(2, 2)$, $(1, 3)$, (4) (potencjalnie poprzedzony pewną liczbą zer). Dla $p = 3$ są dwa takie ciągi: $(1, 1)$ i (2) . Dla $p = 5$ jest jeden taki ciąg: (1) . Dowolna kombinacja tych ciągów daje dzielący rozkład 720. Stąd, dzielących rozkładów 720 jest 10, a średnia arytmetyczna ich liderów wynosi

$$\frac{2 + 4 + 4 + 8 + 16}{5} \cdot \frac{3 + 9}{2} \cdot 5 = 204.$$

Zadanie 43. Zestaw do gry w Scrabboj składa się z planszy 5×1 i woreczka rozróżnialnych płytek. Na każdej płytce znajduje się dokładnie jedna z liter N, A, B, O, J . Ile istnieje różnych zestawów do Scrabboj, w których liczba możliwych sposobów ułożenia napisu $NABOJ$ wynosi 1440?

Wynik. 9450

Rozwiązanie. Oznaczmy przez n, a, b, o, j to liczby płytek z literami odpowiednio N, A, B, O, J . Szukamy liczby 5-krotek (n, a, b, o, j) , gdzie

$$naboj = 1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Każdy dzielnik pierwszy może być niezależnie rozłożony pomiędzy liczbami n, a, b, o, j , oraz różne rozkłady generują różne 5-krotki. Mamy

$$\binom{5}{1} + \binom{5}{2} \cdot 2 + \binom{5}{2} \cdot 2 + \binom{5}{3} \cdot 3 + \binom{5}{3} \cdot 3 + \binom{5}{4} \cdot 4 + \binom{5}{5} = 126$$

sposobów na rozłożenie 2, co odpowiada następującym podziałom wykładnika 5: 5, 4 + 1, 3 + 2, 3 + 1 + 1, 2 + 2 + 1, 2 + 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1 + 1. Istnieje

$$\binom{5}{1} + \binom{5}{2} = 15$$

sposobów na rozłożenie 3, odpowiadającym podziałom odpowiednio 2 i 1 + 1. Na koniec, istnieje dokładnie

$$\binom{5}{1} = 5$$

sposobów rozkładu 5. Łącznie otrzymujemy

$$126 \cdot 15 \cdot 5 = 9450$$

różnych zestawów do Scrabboj.

Zadanie 44. Znajdź największą dodatnią liczbę całkowitą n , dla której $4^{2021} + 4^n + 4^{3500}$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Wynik. 4978

Rozwiązanie. Zauważmy, że wszystkie trzy składniki sumy są kwadratami liczb całkowitych, ponieważ $4 = 2^2$. Możemy więc obliczyć kwadrat dwóch z nich i otrzymujemy np.

$$(2^{2021} + 2^n)^2 = 4^{2021} + 2 \cdot 2^{2021} \cdot 2^n + 4^n = 4^{2021} + 2^{2022+n} + 4^n.$$

Przyrównując to wyrażenie do wyrażenia z treści zadania otrzymujemy

$$4^{3500} = 2^{2022+n} \iff n = 4978$$

i dla tej wartości z pewnością otrzymamy kwadrat liczby całkowitej. Dwie pozostałe możliwości wyboru dwóch ze składników prowadzą do $n = 541$ i $n = 2761$ poprzez analogiczne obliczenia. Możemy więc założyć, że $n = 4978$ to oczekiwany wynik. Aby to udowodnić, pokażemy, że $4^{2021} + 4^n + 4^{3500}$ nie jest kwadratem dla $n = 4978 + m$, gdzie m jest dodatnią liczbą całkowitą. Wyrażenie

$$4^{2021} + 4^{3500} + 4^{4978+m} = 4^{2021} \cdot (1 + 4^{1479} + 4^{2957+m})$$

jest kwadratem liczby całkowitej wtedy i tylko wtedy gdy $(1 + 4^{1479} + 4^{2957+m})$ jest kwadratem, ponieważ $4^{2021} = (2^{2021})^2$. Ale

$$(2^{2957+m})^2 = 4^{2957+m} < 1 + 4^{1479} + 4^{2957+m} = 1 + 2^{2958} + 4^{2957+m} < 1 + 2 \cdot 2^{2957+m} + 4^{2957+m} = (2^{2957+m} + 1)^2$$

pokazuje że drugi czynnik jest ściśle pomiędzy kwadratami dwóch kolejnych liczb całkowitych. Zatem $n = 4978$ to rozwiązanie którego szukamy.

Zadanie 45. Ile współczynników wielomianu

$$P(x) = \prod_{i=2}^{2021} (x^i + (-1)^i i) = (x^2 + 2)(x^3 - 3)(x^4 + 4) \cdot \dots \cdot (x^{2021} - 2021)$$

jest dodatnich?

Wynik. 1021616

Rozwiązanie. Zauważmy, że wszystkie niezerowe współczynniki wielomianu

$$Q(x) = P(-x) = (x^2 + 2)(-x^3 - 3)(x^4 + 4) \cdot \dots \cdot (-x^{2021} - 2021) = (-1)^{1010} (x^2 + 2)(x^3 + 3)(x^4 + 4) \cdot \dots \cdot (x^{2021} + 2021)$$

są dodatnie. Ponadto, współczynniki te stoją przy x^k dla wszystkich k od 0 do $S := 2 + \dots + 2021 = 2043230$, prócz $k = 1$ i $k = S - 1$. W istocie, rozwijając iloczyn definiujący Q widać, że nie pojawi się tam człon liniowy. To samo dotyczy $k = S - 1$ — aby otrzymać człon z x^{S-1} musielibyśmy z pewnego z nawiasów wybrać liczbę (zamiast x^i), lecz wówczas otrzymany wykładnik wynosiłby co najwyżej $S - 2$.

Pozostaje udowodnić, że każdy inny wykładnik z podanego przedziału ma dodatni współczynnik. Równoważnie, należy wykazać, że najmniejsza liczba m , większa niż 1, której nie można przedstawić w postaci sumy pewnego podzbioru zbioru $A := \{2, 3, \dots, 2021\}$ wynosi $S - 1$ (gdyż, oczywiście, x^0 i x^S mają dodatnie współczynniki). Twierdzimy, że

$$m - 1 = k + (k + 1) + \dots + 2021$$

dla pewnego $k \in A$. Otóż, $m \geq 3$, a zatem $m - 1$ jest przedstawialna w postaci sumy pewnego podzbioru B zbioru A . Gdyby B nie był postaci $\{k, k + 1, \dots, 2021\}$, to pewien z jego elementów moglibyśmy zwiększyć o 1 i dostać reprezentację m , co jest niemożliwe. Co więcej, $k \leq 3$, gdyż w przeciwnym razie $2 + (k - 1) + (k + 1) + (k + 2) + \dots + 2021$ byłoby reprezentacją m . Stąd $m = 1 + 3 + 4 + \dots + 2021 = S - 1$. Zatem wielomian Q ma $\frac{S}{2} + 1$ dodatnich współczynników przy parzystych potęgach x i $\frac{S}{2} - 2$ dodatnich współczynników przy nieparzystych potęgach x . Współczynniki wielomianu P przy parzystych potęgach x są takie same co współczynniki Q , a przy nieparzystych — przeciwne. Zatem P ma dokładnie $\frac{S}{2} + 1 = 1021616$ dodatnich współczynników.

Zadanie 46. Mapa Sześciennego Miasta Jutra wygląda jak siatka sześcienna $4 \times 4 \times 4$. Każdy punkt o współrzędnych całkowitych to skrzyżowanie i każde dwa skrzyżowania odległe o dokładnie 1 są połączone prostą drogą. Skrzyżowanie w centrum miasta, $(2, 2, 2)$, jest zamknięte z powodu prac drogowych. Paweł chce dostać się ze skrzyżowania $(0, 0, 0)$ do skrzyżowania $(4, 4, 4)$ po najkrótszej możliwej ścieżce wiodącej po drogach. Ile jest takich ścieżek?

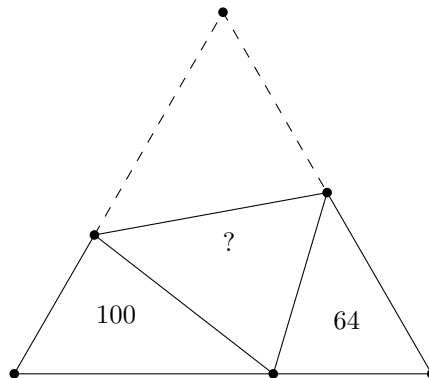
Wynik. 26550

Rozwiązanie. Najpierw obliczymy ile jest najkrótszych możliwych ścieżek bez ograniczeń. Musimy dostać się z $(0, 0, 0)$ do $(4, 4, 4)$. Musimy cztery razy wybrać drogę w kierunku x , cztery w kierunku y i cztery w kierunku z , w dowolnej kolejności. Jeśli wrócimy, otrzymana ścieżka nie będzie najkrótsza. To daje $\frac{12!}{4! \cdot 4! \cdot 4!}$ możliwych ścieżek.

Teraz musimy odjąć te ścieżki, które przechodzą przez $(2, 2, 2)$. Dzięki symetrii wiemy, że ścieżek z $(0, 0, 0)$ do $(2, 2, 2)$ jest tyle samo co z $(2, 2, 2)$ do $(4, 4, 4)$ co równa się $\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$. Dla dowolnej ścieżki z $(0, 0, 0)$ do $(2, 2, 2)$ jest $\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$ możliwych kontynuacji z $(2, 2, 2)$ do $(4, 4, 4)$. Zatem możliwych ścieżek prowadzących przez centrum jest $\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} \cdot \frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{6! \cdot 6!}{2^6}$.

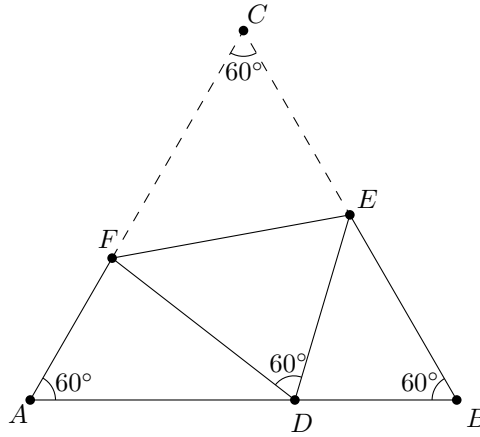
Zatem wszystkich ścieżek jest $\frac{12!}{4!^3} - \frac{6!^2}{2^6} = 26550$.

Zadanie 47. Trójkąt równoboczny został złożony w taki sposób, że jeden z jego wierzchołków trafił dokładnie na przeciwległy bok. Pola nowo utworzonych nieprzykrytych trójkątów wynoszą 100 i 64 jak na rysunku. Znajdź pole zakrytego trójkąta.



Wynik. 98

Rozwiązanie. Oznaczmy odpowiednie punkty jak na rysunku.



Ponieważ trójkąt ABC jest równoboczny, otrzymujemy $\angle BDE + \angle DEB = 120^\circ = \angle BDE + \angle FDA$, czyli $\angle DEB = \angle FDA$ więc $ADF \sim BED$. Ponieważ pola tych trójkątów są w stosunku $100 : 64$, odpowiednie boki mają stosunek $5 : 4$. Oznaczając $r = DB$, $s = BE$, $t = ED$, otrzymujemy długości jak na rysunku. Możemy wyznaczyć następujące równania, używając a jako boku trójkąta równobocznego:

$$a = s + t \quad (2)$$

$$a = \frac{5}{4}(r + t) \quad (3)$$

$$a = \frac{5}{4}s + r \quad (4)$$

$$64 = \frac{1}{2}rs \cdot \sin 60^\circ = rs \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}. \quad (5)$$

Równania liniowe (2)-(4) dają $r = \frac{a}{3}$ i $s = \frac{8a}{15}$. Podstawiając te wartości do równania (5) otrzymujemy

$$1440 = a^2 \sqrt{3} = 4S,$$

gdzie S to pole trójkąta równobocznego. Wynika z tego, że poszukiwane pole A spełnia $100 + 64 + 2A = 360$, więc $A = 98$.

Zadanie 48. Rzucamy monetą do momentu wyrzucenia sekwencji orzeł-reszka-orzeł. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu rzutów nie wystąpiła sekwencja reszka-orzeł-reszka-orzeł?

Wynik. $5/8$

Rozwiązanie. Oznaczmy przez E zdarzenie wystąpienia sekwencji orzeł-reszka-orzeł (dalej będziemy sekwencje oznaczać literami np. ORO) przed $RORO$, a przez $P(E)$ prawdopodobieństwo tego zdarzenia. Dla ustalonego ciągu orłów i reszek s , przez $P(E|s)$ oznaczamy prawdopodobieństwo, że E wystąpi w ciągu zaczynającym się od s i kontynuowanym losowo. Oznaczmy $x = P(E|O)$ i $y = P(E|R)$.

Warunkując ze względu na dwa następne rzuty otrzymujemy, że

$$x = \frac{1}{2}P(E|OO) + \frac{1}{4}P(E|ORR) + \frac{1}{4}P(E|ORO). \quad (6)$$

Analogicznie, warunkując ze względu na trzy następne rzuty otrzymujemy, że

$$y = \frac{1}{2}P(E|RR) + \frac{1}{4}P(E|ROO) + \frac{1}{8}P(E|RORR) + \frac{1}{8}P(E|RORO). \quad (7)$$

Skoro obie sekwencje ORO i $RORO$ są naprzemienne, to

$$\begin{aligned} x &= P(E|O) = P(E|OO) = P(E|ROO), \\ y &= P(E|R) = P(E|RR) = P(E|ORR) = P(E|RORR). \end{aligned}$$

Ponadto, skoro $P(E|ORO) = 1$ i $P(E|RORO) = 0$, to równania (6) i (7) przekształcają się do

$$\begin{aligned} x &= \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{1}{4}, \\ y &= \frac{y}{2} + \frac{x}{4} + \frac{y}{8}. \end{aligned}$$

Stąd $x = \frac{3}{4}$ i $y = \frac{1}{2}$. Wobec tego, szukane prawdopodobieństwo wynosi $P(E) = \frac{1}{2}P(E|O) + \frac{1}{2}P(E|R) = \frac{x+y}{2} = \frac{5}{8}$.

Zadanie 49. Znajdź najmniejszą dodatnią liczbę rzeczywistą x o następującej własności: istnieje co najmniej jedna trójka takich dodatnich liczb rzeczywistych (s, t, u) , że

$$s^2 - st + t^2 = 12,$$

$$t^2 - tu + u^2 = x,$$

i żadne dwie trójki spełniające powyższe równości nie różnią się wyłącznie ostatnią współrzędną.

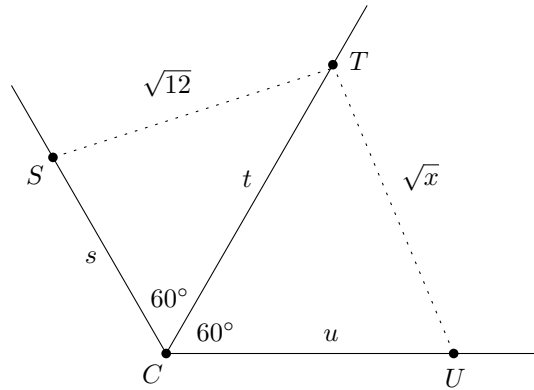
Wynik. 16

Rozwiązanie. Rozważmy takie punkty S, T, U i C na płaszczyźnie, że $CS = s$, $CT = t$, $CU = u$ i

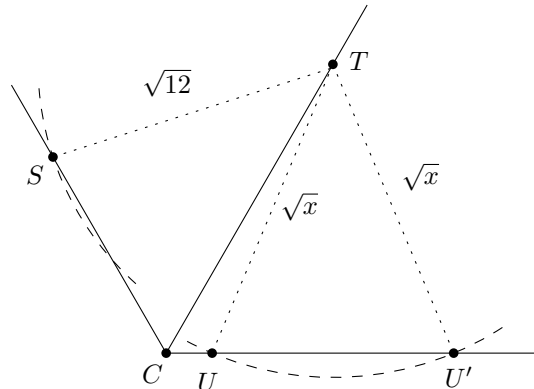
$$\angle SCT = \angle TCU = 60^\circ$$

jak na rysunku poniżej. Z twierdzenia cosinusów ($\cos 60^\circ = 1/2$), równania w zadaniu implikują $ST^2 = 12$, i $TU^2 = x$. Skoro odległość od T do prostej SC wynosi co najwyżej $\sqrt{12}$ z równością wtedy i tylko wtedy gdy $\angle TSC = 90^\circ$, to mamy

$$t \leq \frac{\sqrt{12}}{\sin(60^\circ)} = 4.$$



W naszej argumentacji będziemy przesuwając pewne punkty. Na początku, ustalmy punkt C oraz trzy półproste z niego wychodzące jak na rysunku wyżej. Po nich będziemy przesuwali punkty S, T, U . Jeśli $\sqrt{x} < 4$, to znajdziemy takie położenie odcinka TU (tzn. znajdziemy dopuszczalne wartości t i u), że $CU < CT \leq 4$ oraz $\angle CUT \neq 90^\circ$ (umieszczając U odpowiednio blisko C). Z pierwszej nierówności i warunku na kąt wynika, że okrąg o środku w T i promieniu $\sqrt{x}$ przecina półprostą CU w dwóch różnych punktach U i U' (patrz drugi obrazek). Przeczy to warunkowi jedności u . Druga nierówność oznacza, że okrąg o środku w T i promieniu $\sqrt{12}$ przecina półprostą CS w przynajmniej jednym punkcie S . Te dwa fakty oznaczają, że musi zachodzić $x \geq 4$.



Dla $\sqrt{x} = 4$ (odp. dla dowolnego ustalonego $\sqrt{x} \geq 4$) i dowolnego $0 < t \leq 4$ okrąg o środku w T i promieniu $\sqrt{x}$ przecina półprostą CU w dokładnie jednym punkcie, a zatem warunek na jedność u jest spełniony. Ponadto, analogicznie jak wyżej, okrąg o środku w T i promieniu $\sqrt{12}$ przecina półprostą CS w przynajmniej jednym punkcie S , a zatem trójka $(s, t, u) = (CS, CT, CU)$ spełnia żądany układ warunków. Wobec tego, najmniejszym x spełniającym warunki zadania jest $4^2 = 16$.

Uwaga. Powyższy geometryczny argument może z powodzeniem zostać zastąpiony przez wyróżnikową analizę liczby pierwiastków danych trójmianów z treści zadania.

Zadanie 50. Dla jak wielu $x \in \{1, 2, 3, \dots, 2020\}$ jest możliwe, że Marcin zsumował 2020 kolejnych liczb całkowitych nieujemnych, a Michał zsumował $2020 + x$ kolejnych liczb całkowitych nieujemnych i obydwoj otrzymali taki sam wynik?

Wynik. 1262

Rozwiązanie. Niech n oznacza pierwszy składnik sumy Marcina, a m pierwszy składnik sumy Michała. Wtedy

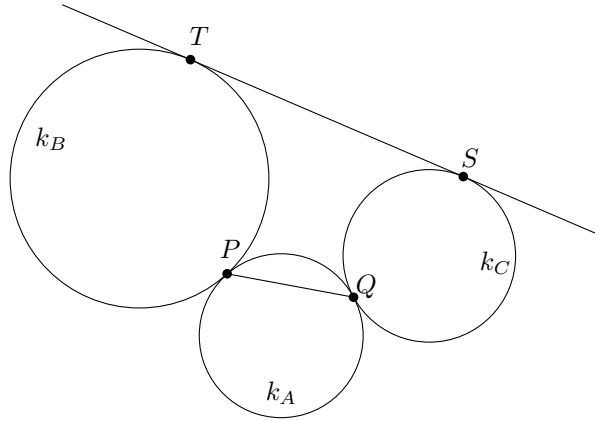
$$\begin{aligned} 2020n + \frac{2019 \cdot 2020}{2} &= (2020 + x)m + \frac{(2019 + x)(2020 + x)}{2}, \\ 2020(n - m) &= \frac{x(2m + 2019 + 2020 + x)}{2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Skoro lewa strona równości (8) jest podzielna przez 4, to prawa strona też musi być, więc $8 \mid x(2m + 2019 + 2020 + x)$. Wyrażenia x oraz $2m + 2019 + 2020 + x$ mają różną parzystość, więc albo x jest liczbą nieparzystą (by wyrażenie w nawiasie mogło być podzielne przez 8) albo $8 \mid x$.

Łatwo sprawdzić, że liczby $x = 2k + 1$ dla $k \in \{0, 1, \dots, 1009\}$, $m = 2020 - k$ oraz $n = 2020 + 3k + 2$ spełniają równość (8). W przypadku $x = 8k$ dla $k \in \{1, 2, \dots, 252\}$ można podobnie sprawdzić, że równość (8) zachodzi dla $m = 1263 - 4k$ oraz $n = 1263 + 9k$ (zauważmy, że m i n są dodatnie dla wszystkich rozważanych wartości k).

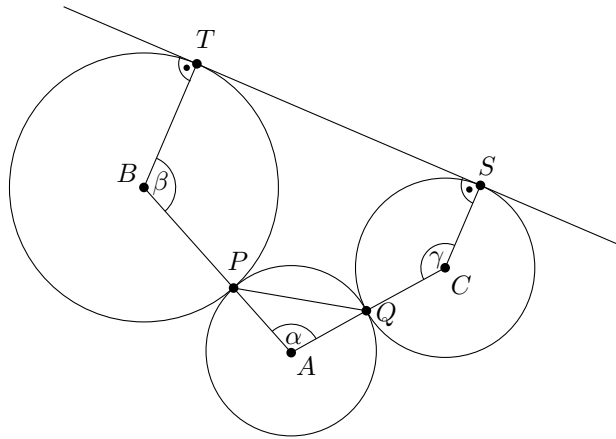
Podsumowując, znaleźliśmy $1010 + 252 = 1262$ możliwe wartości x i udowodniliśmy, że nie ma więcej.

Zadanie 51. Okręgi k_B i k_C są styczne do okręgu k_A odpowiednio w punktach P i Q . Znajdź promień r_A okręgu k_A , jeśli promienie okręgów k_B i k_C są równe odpowiednio $r_B = 5$ i $r_C = 3$, $PQ = 6$ i odcinek styczny TS ma długość 12.



Wynik. $\frac{4+\sqrt{61}}{3} \approx 3.93675$

Rozwiązanie. Oznaczmy środki okręgów odpowiednio przez A , B i C . Niech $\alpha = \angle QAP$, $\beta = \angle PBT$, $\gamma = \angle SCQ$. Skoro $BT \perp TS$ i $CS \perp TS$, to $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$, co wynika z obliczenia sumy kątów wewnętrznych w pięciokącie $TBACS$.



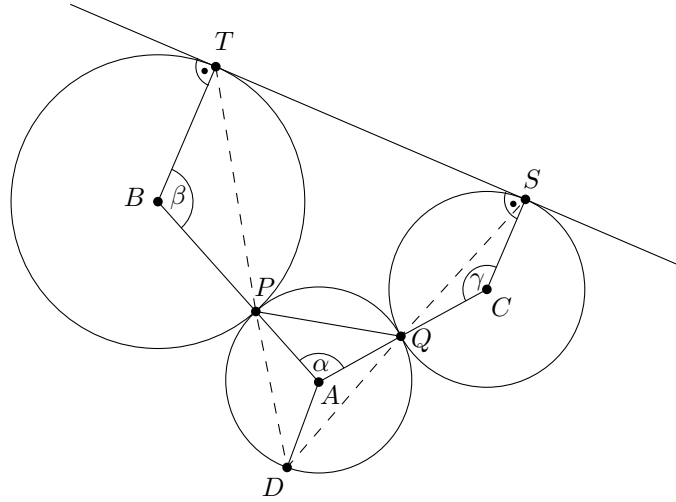
Ponieważ T jest styczną do okręgów k_B i k_C , więc $\angle PTS = \frac{1}{2}\beta$ oraz $\angle TSQ = \frac{1}{2}\gamma$. Skoro

$$\angle SQP = 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}\alpha) - (90^\circ - \frac{1}{2}\gamma) = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma),$$

to $\angle PTS + \angle SQP = 180^\circ$, a więc na czworokącie $PQST$ można opisać okrąg. Niech D oznacza punkt przecięcia prostych TP i SQ . Z opisywalności okręgu na $PQST$ otrzymujemy, że trójkąty DST i DQP są podobne. Stąd

$$\frac{PQ}{TS} = \frac{DP}{DS} = \frac{DQ}{DT}.$$

Ponownie wykorzystując równości $\angle PTS = \frac{1}{2}\beta$ i $\angle TSQ = \frac{1}{2}\gamma$, wnioskujemy, że $\angle SDT = \angle QDP = \frac{1}{2}\alpha$, co oznacza, iż D leży na okręgu k_A .



Wobec tego mamy $\angle DPA = \angle TPB$, a więc trójkąty APD i BPT są również podobne. Analogicznie $\triangle ADQ \sim \triangle CSQ$. Podobieństwa te implikują równości

$$\frac{TP}{DP} = \frac{r_B}{r_A} \quad \text{oraz} \quad \frac{SQ}{DQ} = \frac{r_C}{r_A},$$

które prowadzą do równości

$$\frac{DT}{DP} = \frac{r_A + r_B}{r_A} \quad \text{oraz} \quad \frac{DS}{DQ} = \frac{r_A + r_C}{r_A}.$$

Łącząc otrzymane równości otrzymujemy, że

$$\frac{TS^2}{PQ^2} = \frac{DS}{DP} \cdot \frac{DT}{DQ} = \frac{(r_A + r_B) \cdot (r_A + r_C)}{r_A^2}.$$

Wstawiając wartości liczbowe z treści zadania otrzymujemy równanie kwadratowe na r_A :

$$\frac{144}{36} \cdot r_A^2 = r_A^2 + 8r_A + 15 \quad \Longleftrightarrow \quad 3r_A^2 - 8r_A - 15 = 0,$$

które ma dwa rozwiązania:

$$\frac{8 \pm \sqrt{64 + 12 \cdot 15}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{61}}{3}.$$

Niemniej, tylko jedno z nich jest dodatnie, a zatem szukaną wartością jest $\frac{4+\sqrt{61}}{3} \approx 3.93675$.