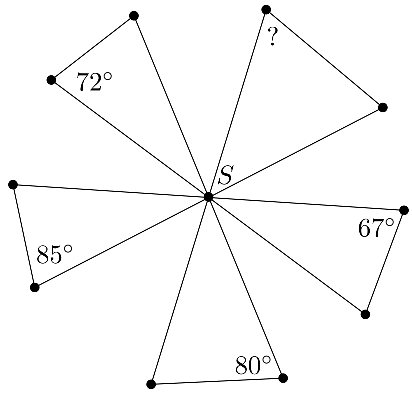
Problem 1. Когда бабушку Марию спросили о ее возрасте, она дала ответ в виде следующей загадки: У меня пятеро детей, и они разного возраста, каждый родился через 4 года после предыдущего. Мой первый ребенок родился, когда мне был 21 год, а сейчас моему младшему ребенку 21 год. Найдите возраст бабушки.

Result. 58

Solution. Очевидно, что возраст детей $21, 21+4, \ldots, 21+4\cdot 4$. Возраст бабушки можно легко вычислить как $21+4\cdot 4+21=58$.

Problem 2. Старый винт ветряной мельницы состоит из пяти треугольных лопастей, ребра которых выходят из вершины S и равны, вершины соединены как на рисунке. Определите размер угла, обозначенного вопросительным знаком, в градусах.



Result. 56

Solution. Сумма углов пяти равнобедренных треугольников с вершиной S равна $180°$. Таким образом, сумма пяти отмеченных углов составляет $\frac{5\cdot 180°-180°}{2}=360°$, из этого следует, что величина неизвестного угла равна $360°-67°-80°-85°-72°=56°$.

Problem 3. Ученики класса имеют возможность принять участие в трех различных соревнованиях по легкой атлетике. Каждый ученик должен принять участие по крайней мере в одном соревновании. В классе 22 ученика выбрали спринтерскую гонку, 13 учеников пошли на прыжки в длину, и 15 учеников приняли участие в соревнованиях по стрельбе. Кроме того, известно, что 8 учеников выбрали спринтерскую гонку и прыжки в длину, 7 учеников выбрали спринтерскую гонку и стрельбу, и 6 учеников сделали выбор в пользу прыжка в длину и стрельбы. Также есть 3 очень амбициозных ученика, которые приняли участие во всех трех соревнованиях. Сколько учеников в классе?

Result. 32

Solution. Сложите количество участников в каждом соревновании и вычтите из результата количество учеников, которые выбрали два конкурса. Таким образом, очень мотивированные ученики, которые приняли участие во всех трех конкурсах, вычитаются дважды, их количество должно быть добавлено. Таким образом, конечный результат составляет $22+13+15-8-7-6+3=32$.

Problem 4. Число называется *суперчётным*, если все его цифры чётные. Сколько существует пятизначных суперчётных чисел таких, что при сложении с числом 24680 результат будет тоже суперчётный?

Result. 90

Solution. Есть пять чётных однозначных чисел, то есть цифр. Чтобы гарантировать, что результат сложения будет суперчётное число, сумма цифр в каждом разряде должна быть четной и меньше 10. Принимая во внимание, что число не может начаться с 0, у нас есть 3 возможности для каждой из двух первых цифр, 2 возможности для третьей цифры, одна возможность для четвертой цифры и 5 возможностей для последней. Умножая, мы получаем $3\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 5=90$.

Problem 5. Давным-давно жил мудрый король. Его замок был в центре четырех концентрических круговых стен (то есть с общим центром) радиусов 50, 100, 150, 200, и земля, окруженная самой большой стеной, использовалась в качестве жилой земли (включая землю внутри других стен). Были мирные времена, поэтому он решил снести все четыре стены и построить только одну круглую стену, опять же со своим замком в центре, максимально возможного радиуса из материала старых стен. Каково соотношение площади новой жилой земли и площади старой, ограниченной самой большой стеной (ответ дайте в виде неправильной дроби)?

Result. 25/4

Solution. Известно, что сумма периметров четырех круглых стен будет равна периметру новой круглой стены. Обозначим радиус новой круговой стены через r. Тогда $2\pi \cdot 50 + 2\pi \cdot 100 + 2\pi \cdot 150 + 2\pi \cdot 200 = 2\pi \cdot r$, где r - это сумма искомого радиуса, т.е. $r = 500$. Так как увеличение жилой земли определяется соотношением между площадью, ограниченной новой стеной, и площадью, ограниченной самой большой старой стеной, то это $\frac{\pi \cdot 500^2}{\pi \cdot 200^2} = 25/4$.

Problem 6. Зоя пытается открыть замок. Она знает следующее о его четырехзначном коде:

- все его цифры различны,
- числа 137 и 17 — его делители,
- сумма его цифр есть наименьшее простое число из возможных вариантов.

Каков код?

Result. 9316

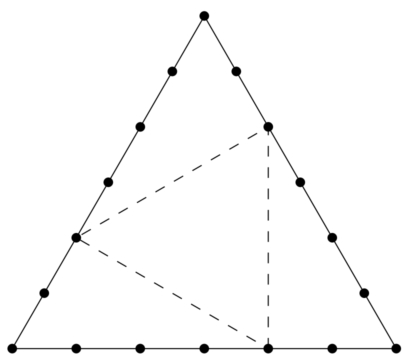
Solution. Так как искомое число делится на простые числа 137 и 17, оно должен быть кратным $137 \cdot 17 = 2329$. Обратите внимание на то, что это число не соответствует условию и что это число может быть умножено только на 2, 3, или 4, чтобы остаться четырехзначным числом. Мы вычисляем $2329 \cdot 2 = 4658$, $2329 \cdot 3 = 6987$ и $2329 \cdot 4 = 9316$, которые имеют сумму цифр 23, 30, and 19 соответственно. Так как 19 является наименьшим простым из этих чисел, число 9316 открывает замок.

Problem 7. На столе есть четыре многоугольника — один равносторонний треугольник со стороной длины 1 и три других равных правильных многоугольника также со стороной длины 1. Каждые два из четырех многоугольников имеют ровно одну общую сторону, и ни один из них не пересекается с другим. Каков периметр полученной фигуры, не считая общих сторон?

Result. 27

Solution. Предположим, что равные многоугольники имеют n сторон каждый. Тогда полученная фигура имеет $3(n-3)$ сторон, так как три стороны всех многоугольников, включая треугольник, являются общими. Нам нужно только определить n. Так как внешний угол равностороннего треугольника составляет $300°$, из-за симметрии внутренний угол равных многоугольников составляет $150°$. Так как сумма внутренних углов $n-$угольника равна $(n-2) \cdot 180°$, мы должны решить уравнение $150n = 180(n-2)$, которое верно при $n = 12$. Подставляя в записанную выше формулу, мы получаем, что в результате многоугольник имеет $3 \cdot 9 = 27$ сторон.

Problem 8. Рассмотрим равносторонний треугольник с отмеченными точками (в том числе три вершины), разделяющими каждую из его сторон на 2021 равных отрезков. Определите количество всех возможных равносторонних треугольников с вершинами в отмеченных точках. На рисунке показан один из возможных треугольников для случая, когда каждая сторона данного равностороннего треугольника была разделена на 6 равных частей.



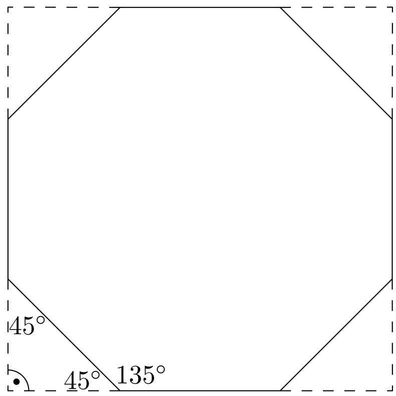
Result. 8081

Solution. Будем называть равносторонние треугольники просто треугольниками. Рассмотрим исходный треугольник, тогда $3 \cdot 2020$ треугольников имеют ровно одну общую вершину с исходным треугольником, 2020 для каждой вершины, и, наконец, есть 2020 треугольников, не имеющих общей вершины с исходным. Легко заметить, что все эти треугольники различны и нет других треугольников. В общей сложности, у нас есть $1 + 3 \cdot 2020 + 2020 = 8081$ искомых треугольников.

Problem 9. Из квадратного листа бумаги Вероника отрезает четыре угла таким образом, что образуется правильный восьмиугольник. Отрезанный мусор имеет общую площадь 300. Какова длина стороны правильного восьмиугольника?

Result. $\sqrt{300} \doteq 17.32051$

Solution. Внутренние углы правильного восьмиугольника равны 135°. Таким образом, треугольники, отрезанные Вероникой, являются прямоугольными равнобедренными треугольниками, которые дополняют до квадрата правильный восьмиугольник. Из этого следует, что длина стороны правильного восьмиугольника равна $\sqrt{300}$.



Problem 10. Найдите самое большое трехзначное число n, удовлетворяющее следующим свойствам:

1. сумма цифр числа n равна 16,
2. произведение цифр числа n не равно 0, но имеет 0 в разряде единиц,
3. сумма цифр в произведении цифр числа n равна 3.

Result. 853

Solution. Из второго условия мы получаем, что по крайней мере одна цифра n должна быть 5 и по крайней мере одна цифра должна быть чётной. Тем не менее, ни одна из цифр не может быть 0. Принимая это во внимание, мы получаем возможности 5, 2, 9 или 5, 4, 7 или 5, 6, 5 или 5, 8, 3, вытекающие из первого условия. Из этих вариантов только 5, 8, 3 удовлетворяет последнему условию, тогда наибольшее трехзначное целое число 853.

Problem 11. Ровно пять цифр должны быть удалены из числа 6437051928 так, чтобы полученное пятизначное число было самым большим из возможных. Каким будет полученное число?

Result. 75928

Solution. Самое большое количество десятков тысяч, которое может быть оставлено после удаления не более пяти цифр слева, равно 7. Поскольку это получено путем удаления трех цифр слева, ясно, что остальные две цифры, которые будут удалены, это 0 и 1. Таким образом, 75928 является ответом.

Problem 12. Пусть n положительное целое число. Рассмотрим возрастающую последовательность S_n, начинающуюся с 1 и имеющую постоянную разность n между двумя последовательными членами. Например, S_2 — это последовательность $1, 3, 5, \ldots$. Для какого количества значений n последовательность S_n имеет число 2021 в качестве члена последовательности?

Result. 12

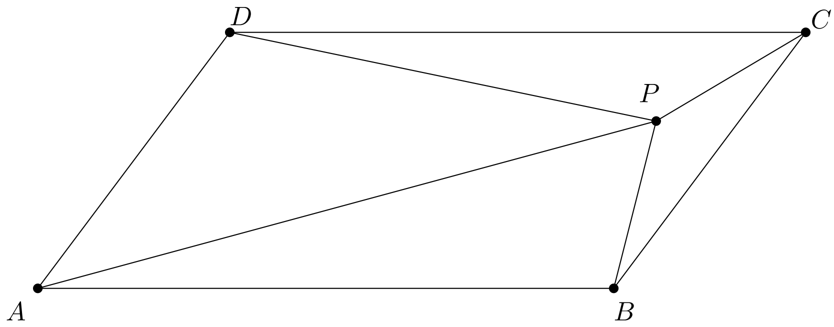
Solution. Число 2021 появляется в качестве члена последовательности S_n тогда и только тогда, когда $2021 = 1+an$ для некоторого положительного целого a. Другими словами, $2020 = an$. Значит, n должно быть делителем 2020. Разложение на простые множители 2020 имеет вид $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$. Любой делитель 2020 получается как произведение множителей из этого разложения. Мы можем взять простой делитель 2 ноль, один или два раза, то есть имеется 3 возможности. Простой делитель 5 можетт быть взят или нет — это 2 возможности, и то же самое с делителем 101. В общей сложности, у нас есть $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ способа составить некоторый делитель числа 2020. Таким образом, 2021 может быть членом 12 последовательностей.

Problem 13. Существует 90-метровый коридор с десятью окнами, каждое окно расположено от соседних на расстоянии 10 метров. Томми поставил семь роботов напротив семи различных окон, и включил их всех в одно и то же время. При включении каждый робот движется с постоянной скоростью 10 метров в минуту в некотором направлении, пока не достигнет конца коридора, где он разворачивается и возвращается назад. Томми измерял время до первого момента, когда каждый робот уже встретился со всеми остальными. Определите наибольшее значение времени в секундах, которое он мог получить.

Result. 510

Solution. Для фиксированного робота A можно определить последнего робота, которого A встретит и вычислить время, когда это произойдет. Можно заметить, что это время составляет не более 8.5 минут, что равно 510 секунд, это и есть искомое время.

Problem 14. Внутри параллелограмма $ABCD$ есть точка P, такая что площадь треугольника CDP в три раза больше площади треугольника BCP и равна одной трети площади треугольника APD. Найдите площадь треугольника ABP, если площадь треугольника CDP равна 18.



Result. 42

Solution. Треугольники APD и BCP составляют половину площади параллелограмма. Таким образом, площадь треугольника ABP составляет

$$\left(\frac{1}{3}+3\right)\cdot 18-18=42.$$

Problem 15. Деление чисел 1058, 1486 и 2021 на положительное целое число $d>1$ дает один и тот же остаток. Найдите делитель d.

Result. 107

Solution. Разность между числами составляет $1486-1058=428$ и $2021-1486=535$. Поскольку данные числа дают один и тот же остаток при делении на d, разности должны быть кратными d. Наибольший общий делитель чисел 428 и 535 будет простое число 107, который и есть искомое целое число d.

Problem 16. На футбольном стадионе скамейка запасных имеет четырнадцать одиночных стульев. Новое руководство команды, состоящее из тренера, помощника тренера, менеджера и физиотерапевта, хочет познакомиться со всеми игроками. Поэтому во время игры они хотят сидеть на скамейке запасных среди десяти запасных игроков таким образом, чтобы каждый член тренерской команды сидел между двумя игроками. Сколько способов существует для руководства выбрать свои четыре стула для достижения этой цели?

Примечание: Использование двух разных вариантов рассадки на выбранных четырех стульях считается как два различных способа.

Result. 3024

Solution. Представьте себе десять запасных игроков, стоящих в ряд. Есть девять мест между десятью игроками, и каждое место может быть занято не более чем одним членом тренерской команды. Таким образом, они имеют $9\cdot 8\cdot 7\cdot 6=3024$ возможности сесть в нужном порядке.

Problem 17. Основанием правильной пирамиды является квадрат с площадью равной 1, в то время как площадь полной поверхности пирамиды равна 3. Каков её объем?

Result. $\sqrt{3}/6 \doteq 0.288675$

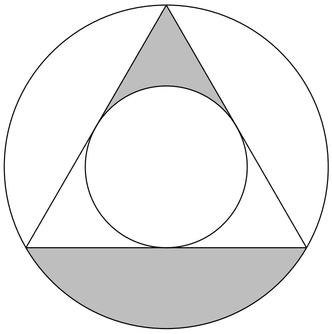
Solution. Стороны основания равны 1. Если площадь полной поверхности 3, каждая из её четырех боковых треугольных граней должна иметь площадь $1/2$, а, высоту равную 1. Таким образом, сечение, проведённое через вершину пирамиды и высоты двух противоположных боковых граней образует равносторонний треугольник со стороной 1, высота которого является высотой пирамиды. Таким образом, высота равна $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Так как объем пирамиды составляет одну треть от произведения площади основания на высоту, мы получаем объем $\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}=\frac{1}{6}\sqrt{3}$.

Problem 18. Волшебная машина Кана преобразует жидкости. Если она получает чистую воду, она преобразует 6 % воды в вино и оставляет оставшиеся 94 % нетронутыми. Если она получает чистое вино, то она преобразовывает 10 % его в воду и оставляет остальные 90 % нетронутыми. Если она получает смесь, она действует на компоненты отдельно, как описано выше. Мария купила воду и вино, 6000 литров в общей сложности, и вылила все в машину. После того, как машина остановилась, Мария поняла, что смесь осталась неизменной. Сколько там было литров вина?

Result. 2250

Solution. Обозначим через x количество вина и через z количество воды в литрах до того, как машина Кана была использована. Мы знаем, что $0.06z$ литров воды превращается в вино и $0.1x$ литров вина в воду, и что x одинаковое до и после запуска машины. Таким образом, имеем $0.06z = 0.1x$. Учитывая, что $x + z = 6000$, можно записать $0.06(6000 - x) = 0.1x$. Решая относительно x, получим $6000 \cdot \frac{3}{8} = 2250$.

Problem 19. На рисунке изображен равносторонний треугольник с описанной и вписанной окружностями. Найдите площадь закрашенной области, если площадь круга, ограниченного описанной окружностью, равна 140.



Result. 35

Solution. Легко вычислить, что радиус вписанной окружности равен половине радиуса описанной окружности. Таким образом, площадь вписанного круга равна $\frac{140}{4} = 35$. Кроме того, закрашенная область составляет ровно $\frac{1}{3}$ разности площадей двух кругов, то есть 35.

Problem 20. Известно, что произведение 2021 положительных целых чисел в два раза больше их суммы. Каково наибольшее возможное значение первого из чисел.

Result. 4044

Solution. Обозначим положительные целые числа как $c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_{2020} \geq c_{2021} \geq 1$. Требуется определить максимально возможное значение c_1 в предположении, что имеет место равенство

$$c_1 \cdots c_{2021} = 2 \cdot (c_1 + \cdots + c_{2021}) \tag{1}$$

. Разделив равенство на левое выражение и заменив в знаменателе некоторых c_i на 1, получим следующую оценку

$$1 = 2\left(\frac{1}{c_2 \cdots c_{2021}} + \cdots + \frac{1}{c_1 \cdots c_{2020}}\right) \leq 2\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{2019}{c_1 c_2}\right) = 2\frac{2019 + c_1 + c_2}{c_1 c_2}.$$

Умножим на $c_1 c_2$ и преобразуя, получим

$$(c_1 - 2)(c_2 - 2) = c_1 c_2 - 2c_1 - 2c_2 + 4 \leq 2 \cdot 2019 + 4 = 4042.$$

Если $c_2 \geq 3$, то имеем $c_1 \leq 4044$ и набор чисел $c_1 = 4044$, $c_2 = 3$ и $c_3 = \cdots = c_{2021} = 1$ удовлетворяет условию (1), то есть решение существует. С другой стороны, если $c_2 \leq 2$, то числа $c_2 \geq c_3 \cdots \geq c_{2021}$ состоят из $k \geq 0$ двоек и $2020 - k$ единиц, и условие (1) принимает вид

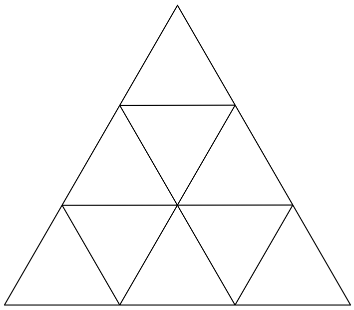
$$c_1 2^k = 2(c_1 + 2k + 2020 - k).$$

. Выражение можно упростить к виду $c_1(2^{k-1} - 1) = 2020 + k$, и получаем что для $k \leq 1$ не существует c_1, удовлетворяющих этому равенству. Для $k \geq 2$ имеем

$$c_1 = \frac{2020 + k}{2^{k-1} - 1} \leq 2022 < 4044$$

. Поэтому ответ есть 4044.

Problem 21. Девять маленьких треугольников, изображенных на рисунке ниже, должны быть заполнены различными положительными целыми числами, таким образом, чтобы любые два числа в соседних треугольниках имели общий делитель, больший 1. Какова наименьшая возможная сумма девяти записанных чисел?



Result. 59

Solution. Прежде всего, обратите внимание, что есть три ячейки с одной соседней, три - с двумя и три - с тремя соседями. Это означает, что, если простое число p является одним из девяти чисел, то по крайней мере одно число, кратное p, также должно быть среди девяти чисел. Во-вторых, обратите внимание, что 1 не может быть одним из девяти чисел. Обозначим сумму чисел в ячейках через S.

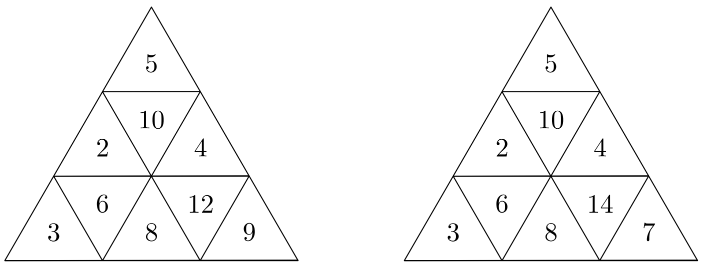
Если среди чисел есть простое число $p \geq 11$, то, по крайней мере, одно число кратно $k \cdot p$ с $k \geq 2$ также должно присутствовать. Заполните оставшиеся семь ячеек самыми маленькими возможными числами, независимо от того, соответствуют ли они правилам.

Тогда $S \geq 2+3+4+5+6+7+8+p+k\cdot p = 35+(k+1)\cdot p \geq 35+33 = 68$.

Теперь предположим, что нет простого числа $p \geq 11$ в заполненных ячейках, и рассмотрим четыре подслучая:

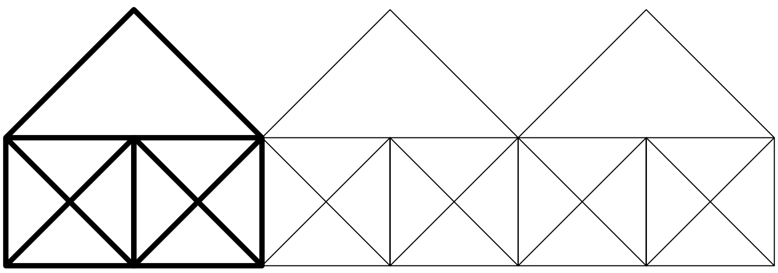
- Присутствуют 5 и 7: $S \geq 5+k_5\cdot 5+7+k_7\cdot 7+2+3+4+6+8 = (k_5+1)\cdot 5+(k_7+1)\cdot 7+23 \geq 15+21+23 = 59$
- Число 5 присутствует, но нет числа 7: $S \geq 5+k\cdot 5+2+3+4+6+8+9+\begin{cases} 10 \geq 20+32+10 = 62 & \text{для} \quad k \geq 3 \\ 12 = 15+32+12 = 59 & \text{для} \quad k = 2 \end{cases}$
- Нет ни числа 5, ни числа 7: $S \geq 2+3+4+6+8+9+10+12+14 = 68$
- Число 7 присутствует, но нет числа 5: $S \geq 2+3+4+6+7+8+9+10+k\cdot 7 \geq 49+14 = 63$

Таким образом, можно сделать вывод, что 59 является кандидатом на минимальную сумму. В самом деле, оба набора номеров с суммой 59 могут быть использованы в соответствии с правилами:



Таким образом, ответ 59.

Problem 22. Лотта неоднократно рисует один и тот же дом: он состоит из двух равных квадратов, а равнобедренный прямоугольный треугольник служит крышей. Каждый новый дом ставится рядом с имеющимися. На рисунке можно увидеть ее первые три дома:



Какое минимальное количество домов она должна нарисовать, чтобы на рисунке можно было насчитать по крайней мере 2021 треугольник?

Result. 93

Solution. Предположим, что площадь дома равна 3.

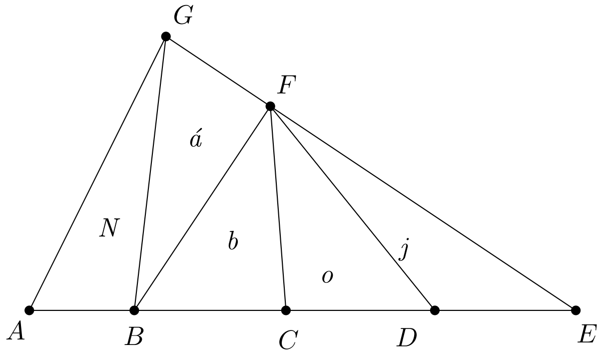
В первом доме 8 треугольников с площадью $1/4$, 8 треугольников с площадью $1/2$ и 3 треугольника с площадью 1. Количество треугольников равно 19.

Во втором доме, мы можем найти такое же количество треугольников, как в первом доме плюс 2 треугольника с площадью 1, которые образуются из частей двух домов. Таким образом, второй дом дает 21 треугольник.

Начиная с дома номер 3, каждый дополнительный дом дает количество треугольников второго дома плюс один треугольник площади 4, который составлен из частей трёх домов. Таким образом, каждый дополнительный дом даёт 22 треугольника.

Так как $2021 - 19 - 21 = 1981$ и $1981 = 90 \cdot 22 + 1$, Лотта должна нарисовать $2 + 90 + 1 = 93$ дома.

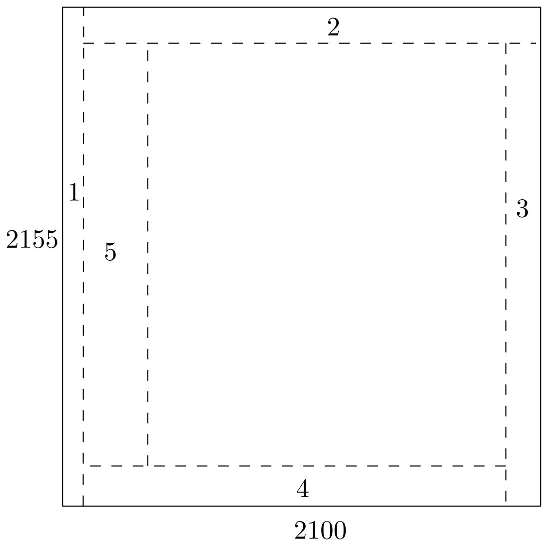
Problem 23. Каждый из пяти треугольников N, $á$, b, o, j имеет одинаковую площадь. Найдите AB, если $CD = 5$.



Result. $\frac{15}{4}$

Solution. Коэффициент подобия треугольников BEG и BEF равен $4 : 3$. Так как эти треугольники имеют общее основание BE, соответствующие высоты также должны иметь соотношение $4 : 3$. Так как треугольники ABG и CDF имеют одинаковую площадь, заключаем, что $AB = \frac{3}{4}CD = \frac{15}{4}$.

Problem 24. Анна имеет большую бумагу прямоугольной формы с боковыми сторонами длины 2155 и 2100. Она отрезает полосу шириной 1 вдоль длинной стороны, затем, продолжая по часовой стрелке, полосу шириной 2 вдоль более короткой стороны и снова полосу шириной 3 вдоль более длинной стороны. Она продолжает отрезать полосы увеличивая ширину на единицу до тех пор, пока это возможно, как показано на рисунке.

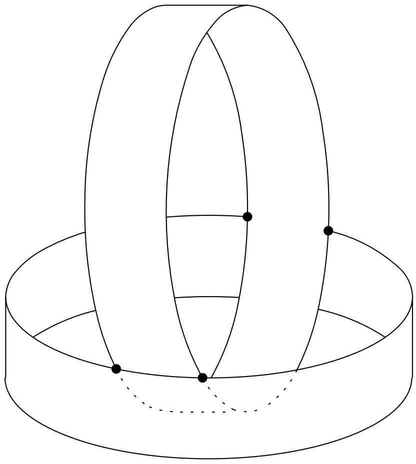


В конце концов, она заканчивает прямоугольником, от которого она больше не может отрезать полосу с увеличением ширины. Найдите площадь этого прямоугольника.

Result. 6375

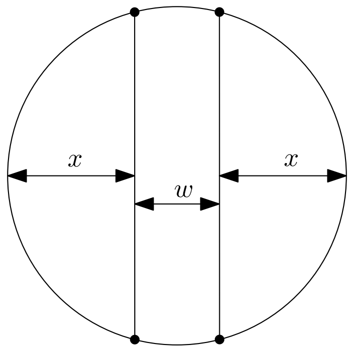
Solution. Анна может отрезать полоски нечетной ширины до тех пор, пока $1+3+\cdots+2n-1 = n^2 < 2100$. Так как $45^2 = 2025 < 2100 < 2116 = 46^2$, полоса шириной 89 является последней возможной, имеющей нечетную ширину. Кроме того, она может отрезать полоски чётной ширины до тех пор, пока $2 + 4 + \cdots + 2n = n(n + 1) < 2155$. Так как $45 \cdot 46 = 2070 < 2155 < 2162 = 46 \cdot 47$, полоса ширины 90 является последней возможной, имеющей чётную ширину. Таким образом, оставшийся прямоугольник имеет площадь $(2100 - 2025) \cdot (2155 - 2070) = 75 \cdot 85 = 6375$.

Problem 25. Одно из двух одинаковых колец радиуса 4 и неизвестной ширины w лежит горизонтально на столе, а второе стоит вертикально, касается первого ровно в четырех точках (см. рисунок), а его самая нижняя точка находится на высоте 1 над столом. Каково значение w?



Result. $\frac{10}{3}$

Solution. Обозначим искомую ширину через w и рассмотрим вертикальную проекцию двух колец на столе.



Высота самой нижней точки вертикального кольца над столом равна $1 = w - x$. Таким образом, $8 = 2x + w = 2(w-1) + w = 3w - 2$ и, получим $w = \frac{10}{3}$.

Problem 26. Многочлен степени 14 имеет целые коэффициенты, старший из них является положительным, и многочлен имеет 14 различных целых корней. Многочлен в нуле равен положительному числу p. Определите наименьшее возможное значение p.

Result. 29030400

Solution. Многочлен может быть записан как $c \cdot (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_{14})$ для некоторых различных целых $a_1, a_2, \dots, a_{14}$ и числа c. Старший коэффициент тогда равен c, поэтому c является положительным. Значение в 0 равно свободному члену, то есть произведению $c \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{14}$. Так как мы хотим минимизировать его, то выберем значение для c как можно меньшим, то есть $c = 1$. Чтобы свести к минимуму оставшееся произведение корней, мы должны взять их значения как можно ближе по модулю к нулю, то есть $1, -1, 2, -2 \dots$. Необходимо выбрать четное количество отрицательных чисел, что приводит к результату $6! \cdot 8! = 29030400$.

Problem 27. Своим обычным почерком Беата пишет цифры 4, 5 и 7 с помощью двух черт, а все остальные цифры с помощью одной черты (черта - линия, которая проведена без отрыва от бумаги). Сколько черт она использует, если она напишет все целые числа от 1 до 2021, включая эти числа?

Result. 8783

Solution. При написании целых чисел от 1 до 2021 она запишет 9 однозначных чисел, 90 двузначных чисел, 900 трехзначных чисел и $2021 - 1000 + 1 = 1022$ четырехзначных чисел. В общей сложности она запишет $9 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 + 1022 \cdot 4 = 6977$ цифр. Для написания каждой цифры, она проводит одну черту, и еще одну дополнительную черту для каждой цифры, которая равна 4, 5 или 7. Поэтому достаточно подсчитать, сколько таких цифр написано. Поскольку число 2021 не содержит ни одной цифры 4, 5 или 7, мы рассматриваем только целые числа до 2020 включительно.

Посчитаем количество цифр 4, которые она запишет. Числа, которые имеют цифру 4 в разряде единиц составляют 1/10 всех чисел до 2020, то есть 202 числа. Цифра 4 записана в разряде десятков в 1/10 от всех чисел до 2000 и не встречается в разряде десятков чисел от 2001 до 2020. В общей сложности это 200 раз. Аналогично, цифра 4 находится в разряде сотен 200 раз. В общей сложности, цифра 4 написана $202 + 200 + 200 = 602$ раз. То же самое происходит с цифрами 5 и 7.

Итак, Беата запишет 6977 цифр, из которых $3 \cdot 602 = 1806$ это 4, 5 или 7. Таким образом, она напишет $6977 + 1806 = 8783$ черт.

Problem 28. Таблица ниже должна быть заполнена цифрами $1, 1, 2, 2, \ldots, 8, 8$ таким образом, что для каждого используемого числа n есть точно n других ячеек между двумя ячейками, в которых располагаются числа n. Три таких числа уже размещены заранее:

					6	7		2							

Вставьте оставшиеся числа в соответствии с правилами и запишите ответ в виде 4-значного числа из закрашенной области. Для $1, 1, 2, 2, 3, 3$ пример правильно заполненной таблицы:

3	1	2	1	3	2

Result. 3845

Solution. Для удобства мы представим таблицу данных как массив f размерности шестнадцать. Из трех данных элементов $f(6) = 6$, $f(7) = 7$, $f(9) = 2$, мы однозначно получаем $f(13) = 6$, $f(15) = 7$ и $f(12) = 2$.

					6	7		2			2	6		7	

В принципе существуют две различные стратегии: либо посмотреть, где может быть размещена конкретная пара чисел, либо решить, какие числа возможны для конкретной ячейки, как в Судоку.

В качестве примера мы рассмотрим возможности для пары из 3. Есть три возможности: либо $f(1) = f(5) = 3$ или $f(4) = f(8) = 3$ или $f(10) = f(14) = 3$.

Легко видеть, что случай $f(10) = f(14) = 3$ оставляет единственную возможность $f(16) = 4$ для заполнения $f(16)$ и, как следствие, мы получаем $f(11) = 4$. Но тогда мы не можем разместить пару из 8. Случай $f(4) = f(8) = 3$ приводит к двум возможностям для пары из 5, а именно $f(5) = f(11) = 5$ или $f(10) = f(16) = 5$. Обе альтернативы сразу же приводят к противоречию.

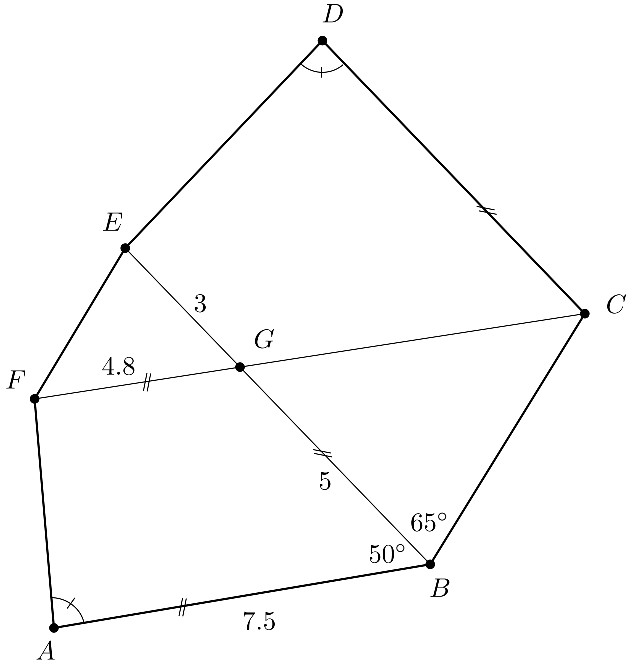
Теперь $f(1) = f(5) = 3$ является единственной оставшейся возможностью $f(2) = f(11) = 8$ и единственный способ заполнить оставшиеся ячейки по правилам $f(4) = f(10) = 5$, $f(3) = f(8) = 4$ и, наконец, $f(14) = f(16) = 1$. $f(14) = f(16) = 1$

3	8	4	5	3	6	7	4	2	5	8	2	6	1	7	1

Таким образом, единственное решение 3845.

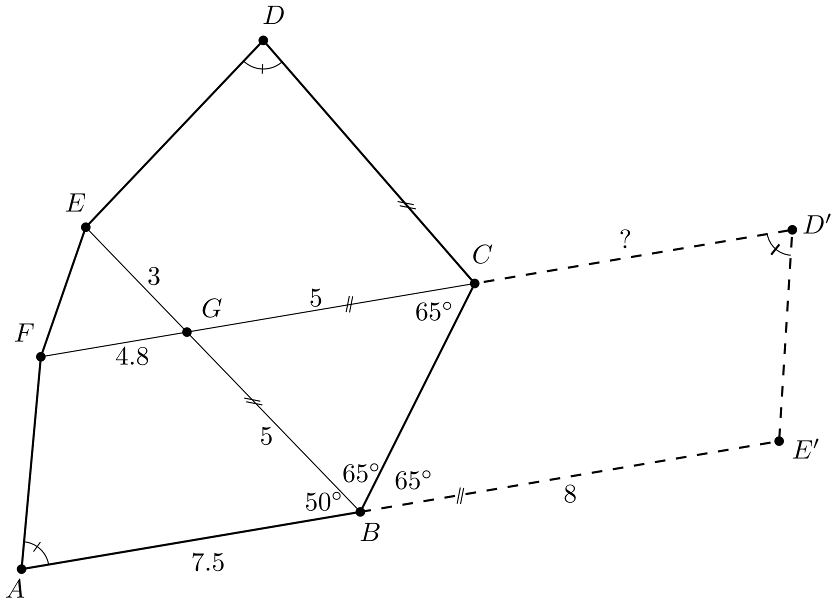
Problem 29. Выпуклый шестиугольник $ABCDEF$, в котором G — точка пересечения его диагоналей BE и CF, удовлетворяет следующим условиям, указанным на рисунке: $AB = 7.5$, $BG = 5$, $GE = 3$, $GF = 4.8$, $\angle BAF = \angle CDE$, $\angle ABG = 50°$, $\angle CBG = 65°$, сторона AB параллельна CF, а сторона CD параллельна BE.

Определите длину CD.



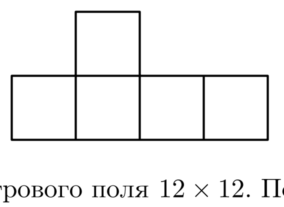
Result. $5.7 = \frac{57}{10}$

Solution.



Так как $50° + 65° + 65° = 180°$ и есть две пары параллельных отрезков, то построим параллелограмм $AE'D'F$ со стороны отрезка BC (это действительно параллелограмм, так как $\angle BAF = \angle CDE$; см. рисунок). Аналогичный параллелограмм можно построить, используя вершины D, E вдоль BC. Учитывая, что треугольник BCG равнобедренный, получим $CD = AB + BE' - CF = AB + EG - FG = 5.7$.

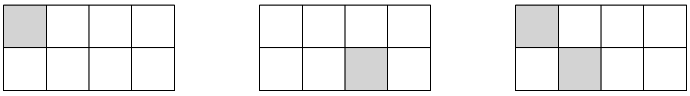
Problem 30. Надя и Селина играют в игру *Морской бой*. Среди других кораблей у каждого есть боевой корабль с аэродромом для вертолетов следующей формы:



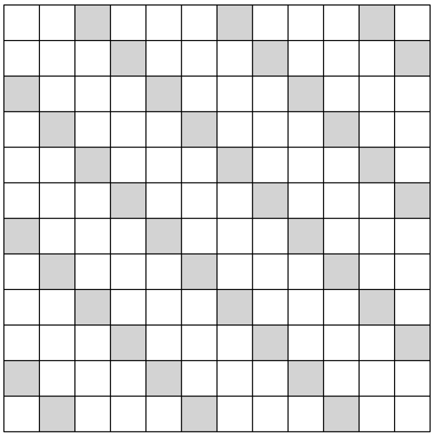
Надя прячет свой боевой корабль в сетке игрового поля 12×12. Поскольку они играют в эту игру с помощью карандаша и листа бумаги, вышеприведенную фигуру боевого корабля можно поворачивать и переворачивать. Какое наименьшее количество раз Селине нужно стрелять, то есть выбрать квадрат сетки, чтобы наверняка попасть в боевой корабль Нади хотя бы один раз?

Result. 36

Solution. Рассмотрим блок 4×2. Как видно из первых двух рисунков, выбор ровно одного квадрата не гарантирует попадания, так как все еще есть возможность разместить боевой корабль без попадания. Кроме того, ясно, что выбор любого квадрата в одном ряду и другого квадрата во втором ряду мешает спрятать боевой корабль в этом блоке. Третий рисунок показывает пример этого. Поэтому необходимо сделать два выстрела в блок 4×2, что дает в общей сложности не менее $18 \cdot 2 = 36$ выстрелов.



С другой стороны, следующая диагональная схема сетки 12×12 показывает, что 36 выстрелов также достаточно, чтобы обеспечить хотя бы одно попадание по боевому кораблю.



Problem 31. Для фиксированного положительного целого числа a построен остроугольный треугольник ABC так, что $BC = a$ и длины h_b, h_c соответствующих высот также являются целыми числами. Учитывая, что наибольшая возможная площадь такого треугольника равна 101.4, определите a.

Result. 13

Solution. Поскольку треугольник ABC является остроугольным, легко видеть, что для максимизации площади $S = \frac{1}{2}ah_a$ высоты h_b и h_c должны быть как можно более длинными. Поэтому $h_b = h_c = a - 1$ и треугольник ABC равнобедренный. Обозначим середину BC как M и основание высоты h_c как C_0. По теореме Пифагора для подобных прямоугольных треугольников $ABM \sim CBC_0$ вычисляем

$$101.4 = S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{a^2(a-1)}{4\sqrt{2a-1}}.$$

Так как 101,4 является рациональным числом, то число $2a - 1$ должно быть нечетным квадратом, например, $(2k+1)^2$ для некоторого целого числа $k \geq 0$, и, поэтому, $a = \frac{(2k+1)^2+1}{2} \in \{1, 5, 13, 25, 41, \dots\}$. Проверив первые несколько чисел, видно, что площадь строго увеличивается с увеличением a. Находим $a = 13$.

Problem 32. Людвиг нашел сумму 1 000 целых положительных чисел и получил значение 1 200 500. Если эти числа расположить в порядке возрастания, то разность между двумя последовательными числами равна либо 2, либо 7. Наименьшее из чисел равно 101. Людвиг хочет найти максимально возможное наибольшее число в этой сумме при выполнении тех же условий. Какое максимальное значение возможно для этого числа?

Result. 3099

Solution. Обозначим через $n_1 = 101, n_2, \dots, n_{1000}$ целые положительные числа. Предполагая, что разность между двумя последовательными числами всегда будет равна 2, получим $n_{1000} = 101 + 2 \cdot 999 = 2\,099$ и $\sum_{i=1}^{1000} n_i = 2200 \cdot 500 = 1\,100\,000$. Следовательно, разность между суммой Людвига и минимально возможной суммой равна $100\,500 = 20\,100 \cdot 5$, так как, если $n_{i+1} - n_i = 7$ вместо 2, то сумма увеличивается на $(1\,000 - i) \cdot 5$ и n_{1000} увеличивается на 5. Таким образом, чтобы максимизировать n_{1000}, оставив сумму 1 200 500 постоянной, разность между числами 7 должна быть применена к числам с наибольшими индексами. Заметим, что число 20 100 есть треугольное число $\frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 201$. Поэтому, если Людвиг изменит разность $n_{i+1} - n_i$ для $i = 800, \dots, 999$ на 7 вместо 2, то он получит наибольшее возможное число $n_{1000} = 101 + 2 \cdot 999 + 200 \cdot 5 = 3\,099$.

Problem 33. Какое наименьшее положительное целое число, которое может быть записано только цифрами 2 и 9, имеет нечетное число цифр и делится на 11?

Result. 29 292 929 292

Solution. Решение основано на сравнениях по модулю чисел. Заметим, что $100 = 1 mod(11)$. Это означает, что умножение на 100 не изменяет остаток числа по модулю 11. Теперь предположим, что десятичное разложение числа содержит одну и ту же цифру a дважды подряд. Это число имеет вид $x \cdot 10^{n+2} + 11a \cdot 10^n + y$. Вычеркивая последовательные числа a' получаем число $x \cdot 10^n + y$, которое имеет тот же остаток по модулю 11. Это означает, что искомое число не может содержать пары последовательных 2 или 9, потому что в противном случае мы могли бы вычеркнуть их и получить меньшее положительное целое число, все еще с нечетным числом цифр и все еще делимое на 11. Далее мы перебираем все стоки вида $2929 \cdots 292$ или $9292 \cdots 929$, пока не найдем наименьшее число, которое делится на 11.

Решение легче найти, если знать критерий делимости для 11. Число делится на 11 тогда и только тогда, когда сумма цифр в четных позициях минус сумма цифр в нечетных позициях делится на 11. Это сразу же подразумевает, что наш ответ не может содержать пару последовательных 2 или 9, потому что в противном случае мы могли бы вычеркнуть их и получить меньшее решение, как показано выше. Поскольку 2 и 9 должны чередоваться, мы ищем наименьшее n такое, что $2n - 9(n+1)$ делится на 11 или $9n - 2(n+1)$. В каждом случае решение $n = 5$ дает варианты 29 292 929 292 и 92 929 292 929. Возьмем меньшее из этих чисел.

Problem 34. Пусть $ABCDE$ правильный пятиугольник и F точка пересечения диагоналей AD и BE. Равнобедренный треугольник AFE достроим до правильного пятиугольника $AFEXY$, который обозначим p. Существует еще один правильный пятиугольник q, вершины которого являются точками пересечения всех пяти диагоналей $ABCDE$. При условии, что $AF = 1$, чему равно наибольшее расстояние между вершинами пятиугольника p и вершинами пятиугольника q?

Result. $(3 + \sqrt{5})/2 \doteq 2.61803$

Solution. Так как точка F есть центр гомотетии для пятиугольников p и q, то отрезок прямой между наиболее удаленными вершинами (например, X и Y) проходит через него. Имеем

$$XF = DF = DE = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$$

и

$$YF = AF = 1.$$

Тогда $XF + ZF = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$.

Problem 35. Рассмотрим все тройки (a, b, c) простых чисел, которые являются решением уравнения

$$175a + 11ab + bc = abc.$$

Чему равна сумма всех возможных значений c в этих решениях?

Result. 281

Solution. Преобразуем уравнение к виду $a(bc - 11b - 175) = bc$. Отсюда видно, что $a = b$ или $a = c$, так как все переменные должны быть простыми числами. В первом случае получаем $ac - 11a - 175 = c \Leftrightarrow (a-1)(c-11) = 186$, что дает решение в простых числах $(2, 2, 197)$. Второй случай $ab - 11b - 175 = b \Leftrightarrow 175 = b(a - 12)$ дает два решения в простых числах $(47, 5, 47)$ и $(37, 7, 37)$. Тогда искомая сумма равна $197 + 47 + 37 = 281$.

Problem 36. Том и Мэри хотят купить дом. Они ищут идеальное место, но их определения "идеального" отличаются. Они нашли 10 предложений и решили попробовать следующий процесс принятия решения: они оба ранжируют дома случайным образом (ничья не допускается), и, если три лучших дома Мэри и Тома имеют ровно один общий дом, то они покупают этот дом. Какова вероятность того, что этот процесс увенчается успехом?

Result. $\frac{21}{40}$

Solution. Для любого рейтинга Мэри рейтинг Тома должен иметь ровно один общий дом из топ-3 Мэри в своем топ-3 и оставшиеся два дома из топ-3 Мэри среди своих рейтингов от 4 до 10. Поэтому для любого рейтинга Мэри вероятность Тома равна

$$\frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{7}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{21}{40}.$$

Problem 37. Рассмотрим многочлены

$$p(x) = ax^{2021} + bx^{2020} + \cdots + ax^{2k-1} + bx^{2k-2} + \cdots + bx^2 + ax + b$$

и

$$q(x) = ax^2 + bx + a,$$

где a и b — положительные действительные числа. Известно, что $q(x)$ имеет ровно один действительный корень. Найдите сумму всех действительных корней $p(x)$.

Result. -2

Solution. Поскольку многочлен $p(x)$ может быть разложен на множители как $(ax+b)(x^{2020}+x^{2018}+\cdots+x^2+1)$, где второй множитель положительный, то единственное действительное решение $p(x)$ есть $x = \frac{-b}{a}$.

Учитывая, что квадратный многочлен $q(x)$ имеет только один действительный корень, то есть корень кратности 2. Поэтому для дискриминанта имеем $b^2 - 4a^2 = 0$, и так как a, b положительны, то $b = 2a$.

Следовательно, искомая сумма состоит из одного слагаемого $x = \frac{-b}{a} = \frac{-2a}{a} = -2$.

Problem 38. Найдите сумму всех простых чисел p таких, что существует некоторое положительное целое число n, для которого дробь $\frac{n}{p}$ в десятичной записи имеет наименьший период длины 5.

Result. 312

Solution. Предположим, что $n < p$ и десятичная запись обыкновенной дроби $\frac{n}{p}$ является периодической с периодом длины 5, начиная сразу после запятой. (Действительно, если дробь $\frac{n}{p}$ является, вообще говоря, периодической, то можно сдвинуть запятую, умножив n на подходящую степень 10. А если $n \geq p$, то мы можем заменить ее на $n' < p$ так, что $n = kp + n'$: это только "стирает"часть перед запятой.) Если $0.\overline{ABCDE}$ - периодическая десятичная запись дроби $\frac{n}{p}$, то $99999 \cdot \frac{n}{p} = 10^5 \cdot \frac{n}{p} - \frac{n}{p} = ABCDE$ есть целое число. Так как $n < p$ и p простое число, то из этого следует, что $p \mid 99999$, то есть $p \mid 3^2 \cdot 41 \cdot 271$. Дроби $1/3$ и $2/3$ имеют самый наименьший период длины 1, но дроби $1/41 = 0.\overline{02439}$ и $1/271 = 0.\overline{00369}$ имеют искомый вид. Следовательно, искомая сумма равна $41 + 271 = 312$.

Problem 39. В комнате сидят четыре человека, каждый из которых говорит ровно на трех из пяти языков: чешском, немецком, английском, польском и венгерском. Они не говорят ни на каком другом языке. В общем случае существует 10000 способов соответствия языков людям. В скольких из этих случаев кто-то может выступить с речью на языке, понятном всем?

Result. 5680

Solution. Имеется $10 = \binom{5}{3}$ способов, когда где все они говорят на одних и тех же 3-х языках. Число способов, когда они говорят на двух общих языках равно $10 = \binom{5}{2}$, и 3^4 способа выбрать третий язык для четырех людей. Один общий язык может быть в $5 = \binom{5}{1}$ случаях, и $\binom{4}{2}^4 = 6^4$ способа выбрать два других языка для четырех людей. Используя принцип включения-исключения, получим $5 \cdot 6^4 - 10 \cdot 3^4 + 10 = 6480 - 810 + 10 = 5680$.

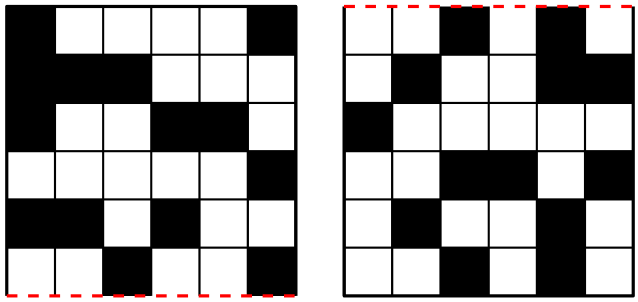
Problem 40. Джули записывает все дроби, числители и знаменатели которых не превышают 100, и удаляет сократимые дроби, а затем записывает их от наименьшей к наибольшей. Какая дробь в списке Джули стоит непосредственно перед $\frac{2}{3}$?

Result. $\frac{65}{98}$

Solution. Мы должны перебрать дроби с как можно большими знаменателями, потому что, если $\frac{a}{b}$ меньше чем $\frac{2}{3}$, то $\frac{a+2}{b+3}$ больше чем $\frac{a}{b}$ и все еще меньше $\frac{2}{3}$. В частности, это означает, что мы должны перебрать знаменатели 98, 99, и 100. Значит, возможные решения равны $\frac{65}{98}$, $\frac{65}{99}$, и $\frac{66}{100} = \frac{33}{50}$. Сравнивая эти дроби, находим, что

$$\frac{65}{99} < \frac{33}{50} < \frac{65}{98} < \frac{2}{3}.$$

Problem 41. Двадцать три черных единичных куба помещаются в сетку $6 \times 6 \times 6$. На рисунке показано, как выглядит полученная фигура сверху (левый квадрат) и спереди (правый квадрат). Белый квадрат означает, что в соответствующем столбце нет черного куба. Общее ребро двух соответствующих граней сетки отмечено красным цветом. Определите площадь поверхности черной трехмерной фигуры.



Result. 130

Solution. Площадь поверхности фигуры равна сумме площадей поверхностей черных единичных кубов минус удвоенная площадь числа граней, общих для двух черных кубов. Для пары черных кубиков, имеющих общую грань, возможны три случая: "верх-низ "спереди-сзади"и "слева-справа". Случай "слева-справа"выглядеть как пара двух черных квадратов, имеющих вертикальную общую сторону, находящуюся в одних и тех же столбцах обеих проекций. Проверяя столбец за столбцом, легко увидеть, что последнее условие никогда не выполняется. Случай "спереди-сзади"определяется по левому квадрату - этот случай происходит дважды в первом столбце. Поскольку первый столбец второго квадрата содержит одну черную ячейку, положение черных кубов в крайнем левом слое большого куба однозначно определено, то есть существуют две горизонтальные грани общие для двух черных кубиков. Последний случай "верх-низ"рассматривается аналогично, и он добавляет две две общие грани (благодаря пятым столбцам проекций). Мы приходим к выводу, что искомая площадь поверхности равна $6 \cdot 23 - 2 \cdot 4 = 130$.

Problem 42. *Декомпозиция делителей* целого положительного числа N представляет собой набор целых положительных чисел $d_1, d_2, \ldots, d_k$ таких, что $k \geq 1$, $d_1 \neq 1$, и выполняются условия делимости $d_1 \mid d_2 \mid d_3 \mid \cdots \mid d_k \mid N$, и $d_1 \cdot d_2 \cdot \cdots \cdot d_k = N$. Будем называть число d_k *лидером декомпозиции.* Каково среднее арифметическое лидеров среди всех декомпозиций делителей числа 720?

Result. 204

Solution. Разложение на простые множители $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$. Показатели степени любого простого числа p в декомпозиции $d_1, d_2, \ldots d_k$ образуют неубывающую последовательность, сумма показателей которой совпадает с показателем степени p в разложении 720 по степеням простых множителей. Для простого числа 2 эти последовательности могут иметь вид $(1,1,1,1)$, $(1,1,2)$, $(2,2)$, $(1,3)$, (4) или любая другая с нулями между ненулевыми показателями. Для 3 эти последовательности $(1,1)$ или (2). Для 5 существует только (1). Любая комбинация этих последовательностей дает разложение на множители декомпозиции с одним из 10 возможных лидеров. Поэтому существует 10 различных видов разложений числа 720, среднее арифметическое всех лидеров равно $\frac{2+4+4+8+16}{5} \cdot \frac{3+9}{2} \cdot 5 = 204$.

Problem 43. Игровой набор Scrabboj (аналогия русской настольной игре "Эрудит" или "Крестословица") состоит из доски 5×1 и набора различных карточек. На каждой карточке написана ровно одна из букв N, A, B, O, J. Сколько существует различных наборов Scrabboj, для которых общее количество способов составить слово $NABOJ$ равно 1440?

Result. 9450

Solution. Обозначим через n, a, b, o, j число карточек с буквами N, A, B, O, J соответственно. Требуется определить количество упорядоченных наборов длины 5 вида (n, a, b, o, j), для которого

$$naboj = 1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Показатели степени каждого простого числа независимо распределены между числами n, a, b, o, j и различные распределения дают различные наборы длины 5. Например, для 2 нам надо распределить 5 по 5 позициям. Это можно сделать $\binom{9}{4}$ способами. Действительно, мы выбираем из 9 элементов, 5 из которых это позиции и 4 —- перегородки между позициями. Аналогично для 3 существует е $\binom{6}{4}$ способа и для 5 существует $\binom{5}{4}$ способов. Следовательно, всего способов

$$\binom{9}{4} \cdot \binom{6}{4} \cdot \binom{5}{4} = 126 \cdot 15 \cdot 5 = 9450$$

различных наборов Scrabboj.

Problem 44. Найдите наибольшее целое положительное число n такое, что $4^{2021}+4^n+4^{3500}$ является идеальным квадратом (Идеальный (полный) квадрат — это такое натуральное число, квадратный корень которого будет являться целым числом).

Result. 4978

Solution. Предположим, что самое большое такое целое число n не больше 2021. Разделив выражение $4^{2021} + 4^n + 4^{3500}$ на $4^{2021} = \left(2^{2021}\right)^2$, получим следующий квадрат

$$1 + (2^m)^2 + 2^{2958},$$

где $m = n - 2021$. Более того, это квадрат числа, большего чем 2^m. Запишем

$$(2^m)^2 + 2^{2958} + 1 = (2^m + x)^2$$

для некоторого целого положительного x. Тогда $x \cdot 2^{m+1} + x^2 = 2^{2958} + 1$. Левая часть равенства увеличивается и с m и x, в то время как правая часть является постоянной величиной. Поэтому наибольшее значение m получится при наименьшем значении x. Если мы возьмем $x = 1$, то $m = 2957$, и возвращаясь, получим что $n = m + 2021 = 4978$ подходит к условию задачи. Это оправдывает первоначальное предположение, что наибольшее допустимое значение n не более 2021. При этом заключаем, что 4978 является искомым максимальным значением.

Problem 45. Сколько коэффициентов многочлена $P(x) = \prod_{i=2}^{2021}(x^i + (-1)^i\, i) = (x^2+2)(x^3-3)(x^4+4)\cdots(x^{2021} - 2021)$ положительны (строго больше нуля)?

Result. 1021616

Solution. Рассмотрим многочлен

$$Q(x) = P(-x) = (x^2+2)(-x^3-3)(x^4+4)\cdots(-x^{2021}-2021) = (-1)^{1010}(x^2+2)(x^3+3)(x^4+4)\cdots(x^{2021}+2021)$$

. Заметим, что все ненулевые коэффициенты положительны. Мы утверждаем, что это именно те, которые соответствуют степеням x^k для показателя k между минимально возможным его значением, то есть 0, и максимально возможным, то есть $S := 2 + \cdots + 2021 = 2043230$, за исключением ровно двух чисел: 1 and $S - 1$. Раскрывая скобки произведения 2020 множителей многочлена $Q()$, можно увидеть, что линейных членов не будет, так же как и не будет и степеней x^{S-1}, потому что, если мы возьмем степени x из каждой скобки, то получим x^S, в остальных случаях показатель степени будет не более $S - 2$. Теперь докажем, что каждая степень из указанного выше диапазона имеет положительный коэффициент или, другими словами, что наименьшее число больше 1, которое не может быть записано как сумма некоторых элементов множества $\{2, 3, \ldots, 2021\}$, равно $S - 1$, обозначим его через m. Докажем, что

$$m - 1 = k + (k+1) + \ldots + 2021$$

для некоторых $k = 2, 3, \ldots, 2021$. В самом деле, очевидно, что $m \geq 3$ и, значит, существует возможность записать $m - 1$ как сумму некоторых элементов множества $\{2, 3, \ldots, 2021\}$. Более того, для всех элементов, отличающихся от $\{k, k+1, \ldots, 2021\}$ мы можем просто увеличить одно из чисел в сумме на 1 и получить представление m. Более того, $k \leq 3$, так как в противном случае

$$2 + (k-1) + (k+1) + \ldots + 2021$$

есть способ представления m. Значит, $m = 1 + 3 + 4 + \ldots + 2021 = S - 1$. Поэтому многочлен $Q(x)$ имеет $\frac{S}{2} + 1$ положительных коэффициентов четных степеней x и $\frac{S}{2} - 2$ положительных коэффициентов нечетных степеней x. Исходный многочлен $P(x)$ имеет противоположные знаки у коэффициентов нечетных степеней, и, следовательно, имеет $\frac{S}{2} + 1 = 1021616$ положительных коэффициентов.

Problem 46. Кубический город завтрашнего дня имеет карту, которая выглядит как кубическая сетка $4 \times 4 \times 4$. Каждая точка с целочисленными координатами называется перекрестком, и каждые два перекрестка на расстоянии 1 соединены прямой дорогой. Перекресток в центре города с координатами $(2, 2, 2)$, закрыт из-за технического обслуживания. Дэвид хочет пройти по дорогам от перекрестка $(0, 0, 0)$ до перекрестка $(4, 4, 4)$ по кратчайшему пути. Сколько существует возможных путей?

Result. 26550

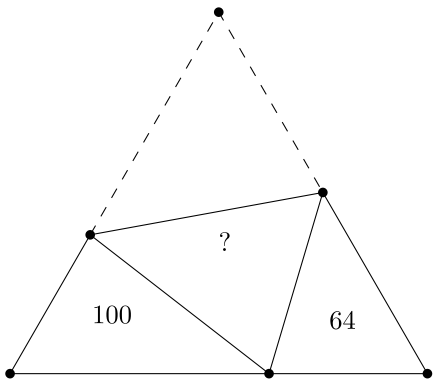
Solution. Сначала мы вычислим, сколько существует кратчайших путей без условий. Мы должны перейти от $(0, 0, 0)$ к $(4, 4, 4)$. Мы должны выбрать четыре дороги в направлении x четыре в направлении y и четыре в направлении z в любом порядке. Если мы вернемся назад, то путь будет не самым коротким. Это $\frac{12!}{4! \cdot 4! \cdot 4!}$ возможных путей.

Теперь мы должны вычесть те, которые проходят через перекресток $(2, 2, 2)$. Благодаря симметрии мы знаем, что число путей от $(0, 0, 0)$ до $(2, 2, 2)$ равно числу путей от $(2, 2, 2)$ до $(4, 4, 4)$ и равно $\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$. Для любого пути от

$(0,0,0)$ до $(2,2,2)$ существует $\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}$ возможных продолжения от $(2,2,2)$ до $(4,4,4)$. Следовательно, число всех дорог через перекресток $(2,2,2)$ равно $\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} \cdot \frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} = \frac{6!\cdot 6!}{2^6}$.

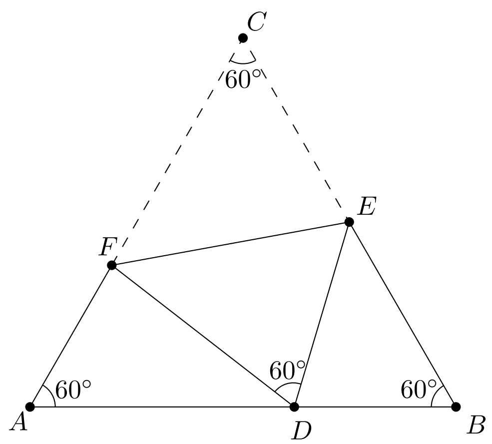
Таким образом, общее количество путей $\frac{12!}{4!^3} - \frac{6!^2}{2^6} = 26550$

Problem 47. Равносторонний треугольник складывается таким образом, что одна вершина попадает точно на противоположную сторону, и площади двух вновь образованных неперекрывающихся треугольников равны 100 и 64, как на рисунке. Найдите площадь перекрывающегося треугольника.

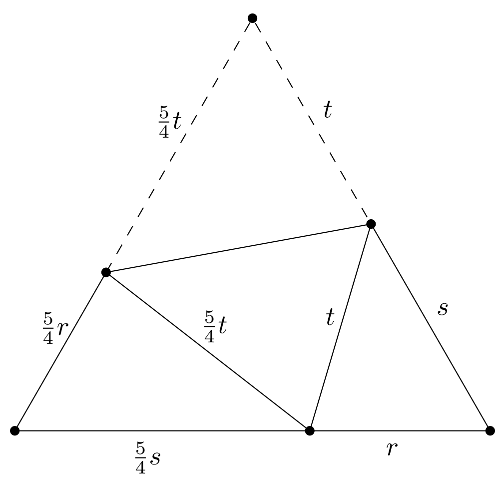


Result. 98

Solution. Соответствующие точки обозначены как на рисунке.



Поскольку треугольник $\triangle ABC$ равносторонний, получаем $\angle BDE + \angle DEB = 120^\circ = \angle BDE + \angle FDA$, i.e. $\angle DEB = \angle FDA$ и, следовательно, $\triangle ADF \sim \triangle DBE$. По условию площади этих треугольников относятся как $100 : 64$, поэтому соответствующие стороны относятся как $5 : 4$. Если мы зададим $r = DB$, $s = BE$, $t = ED$, то получим длины сторон, как обозначенные на следующем рисунке.



Для длины стороны равностороннего треугольника a имеем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} a &= s+t && (2)\\ a &= \frac{5}{4}(r+t) && (3)\\ a &= \frac{5}{4}s+r && (4)\\ 64 &= \frac{1}{2}rs\cdot\sin 60^\circ = rs\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} && (5) \end{aligned}$$

Приравнивание первого и второго уравнений приводит к $t = 4s - 5r$. Подставив это выражение во второе уравнение и приравняв его к третьему, получим соотношение $s = \frac{8}{5}r$. Теперь мы можем использовать последнее уравнение для вычисления r из $64 = r^2\cdot\frac{8}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$. Имеем $r = \sqrt{\frac{160}{\sqrt{3}}}$. Подставляя r находим $s = \frac{8}{5}\sqrt{\frac{160}{\sqrt{3}}}$ и $t = \frac{7}{5}\sqrt{\frac{160}{\sqrt{3}}}$. По формуле площади из последнего уравнения получаем искомую площадь

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{4}t\right)\cdot t\cdot\sin 60^\circ = \frac{5}{8}\cdot\frac{49}{25}\cdot\frac{160}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 98.$$

Problem 48. Подбрасывается правильная (не фальшивая) монета несколько раз, пока не выпадет последовательность Орел-Решка-Орел. Какова вероятность того, что последовательность Решка-Орел-Решка-Орел еще не произошла?

Result. $\frac{5}{8}$

Solution.

Обозначим через E событие, что до выпадения последовательности Орел-Решка-Орел последовательность Решка-Орел-Решка-Орел еще не появилась, и через $P(E)$ его вероятность. Для фиксированной конечной последовательности Орлов и Решек пусть $P(E|s)$ вероятность того, что E произойдет в последовательности, начинающейся с s и продолжающейся случайным образом. Пусть $x = P(E|O)$ и $y = P(E|P)$. Двигаясь на один или два шага вперед (и поскольку наша монета правильная), вычисляем

$$x = \frac{1}{2}P(E|OO) + \frac{1}{4}P(E|OPP) + \frac{1}{4}P(E|OPO) \tag{6}$$

и аналогично, двигаясь на три шага вперед, получаем

$$y = \frac{1}{2}P(E|PP) + \frac{1}{4}P(E|POO) + \frac{1}{8}P(E|POPP) + \frac{1}{8}P(POPO) \tag{7}$$

Поскольку и OPO, и $POPO$ являются чередующимися последовательностями, имеем

$$\begin{aligned} &x = P(E|) = P(E|OO) = P(E|POO),\\ &y = P(E|P) = P(E|PP) = P(E|OPP) = P(E|POPP). \end{aligned}$$

Более того, поскольку $P(E|OPO) = 1$ и $P(E|POPO) = 0$, уравнения (6) и (7) запишутся в виде

$$\begin{aligned} x &= \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{1}{4},\\ y &= \frac{y}{2} + \frac{x}{4} + \frac{y}{8}. \end{aligned}$$

Решая, получим $x = \frac{3}{4}$ и $y = \frac{1}{2}$. Тогда искомая вероятность равна $P(E) = \frac{1}{2}P(E|O) + \frac{1}{2}P(E|P) = \frac{x+y}{2} = \frac{5}{8}$.

Problem 49. Найдите наименьшее действительное положительное число x, обладающее свойством: существует по крайней мере одна тройка положительных действительных чисел (s, t, u) таких, что

$$\begin{aligned} s^2 - st + t^2 &= 12,\\ t^2 - tu + u^2 &= x, \end{aligned}$$

и никакие две тройки с этим свойством не отличаются только по последней координате.

Result. 16

Solution. Рассмотрим точки S, T, U и C на плоскости такие, что $CS = s$, $CT = t$, $CU = u$ и

$$\angle SCT = \angle TCU = 60^\circ$$

(оба угла имеют одинаковую ориентацию). По теореме косинусов ($\cos 60^\circ = 1/2$) заданные условия определяют $ST^2 = 12$ и $TU^2 = x$.

Заметим, что если переменная u однозначно определена, то оно однозначно определяется по t, так как t является единственной другой переменной в единственном уравнении с u. Это означает, что существует только одна точка U такая, что $\angle TCU = 60^\circ$ и $TU^2 = x$. Очевидно, что это условие более строго для более коротких CT, поэтому, если мы рассматриваем условие для наибольшего t, то имеем единственное u для всех t.

При фиксированной длине ST, отрезок CT является самым длинным тогда, когда ST перпендикулярно CS. В этом случае

$$CT = \frac{2\sqrt{3}}{3} ST = 4.$$

Точка U является единственной, когда $TU \geq CT$. Таким образом, наименьший возможный $x = TU^2$ и равен 16.

Problem 50. Марек нашел сумму 2020 неотрицательных последовательных целых чисел, Михал нашел сумму $2020 + x$ неотрицательных последовательных целых чисел и получил тот же результат, как и у Марека. Для какого количества $x \in \{1, 2, 3, \ldots 2020\}$ это возможно?

Result. 1262

Solution. Пусть n есть первый член суммы Марека, а m - первый член суммы Михала. Тогда

$$\begin{aligned} 2020n + \frac{2019 \cdot 2020}{2} &= (2020 + x)m + \frac{(2019 + x)(2020 + x)}{2} \\ 2020(n - m) &= x\frac{2m + 2019 + 2020 + x}{2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Так как левая часть равенства (8) делится на четыре, то и правая часть должна делиться на четыре. Поэтому

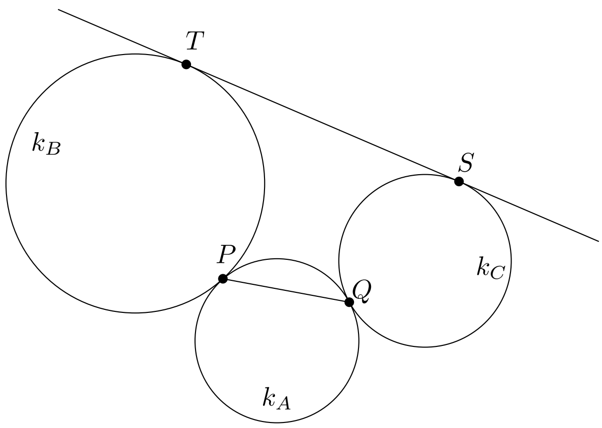
$$4 \mid x(m + \frac{x-1}{2}).$$

Отсюда следует, что либо x нечетно (так как выражение в скобках может быть числом, делящимся на 4) или $8 \mid x$ (если x четно, то $x - 1$ нечетно и мы теряем одну степень 2 в дроби).

Можно непосредственно проверить, что числа $x = 2k+1$ for $k \in \{0, 1, \ldots, 1009\}$, $m = 2020-k$ и $n = 2020+3k+2$ удовлетворяют условию (8). Для $x = 8k$, $k \in \{1, 2, \ldots, 252\}$ аналогично проверяется, что условие (8) справедливо для $m = 1263 - 4k$ and $n = 1263 + 9k$ (заметим, что m и n положительны для всех рассматриваемых значений k).

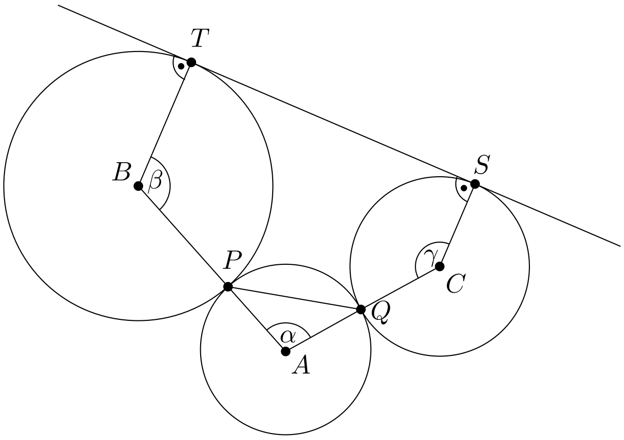
Таким образом, мы нашли $1010 + 252 = 1262$ возможных значений x и доказали, что других больше нет.

Problem 51. Окружности k_B и k_C касаются окружности k_A в точках P и Q соответственно. Найдите радиус r_A окружности k_A, если радиусы k_B и k_C равны $r_B = 5$ и $r_C = 3$ соответственно, $PQ = 6$ и отрезок касательной $TS = 12$.



Result. $\frac{4+\sqrt{61}}{3} \doteq 3.93675$

Solution. Пусть A, B, C есть центры окружностей. И пусть $\alpha = \angle QAP, \beta = \angle PBT, \gamma = \angle SCQ$. Так как $BT \perp TS$ и $CS \perp TS$, то получаем $\alpha + \beta + \gamma = 360°$ как сумма внутренних углов пятиугольника $TBACS$.



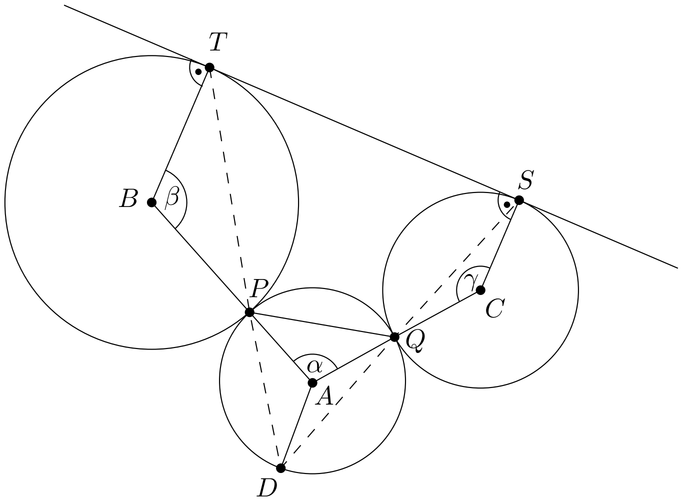
Поскольку TS является касательной к окружностям k_B и k_C, то получаем $\angle PTS = \frac{1}{2}\beta$ и $\angle TSQ = \frac{1}{2}\gamma$. Из условия

$$\angle SQP = 180° - (90° - \frac{1}{2}\alpha) - (90° - \frac{1}{2}\gamma) = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma),$$

заключаем, что $\angle PTS + \angle SQP = 180°$ и, следовательно, четырехугольник $PQST$ является вписанным. Пусть D есть точка пересечения прямых TP и SQ. Поскольку $PQST$ вписан в окружность, то треугольники DST и DQP подобны и их стороны соотносятся как

$$\frac{PQ}{TS} = \frac{DP}{DS} = \frac{DQ}{DT}.$$

Из условия $\angle PTS = \frac{1}{2}\beta$ и $\angle TSQ = \frac{1}{2}\gamma$ получаем $\angle SDT = \angle QDP = \frac{1}{2}\alpha$, что означает, что точка D лежит на окружности k_A.



Поэтому справедливо $\angle DPA = \angle TPB$ и треугольники APD и BPT также подобны. Аналогично получаем $\triangle ADQ \sim \triangle CSQ$. Из подобия треугольников получаем соотношения

$$\frac{TP}{DP} = \frac{r_B}{r_A} \qquad \text{and} \qquad \frac{SQ}{DQ} = \frac{r_C}{r_A}$$

и

$$\frac{DT}{DP} = \frac{r_A + r_B}{r_A} \qquad \text{and} \qquad \frac{DS}{DQ} = \frac{r_A + r_C}{r_A}.$$

Подставляя полученные выражения в приведенное выше равенство, получим

$$\frac{TS^2}{PQ^2} = \frac{DS}{DP} \cdot \frac{DT}{DQ} = \frac{(r_A + r_B) \cdot (r_A + r_C)}{r_A^2}.$$

Подставляя исходные значения, получаем квадратное уравнение относительно r_A

$$\frac{144}{36} \cdot r_A^2 = r_A^2 + 8r_A + 15 \qquad \iff \qquad 3r_A^2 - 8r_A - 15 = 0.$$

Уравнение имеет два решения вида
$$\frac{8 \pm \sqrt{64 + 12 \cdot 15}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{61}}{3}.$$
Единственное положительное решение есть $\frac{4+\sqrt{61}}{3} \doteq 3.93675$.