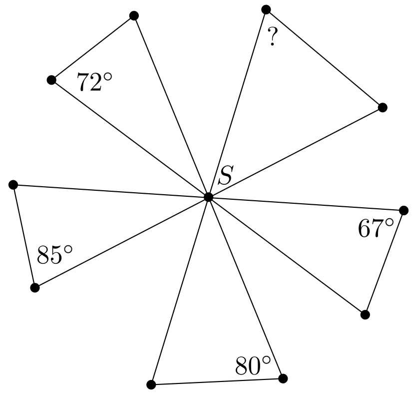
Úloha 1. Keď sme sa spýtali na vek Kristíny, starej matere, odpovedala hádankou: Mám päť detí, medzi ktorými sú štvorročné rozdiely. Prvé dieťa som mala keď mi bolo 21. Teraz má moje najmladšie dieťa 21 rokov. Koľko má stará mater rokov?

Výsledok. 58

Riešenie. Vek detí je $21, 21+4, \ldots, 21+4\cdot 4$. Teda vek starej matere môžeme jednoducho spočítať ako $21+4\cdot 4+21 = 58$.

Úloha 2. Starý mlyn má na vrtuli päť trojuholníkových čepelí. Ich nákres vieme vytvoriť z piatich úsečiek rovnakej dĺžky, ktorých stredy ležia v spoločnom bode S, a ktorých konce sú pospájané tak, ako je to naznačené na obrázku. Zistite aká je veľkosť uhla označeného otáznikom v stupňoch.



Výsledok. 56

Riešenie. Trojuholníkové čepele sú zjavne rovnoramenné trojuholníky, keďže majú dve strany rovnakej dĺžky. Súčet veľkostí uhlov pri bode S piatich rovnoramenných trojuholníkov je $180°$. Súčet veľkostí piatich vyznačených uhlov je preto $\frac{5\cdot 180° - 180°}{2} = 360°$ z čoho dostávame, že veľkosť chýbajúceho uhla je $360° - 67° - 80° - 85° - 72° = 56°$.

Úloha 3. Študenti športovej triedy sa zapojili do atletickej súťaže. Prihlásiť sa môžu do troch disciplín a každý študent sa musí zapojiť aspoň do jednej z nich. O tom koľko študentov sa zapojilo do akých disciplín vieme toto:
- 22 študentov súťažilo v behu
- 13 študentov súťažilo v skoku do diaľky
- 15 študentov súťažilo v hode oštepom
- 8 študentov súťažilo v behu aj v skoku do diaľky
- 7 študentov súťažilo v behu aj v hode oštepom
- 6 študentov súťažilo v skoku do diaľky aj v hode oštepom
- 3 študenti si verili natoľko, že súťažili vo všetkých troch disciplínach

Koľko je v triede študentov?

Výsledok. 32

Riešenie. Sčítame počty súťažiacich v samostatných kategóriach a od výsledku odčítame počty študentov súťažiacich v dvoch disciplínach. Najaktívnejších študentov, ktorí súťažili v troch disciplínach sme odčítali o jedenkrát viac ako treba, preto ich počet ešte pričítame k výsledku. Dostávame tak číslo $22 + 13 + 15 - 8 - 7 - 6 + 3 = 32$.

Úloha 4. Číslo označíme ako *super-párne* ak sú všetky jeho cifry párne. Koľko existuje *super-párnych* päťciferných čísel takých, že aj ich súčet s číslom 24680 bude *super-párny*?

Výsledok. 90

Riešenie. Existuje päť rôznych jednociferných párnych čísel. Aby bol výsledok zaručene *super-párny*, keď uvažujeme tradičné sčítavanie pod seba, tak sčítanie dvoch čísel na ľubovoľnej pozícií nemôže prekročiť 10. Ak by sa tak stalo, výsledné číslo už nebude super-párne. Hľadané číslo nemôže ani začínať 0, inak by nebolo päťciferné. S týmito dvomi podmienkami máme 3 možnosti na prvú a druhú cifru hľadaných päťciferných čísel, 2 možnosti na tretiu cifru, jednu možnosť na štvrtú cifru a 5 možností na poslednú cifru. Vynásobením získame $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 = 90$ ako počet hľadaných čísel.

Úloha 5. Kde bolo tam bolo, žil raz jeden múdry kráľ. Jeho hrad bol obkolesený hradbami v tvare štyroch sústredných kružníc s polomermi 50, 100, 150 a 200. Na ploche vo vnútri najväčšej (a samozrejme aj menších) hradby ležalo mesto. Keďže jeho kráľovstvo žilo v mieri, rozhodol sa všetky štyri hradby zbúrať a postaviť z ich materiálu okolo svojho hradu jednu veľkú hradbu v tvare kružnice. Koľkokrát sa tým zväčšila plocha mesta, teda plocha vo vnútri hradieb?

Výsledok. 25/4

Riešenie. Vieme, že súčet obvodov pôvodných hradieb bude rovný obvodu novej hradby. Keď si polomer novej hradby označíme r, potom $2\pi \cdot 50 + 2\pi \cdot 100 + 2\pi \cdot 150 + 2\pi \cdot 200 = 2\pi \cdot r$ implikuje, že r je súčet pôvodných polomerov, teda $r = 500$. Aby sme zistili koľkokrát sa zväčšila plocha mesta, potrebujeme vypočítať pomer medzi obsahom (plochou vo vnútri) nových hradieb a obsahom najväčších starých hradieb. To je $\frac{\pi \cdot 500^2}{\pi \cdot 200^2} = 25/4$.

Úloha 6. Zuzana sa pokúša otvoriť číselný zámok. O jeho štvorcifernom kóde vie nasledovné:

- všetky cifry sú rôzne,
- kód je deliteľný 137 a 17,
- jeho ciferný súčet je najmenšie možné prvočíslo.

Aký je hľadaný kód?

Výsledok. 9316

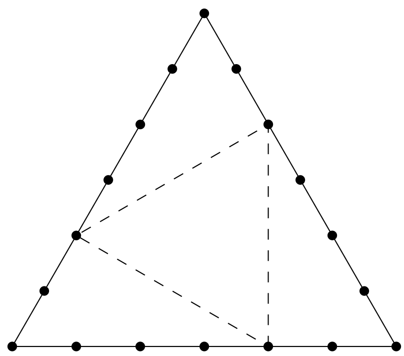
Riešenie. Keďže hľadané číslo je deliteľné prvočíslami 137 a 17, musí byť násobkom $137 \cdot 17 = 2329$. Vidíme, že toto číslo nesplĺňa podmienky, a že sa dá vynásobiť iba 2, 3 a 4 tak, aby bolo stále štvorciferné. Spočítame $2329 \cdot 2 = 4658$, $2329 \cdot 3 = 6987$, a $2329 \cdot 4 = 9316$, ktoré majú ciferné súčty 23, 30 a 19. Keďže 19 je najmenšie z možných prvočísel, číslo 9316 je hľadaným kódom.

Úloha 7. Na tabuli sú nakreslené štyri mnohouholníky – rovnostranný trojuholník so stranou dlhou 1 a tri zhodné pravidelné mnohouholníky, ktoré tiež majú strany dlhé 1. Každé dva z týchto štyroch mnohouholníkov majú spoločnú práve jednu stranu a žiadne dva z nich sa nepretínajú. Aký je obvod vzniknutého útvaru, ak nerátame spoločné strany?

Výsledok. 27

Riešenie. Predpokladajme, že každý z troch zhodných mnohouholníkov má n strán. Potom vzniknutý útvar má $3(n-3)$ strán, keďže tri strany každého mnohouholníka, vrátane trojuholníka, sú spoločné s iným mnohouholníkom. Stačí nám nájsť n. Vonkajší uhol rovnostranného trojuholníka je $300°$, takže vďaka symetrii musí byť vnútorný uhol zhodných mnohouholníkov $150°$. Keďže súčet vnútorných uhlov $n-$uholníka je $(n-2) \cdot 180°$, musíme vyriešiť rovnicu $150n = 180(n-2)$, ktorej riešením je $n = 12$. Dosadením do vyššie spomenutého vzorca dostaneme, že výsledný mnohouholník má 27 strán.

Úloha 8. Je daný rovnostranný trojuholník s niekoľkými bodmi (vrátane jeho troch vrcholov) vyznačenými na jeho stranách. Tieto body rozdeľujú každú jeho stranu na 2021 rovnako dlhých úsečiek. Zistite počet všetkých rovnostranných trojuholníkov s vrcholmi vo vyznačených bodoch. Na obrázku je nakreslený jeden taký trojuholník, keby každá strana bola rozdelená na 6 rovnako dlhých častí.



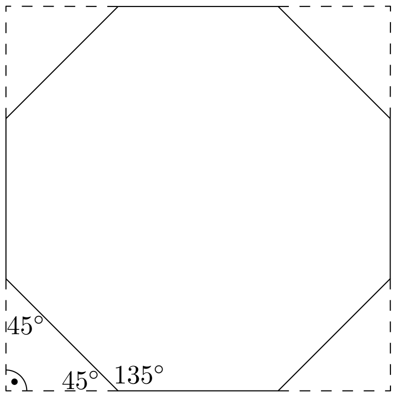
Výsledok. 8081

Riešenie. Pod pojmom trojuholník budeme v tomto riešení myslieť rovnostranný trojuholník. Máme pôvodný trojuholník, potom $3 \cdot 2020$ trojuholníkov, ktoré majú spoločný práve jeden vrchol s pôvodným (2020 pre každý vrchol) a nakoniec 2020 otočených trojuholníkov, ktoré nemajú s pôvodným trojuholníkom žiadny spoločný vrchol. Zjavne sú všetky spomínané trojuholníky navzájom rôzne a už neexistujú žiadne ďalšie trojuholníky, takže spolu máme $1 + 3 \cdot 2020 + 2020 = 8081$ trojuholníkov.

Úloha 9. Veronika odstrihla zo štvorcového listu papiera rohy tak, že jej ostal pravidelný osemuholník. Odpad, ktorý tým vznikol, má spolu obsah 300. Aká je dĺžka strany Veronikinho osemuholníka?

Výsledok. $\sqrt{300} \doteq 17.32051$

Riešenie. Vnútorné uhly pravidelného osemuholníka majú 135°, takže trojuholníky, ktoré Veronika odstrihla, sú pravouhlé rovnoramenné trojuholníky. Vieme ich preto usporiadať do štvorca s dĺžkou strany rovnou dĺžke strany osemuholníka. To znamená, že osemuholník má stranu dlhú $\sqrt{300}$.



Úloha 10. Nájdite najväčšie trojciferné kladné celé číslo n, ktoré spĺňa tieto podmienky:

1. ciferný súčet čísla n je 16,
2. súčin cifier čísla n nie je 0, ale na mieste jednotiek tohto súčinu je 0,
3. ciferný súčet súčinu cifier čísla n je 3.

Výsledok. 853

Riešenie. Z druhej podmienky zistíme, že aspoň jedna cifra čísla n musí byť 5 a aspoň jedna cifra musí byť párna, ale žiadna nie je 0. S pomocou prvej podmienky tak získame prvú možnosť 5, 2, 9, druhú možnosť 5, 4, 7, tretiu možnosť 5, 6, 5 a štvrtú možnosť 5, 8, 3. Poslednú podmienku ale spĺňa iba trojica 5, 8, 3, a tak najväčšie vyhovujúce číslo je 853.

Úloha 11. Z čísla 6437051928 odstránime presne päť číslic tak, že zostávajúce päťciferné číslo je najväčšie možné. Aké je výsledné číslo?

Výsledok. 75928

Riešenie. Najväčšia cifra na mieste desaťtisícok môže byť 7. To dosiahneme odstránením troch číslic. Ostatné dve vymazané číslice sú 0 a 1. Hľadaným číslom je preto 75928.

Úloha 12. Majme kladné celé číslo n. Vezmime si rastúcu postupnosť S_n, ktorej prvý člen je 1 a rozdiel dvoch po sebe idúcich členov je n. (Napríklad S_2 je postupnosť $1, 3, 5, \ldots$.) Koľko existuje rôznych čísel n, pre ktoré postupnosť S_n obsahuje 2021 ako jeden zo svojich členov?

Výsledok. 12

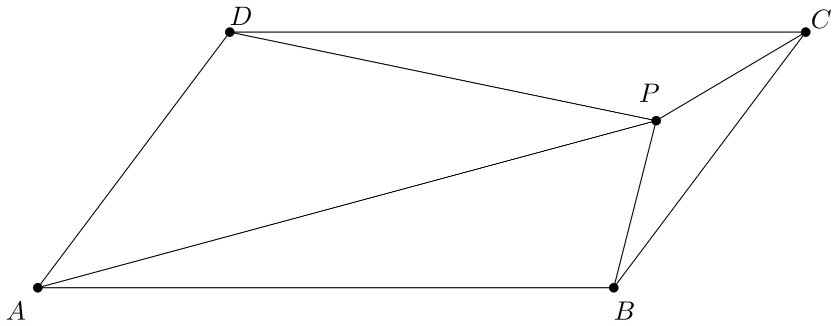
Riešenie. Číslo sa v postupnosti S_n nachádza len v prípade, že ho vieme zapísať ako $1 + an$, kde a je nejaké kladné celé číslo. Ak má byť 2021 v postupnosti, musí platiť $2021 = 1 + an$, teda $2020 = an$, z čoho plynie, že n musí byť deliteľom 2020. Prvočíselný rozklad 2020 je $2^2 \cdot 5 \cdot 101$. Každý deliteľ musí byť teda nejakou kombináciou týchto prvočísel. Dvojku môžeme vybrať nula, jeden alebo dvakrát, čo sú tri možnosti. Päťku môžeme vybrať nula alebo jedenkrát, čo sú, rovnako ako pre 101, dve možnosti. Z toho dostávame $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ možností ako vybrať deliteľa 2020. Číslo 2021 bude členom dvanástich postupností.

Úloha 13. Máme 90 metrovú chodbu s desiatimi oknami, pričom každé dve susedné okná sú vzdialené 10 metrov. Miro chce zautomatizovať upratovanie, preto si zaobstaral 7 robotov, rozmiestnil ich k nejakým siedmim rôznym oknám a nasmeroval ich nejakým smerom. Keď je robot zapnutý, tak sa pohybuje k jednému z koncov chodby konštantnou rýchlosťou 10 metrov za minútu. Keď dosiahne stenu, tak sa otočí a ide späť k druhému koncu (roboty sa nezrážajú a idú najkratšou možnou vzdialenosťou medzi týmito stenami). Miro zapol všetky naraz a meria čas, kým každý robot stretol všetky ostatné. Určte najväčšiu možnú hodnotu zmeranú v sekundách.

Výsledok. 510

Riešenie. Pre nejakého robota A môžeme určiť posledného robota, ktorého A stretne a spočítať čas, kedy sa tak stane. Je to robot o okno vzad a idúci opačným smerom (ak ho umiestnime na koniec chodby, tak ide do chodby). Čas stretnutia takýchto robotov je rovný 8.5 minúty, čo je 510 sekúnd.

Úloha 14. Vnútri rovnobežníka $ABCD$ je taký bod P, že obsah trojuholníka CDP je trojnásobkom obsahu trojuholníka BCP a zároveň jedna tretina obsahu trojuholníka APD. Aký je obsah trojuholníka ABP ak vieme, že obsah trojuholníka CDP je 18?



Výsledok. 42

Riešenie. Súčet výšok trojuholníkov APD a BCP je rovný výške celého rovnobežníka (na základne AD a BC). Z toho vyplýva, že súčet ich obsahov bude polovicou obsahu rovnobežníka $ABCD$. Z toho vieme zostaviť rovnicu:

$$S_{APD} + S_{BCP} = S_{CDP} + S_{ABP}$$

$$3 \cdot S_{CDP} + \frac{1}{3} S_{CDP} = S_{CDP} + S_{ABP}$$

$$\left(3 + \frac{1}{3} - 1\right) S_{CDP} = S_{ABP}$$

Obsah ABP je $(2 + \frac{1}{3}) \cdot 18 = 42$.

Úloha 15. Čísla 1058, 1486 a 2021 dávajú po delení konkrétnym kladným celým číslom $d > 1$ rovnaký zvyšok. Nájdite číslo d.

Výsledok. 107

Riešenie. Keďže všetky tri čísla dávajú rovnaký zvyšok po delení d, musia ich rozdiely byť deliteľné d. Pozrime sa na rozdiely $1486 - 1058 = 428$ a $2021 - 1486 = 535$. Ich najväčší spoločný deliteľ je prvočíslo 107, z čoho plynie, že toto číslo je naše jediné d.

Úloha 16. Na striedačke futbalového štadióna je 14 sedadiel. Manažment tímu, pozostávajúci z trénera, asistenta trénera, manažéra a fyzioterapeuta, sa chce čo najviac spoznať so svojimi hráčmi. Preto sa každý z nich posadí medzi dvoch spomedzi desiatich striedajúcich hráčov. Koľko je možností ako si môže manažment posadať? Dve rôzne poradia na tých istých štyroch stoličkách rátame ako dve možnosti.

Výsledok. 3024

Riešenie. Predstavme si všetkých desiatich striedajúcich hráčov stojacich v jednom rade. Medzi nimi je 9 medzier, do ktorých si členovia manažmentu môžu posadať, pričom do každej si sadne iba jeden z nich (aby bola splnená podmienka zo zadania, že každý sedí medzi dvoma hráčmi). Postupne majú teda $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ možností ako si posadať.

Úloha 17. Janka má pravidelný štvorboký ihlan, ktorého podstava má obsah 1, pričom povrch celého ihlanu je 3. Aký je objem Jankinho ihlanu?

Výsledok. $\sqrt{3}/6 \doteq 0.288675$

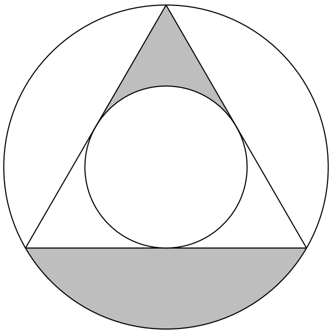
Riešenie. Uvedomme si, že podstava musí mať hranu dĺžky 1. Keďže povrch celého ihlanu je 3, každá z bočných strán musí mať obsah 1/2. Z týchto dvoch tvrdení vieme, že trojuholníky tvoriace bočné strany majú výšky 1. Preto kolmý rez cez stred základne (rovnobežný s dvoma z jej hrán) tvorí rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky 1. O tomto trojuholníku zároveň vieme, že jeho výška je výškou celého ihlanu, a síce $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Z toho už vieme dopočítať objem ihlanu ako tretinu súčinu obsahu podstavy a výšky, teda $\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{6}\sqrt{3}$.

Úloha 18. Magická mašina vie premeniť kvapaliny. Ak dostane čistú vodu, premení 6 % na víno a zvyšných 94 % sa nezmení. Ak dostane čisté víno, premení 10 % na vodu a zvyšných 90 % nezmení. Ak dostane zmes, tak bude pôsobiť na zložky samostatne. Jožo si kúpil víno a vodu a nalial 6000 litrov takejto zmesi do mašiny. Po tom, ako mašina spravila svoje, Jožo dostal naspäť zmes s rovnakým pomerom vína a vody, aký nalial. Koľko litrov vína má Jožo vo svojej zmesi?

Výsledok. 2250

Riešenie. Označme x množstvo vína a z množstvo vody v litroch v pôvodnej zmesi. Vieme, že $0.06 \cdot z$ litrov vody sa premení na víno, $0.1 \cdot x$ litrov vína sa premení na vodu a x je rovnaké po magickom procese. Z toho musí platiť $0.06 \cdot z = 0.1 \cdot x$ a keďže $x + z = 6000$, tak $0.06 \cdot (6000 - x) = 0.1 \cdot x$. Vyriešením tejto rovnice dostaneme, že $x = 6000 \cdot \frac{3}{8} = 2250$.

Úloha 19. Robo si nakreslil rovnostranný trojuholník a k nemu prislúchajúcu vpísanú a opísanú kružnicu. Obsah opísanej kružnice je 140. Následne vyfarbil 2 časti ako na obrázku. Aký je obsah častí, ktoré Robo vyfarbil?



Výsledok. 35

Riešenie. Kružnica vpísaná rovnostrannému trojuholníku má dvakrát menší polomer
ako kružnica opísaná tomu istému trojuholníku (môžeme si to všimnúť napríklad z toho, že jeho vpísaná kružnica je vlastne opísanou trojuholníku z jeho stredných priečok). Z toho vyplýva, že obsah vpísanej kružnice je štvrtinou obsahu opísanej, teda $140 : 4 = 35$. Všimnime si, že časť obrázka, ktorú Robo vyfarbil je presne tretina rozdielu obsahov týchto dvoch kružníc, teda tiež 35.

Úloha 20. Majme 2021 kladných celých čísel. Vieme, že ich súčin je dvakrát taký veľký ako ich súčet. Určte najväčšiu možnú hodnotu najväčšieho z nich.

Výsledok. 4044

Riešenie. Označme kladné celé čísla ako $c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_{2020} \geq c_{2021} \geq 1$. Chceme určiť najväčšiu možnú hodnotu čísla c_1 za predpokladu

$$c_1 \cdots c_{2021} = 2 \cdot (c_1 + \cdots + c_{2021}). \tag{1}$$

Vydelením oboch strán a odhadnutím menovateľov dosadením niektorých c_i ako 1 dostaneme odhad

$$1 = 2\left(\frac{1}{c_2 \cdots c_{2021}} + \cdots + \frac{1}{c_1 \cdots c_{2020}}\right) \leq 2\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{2019}{c_1 c_2}\right) = 2\frac{2019 + c_1 + c_2}{c_1 c_2}.$$

Vynásobením $c_1 c_2$ a preusporiadaním dostaneme

$$(c_1 - 2)(c_2 - 2) = c_1 c_2 - 2c_1 - 2c_2 + 4 \leq 2 \cdot 2019 + 4 = 4042.$$

Ak $c_2 \geq 3$, tak $c_1 \leq 4044$ a výber $c_1 = 4044$, $c_2 = 3$ a $c_3 = \cdots = c_{2021} = 1$ spĺňa rovnicu (1). V tomto prípade hodnota 4044 môže byť dosiahnutá. Na druhú stranu ak $c_2 \leq 2$, potom čísla $c_2 \geq c_3 \geq \cdots \geq c_{2021}$ obsahujú $k \geq 0$ dvojek, $2020 - k$ jednotiek a rovnica (1) hovorí, že

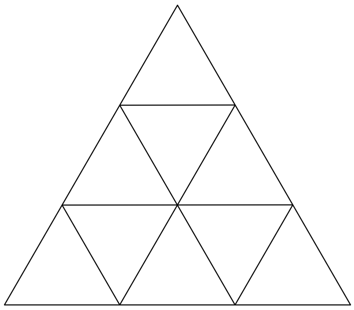
$$c_1 2^k = 2(c_1 + 2k + 2020 - k).$$

Môžeme ju upraviť na $c_1(2^{k-1} - 1) = 2020 + k$. Avšak pre $k \leq 1$ nemáme c_1, ktoré spĺňa túto rovnicu, pre $k \geq 2$ máme

$$c_1 = \frac{2020 + k}{2^{k-1} - 1} \leq 2022 < 4044$$

. Riešením je 4044.

Úloha 21. Deväť malých trojuholníkov vo veľkom trojuholníku ako na obrázku je vyplnených rôznymi kladnými celými číslami tak, že každé dva stranou susedné trojuholníky majú najväčšieho spoločného deliteľa väčšieho ako 1. Aký je najmenší možný súčet týchto čísel?



Výsledok. 59

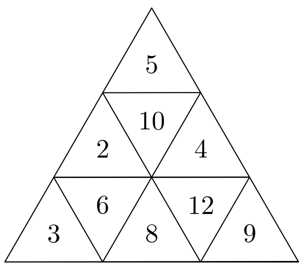
Riešenie. Najskôr si všimnime, že máme tri trojuholníky, ktoré susedia iba s jedným iným trojuholníkom, tri trojuholníky s dvoma susedmi a tri s troma susedmi. To znamená, že ak prvočíslo p je niektoré z hľadaných čísel, tak sa niekde musí nachádzať ešte jedno prvočíslo p v prvočíselnom rozklade. Taktiež je vidieť, že 1 nemôže byť hľadané číslo. Označme sumu správneho vyplnenia S.

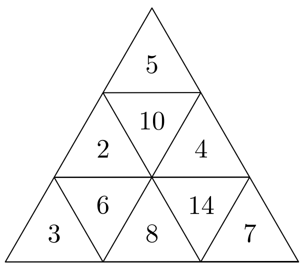
Ak nejaké prvočíslo $p \geq 11$ je vo vyplnení, tak aspoň jeden násobok $k \cdot p$ s $k \geq 2$ musí byť tiež prítomný. Vyplnením zvyšku siedmimi najmenšími číslami bez ohľadu na pravidlá nám dá súčet: $S \geq 2+3+4+5+6+7+8+p+k \cdot p = 35+(k+1) \cdot p \geq 35+33 = 68$.

Teraz predpokladajme, že žiadne prvočíslo nie je $p \geq 11$ a dostaneme nasledujúce možnosti:

- Obe čísla 5 a 7 sú vo vyplnení: $S \geq 5+k_5 \cdot 5+7+k_7 \cdot 7+2+3+4+6+8 = (k_5+1) \cdot 5+(k_7+1) \cdot 7+23 \geq 15+21+23 = 59$
- Číslo 5 je vo vyplnení, ale číslo 7 nie je: $S \geq 5+k \cdot 5+2+3+4+6+8+9+ \begin{cases} 10 \geq 20+32+10 = 62 & \text{for} \quad k \geq 3 \\ 12 = 15+32+12 = 59 & \text{for} \quad k = 2. \end{cases}$
- Nemáme ani 5 ani 7: $S \geq 2+3+4+6+8+9+10+12+14 = 68$
- Číslo 7 je vo vyplnení, ale 5 nie je: $S \geq 2+3+4+6+7+8+9+10+k \cdot 7 \geq 49+14 = 63$

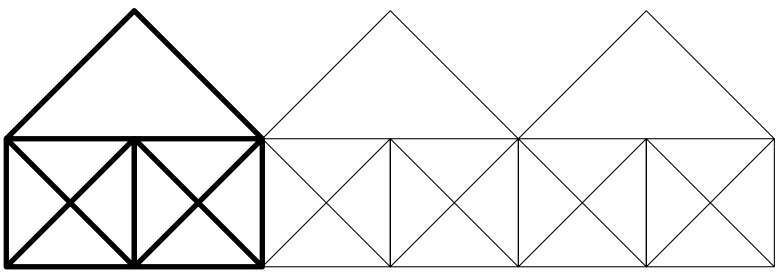
Môžeme usúdiť, že 59 je kandidát na najmenšiu sumu. Dokonca obe navrhnuté množiny spĺňajú podmienky a môžeme nimi trojuholníky vyplniť:





Odpoveď je 59.

Úloha 22. Lujza si kreslí sa sebou do radu rovnaké domčeky. Jeden domček sa skladá z dvoch rovnako veľkých štvorcov a rovnoramenného pravouhlého trojuholníka, ktorý je preponou položený na štvorce ako strecha. Každý ďalší domček má spoločnú stranu s predošlým tak, ako na obrázku.



Koľko najmenej domčekov musí Lujza nakresliť, aby jej obrázok obsahoval aspoň 2021 trojuholníkov?

Výsledok. 93

Riešenie. Zadefinujme si obsah jedného domčeka ako 3.

V prvom domčeku je 8 trojuholníkov s obsahom $\frac{1}{4}$, 8 trojuholníkov s obsahom $\frac{1}{2}$ a 3 trojuholníky s obsahom 1, čo je dokopy 19 trojuholníkov.

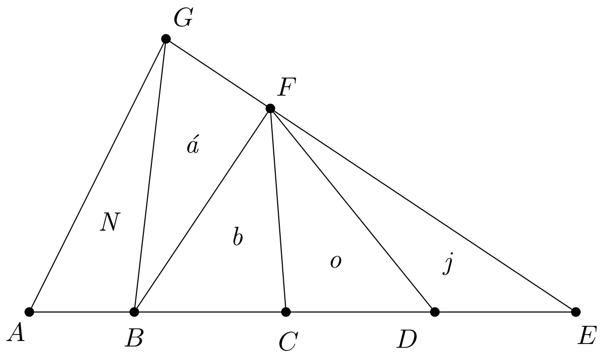
Pridaním druhého domčeka Lujza pridá rovnako veľa trojuholníkov ako v prvom, plus dva trojuholníky s obsahom 1, ktoré zasahujú so oboch domčekov, čiže 21 trojuholníkov.

Pridaním tretieho domčeka Lujza pridá toľko, koľko druhým domčekom, plus jeden trojuholník zasahujúci cez všetky tri domčeky s obsahom 4, čiže 22 trojuholníkov. Môžeme si rozmyslieť, že aj každým ďalším domčekom Lujza pridá 22 trojuholníkov.

$$2021 = 19 + 21 + 90 \cdot 22 + 1$$

Zo zostavenej rovnice vidíme, že Lujza musí nakresliť aspoň $1 + 1 + 90 + 1 = 93$ domčekov.

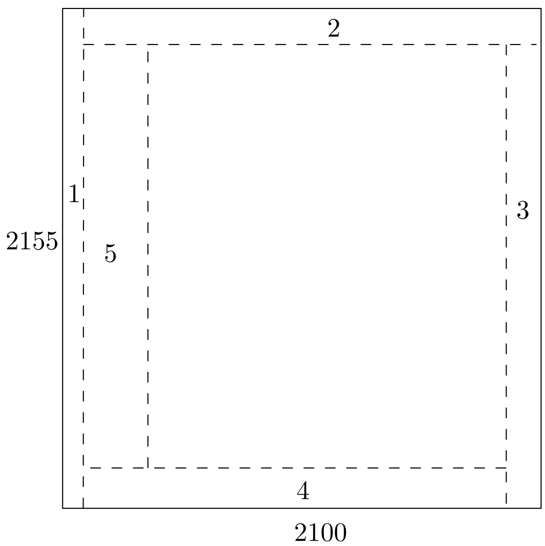
Úloha 23. Každý z piatich trojuholníkov N, $á$, b, o, j má rovnaký obsah. Nájdite $|AB|$, ak $|CD| = 5$.



Výsledok. $\frac{15}{4}$

Riešenie. Pomer obsahov medzi trojuholníkmi $\triangle BEG$ a $\triangle BEF$ je 4 : 3. Keďže tieto trojuholníky majú rovnakú základňu BE, výšky musia mať pomer 4 : 3. Keďže trojuholníky $\triangle ABG$ a $\triangle CDF$ majú rovnakú plochu a ich výšky na stranu priamku AF majú pomer 4 : 3, vidíme, že $|AB| = \frac{3}{4}|CD| = \frac{15}{4}$.

Úloha 24. Janči má papier v tvare obdĺžnika so stranami dĺžok 2155 a 2100. Postupne z tohto papiera odstrihuje pásy. Najskôr odstrihne pás so šírkou 1 pozdĺž dlhšej strany, potom, pokračujúc v smere hodinových ručičiek, pás so šírkou 2 (tentokrát pozdĺž kratšej strany), následne so šírkou 3 (opäť pozdĺž dlhšej) a tak ďalej, ako vidíme aj na obrázku.

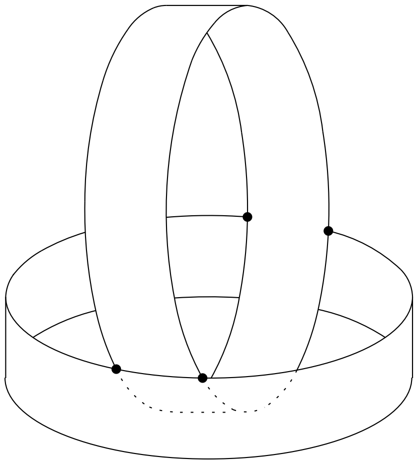


Nakoniec sa dostane do stavu, kedy už nemôže odstrihnúť v smere hodinových ručičiek pás, ktorý by mal o jedna väčšiu šírku ako predošlý. Aký obsah má papier, ktorý Jančimu po strihaní ostal?

Výsledok. 6375

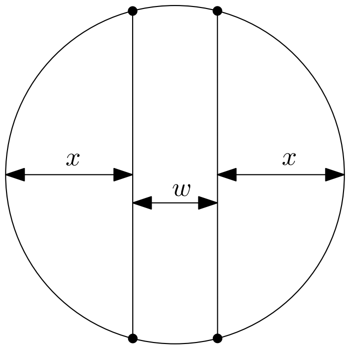
Riešenie. Janči môže strihať pásy s nepárnymi šírkami pokým $1 + 3 + \cdots + 2n - 1 = n^2 < 2100$. Keďže $45^2 = 2025 < 2100 < 2116 = 46^2$, tak pás so šírkou 89 je ten najširší "nepárny", ktorý môže odstrihnúť. Podobne pre párne šírky vieme, že Janči môže strihať kým $2 + 4 + \cdots + 2n = n(n + 1) < 2155$. Keďže $45 \cdot 46 = 2070 < 2155 < 2162 = 46 \cdot 47$, najširší "párny"pás má šírku 90. Obsah papiera, ktorý Jančimu ostal je $(2100 - 2025) \cdot (2155 - 2070) = 75 \cdot 85 = 6375$.

Úloha 25. Máme dva rovnaké prstence s polomerom 4 a neznámou šírkou w. Jeden je položený horizontálne na stole, druhý stojí vertikálne a dotýka sa prvého v presne štyroch bodoch (ako na obrázku). Najnižší bod tohto prstenca leží presne vo výške 1 nad stolom. Určte šírku w.



Výsledok. $\frac{10}{3}$

Riešenie. Označme w hľadanú šírku a pozrime sa na obrázok znázorňujúci vertikálnu projekciu týchto dvoch prstencov na stôl.



Výška najnižšieho bodu (bodov) vertikálneho prstenca je $1 = w - x$, kde $x = 4 - \frac{w}{2}$. Toto platí preto, že príslušné oblúky prstencov definované dvomi bodmi dotyku majú rovnakú dĺžku. Máme $8 = 2x + w = 2(w - 1) + w = 3w - 2$, a teda $w = \frac{10}{3}$.

Úloha 26. Polynóm stupňa 14 má celočíselné koeficienty a koeficient pri x^{14} je kladný. Tento polynóm má 14 rôznych celočíselných koreňov. Jeho hodnota p v bode nula je kladná. Určte najmenšiu možnú hodnotu p.

Výsledok. 29030400

Riešenie. Polynóm môžeme zapísať ako $c \cdot (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot \cdots \cdot (x - a_{14})$ pre nejaké po dvoch rôzne $a_1, a_2, \ldots, a_{14}$ a číslo c. Vedúci koeficient je rovný c, takže c je kladné. Hodnota v bode 0 je rovná $p = c \cdot (0 - a_1) \cdot (0 - a_2) \cdot \cdots \cdot (0 - a_{14}) = c(-1)^{14} \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{14}$. Pri minimalizovaní p musí platiť $c = 1$. Keďže p je kladné, žiadny koreň nie je nulový. Zvyšné hodnoty musia byť v absolútnej hodnote najbližšie k 0, aby sme minimalizovali výraz. Keďže záporných musí byť párny počet, dostávame možné koeficienty $-1, -2, -3, -4, -5, -6, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Z toho $p = 6! \cdot 8! = 29030400$.

Úloha 27. Kika píše číslice 4, 5 a 7 dvoma ťahmi a všetky ostatné číslice jedným ťahom. Koľko ťahov musí urobiť, aby vypísala všetky čísla od 1 po 2021 vrátane týchto dvoch čísel?

Výsledok. 8783

Riešenie. Keď Kika vypisuje čísla od 1 po 2021, napíše 9 jednociferných čísel, 90 dvojciferných, 900 trojciferných a $2021 - 1000 + 1 = 1022$ štvorciferných čísel. Spolu napíše $9 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 + 1022 \cdot 4 = 6977$ číslic. Každú číslicu napíše jedným ťahom, kým pre číslice 4, 5 a 7 pridá ešte jeden ťah navyše. Takže stačí spočítať, koľko napíše týchto číslic. Keďže číslo 2021 neobsahuje ani jednu takúto číslicu, budeme uvažovať iba čísla po 2020.

Spočítajme, koľko napíše číslic 4. 1/10 čísel po 2020 obsahuje číslicu 4 na mieste jednotiek, teda 202. Číslica 4 sa vyskytne na mieste desiatok v 1/10 čísel po 2000 a v žiadnom čísle medzi 2001 a 2020. Spolu 200-krát. Rovnako sa číslica 4 vyskytne na mieste stoviek 200-krát a medzi 2001 a 2020 sa nevyskytuje. Dokopy teda treba číslicu 4 napísať $202 + 200 + 200 = 602$-krát. Túto úvahu môžeme zopakovať aj pre číslice 5 a 7.

Spolu Kika napíše 6977 číslic, pričom $3 \cdot 602 = 1806$ je 4, 5 alebo 7. Urobí tak $6977 + 1806 = 8783$ ťahov.

Úloha 28. Tabuľka nižšie by mala byť vyplnená číslami $1, 1, 2, 2, \ldots, 8, 8$ tak, že pre každé použité číslo n platí, že medzi ním a druhým rovnakým číslom n je práve n políčok. Tri z týchto čísel sú už umiestnené:

					6	7		2							

Umiestnite zvyšné čísla podľa pravidiel a ako riešenie zadajte 4-ciferné číslo v sivej časti tabuľky.

Pre $1, 1, 2, 2, 3, 3$ by správne vyplnená tabuľka vyzerala takto:

3	1	2	1	3	2

Výsledok. 3845

Riešenie. Pre jednoduchosť zápisu si tabuľku označíme ako pole f so šestnástimi členmi. To znamená, že ak je nejaké číslo na pozícii $f(n)$, nachádza sa v n-tom políčku. Zo zadania už poznáme tri políčka, $f(6) = 6$, $f(7) = 7$, $f(9) = 2$, jednoznačne teda dostaneme $f(13) = 6$, $f(15) = 7$ a $f(12) = 2$.

					6	7		2			2	6		7	

Všeobecne môžeme použiť dve rôzne stratégie: buď sa pozrieme, kde môže byť konkrétna dvojica čísel umiestnená alebo budeme uvažovať, aké číslo môžeme umiestniť do konkrétneho políčka (ako v Sudoku).

Napríklad môžeme hľadať možnosti, kam umiestniť dvojicu trojok. Máme tri možnosti: v prvej $f(1) = f(5) = 3$, v druhej $f(4) = f(8) = 3$ alebo v tretej $f(10) = f(14) = 3$.

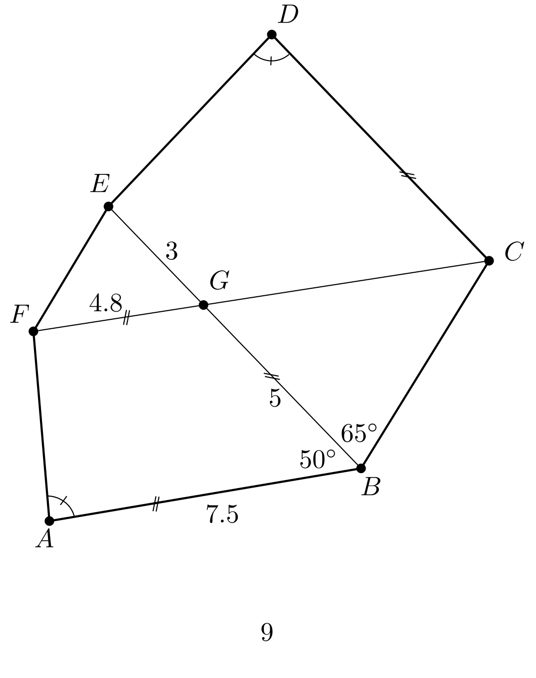
Ľahko uvidíme, že $f(10) = f(14) = 3$ nám dá jedinú možnosť pre $f(16)$ a ako dôsledok dostaneme aj $f(11) = 4$. Teraz však nikam nemôžeme umiestniť dvojicu osmičiek. Možnosť $f(4) = f(8) = 3$ nám dá dve možnosti pre dvojicu čísel 5, konkrétne $f(5) = f(11) = 5$ alebo $f(10) = f(16) = 5$. Obe alternatívy nás ale privedú k sporu, keďže v žiadnom z prípadov už nebudeme mať kam umiestniť štvorky.

Takže $f(1) = f(5) = 3$ nám necháva jedinú možnosť $f(2) = f(11) = 8$, jediný spôsob ako vyplniť zbytok tabuľky podľa pravidiel je $f(3) = f(8) = 4$, $f(14) = f(16) = 1$ a nakoniec $f(4) = f(10) = 5$.

3	8	4	5	3	6	7	4	2	5	8	2	6	1	7	1

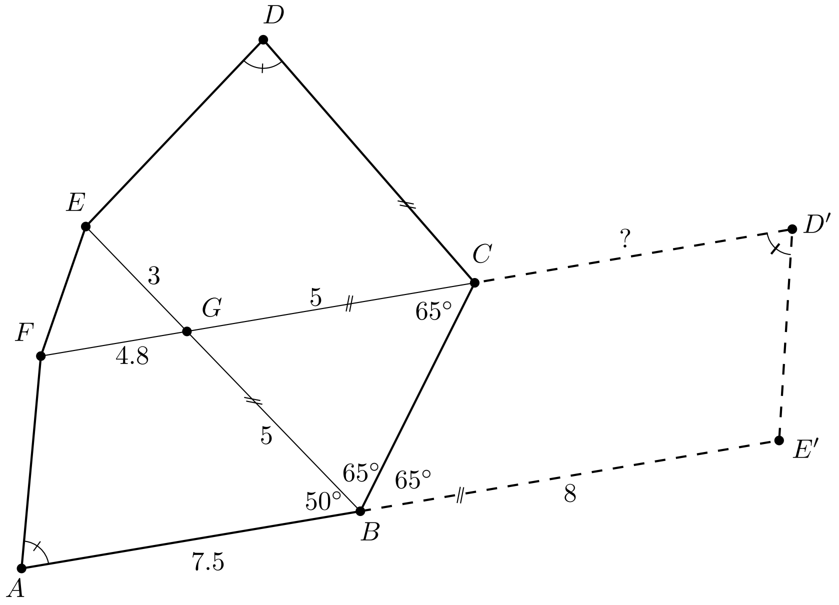
Jediným správnym výsledkom je 3845.

Úloha 29. Jožo má konvexný šesťuholník $ABCDEF$, ktorého diagonály BE a CF sa pretínajú v bode G. Tento šesťuholník má nasledujúce vlastnosti, ako je naznačené aj v nákrese: $|AB| = 7.5$, $|BG| = 5$, $|GE| = 3$, $|GF| = 4.8$, $|\sphericalangle BAF| = |\sphericalangle CDE|$, $|\sphericalangle ABG| = 50°$, $|\sphericalangle CBG| = 65°$, AB je rovnobežná s CF a CD je rovnobežná s BE. Určte veľkosť úsečky $|CD|$.



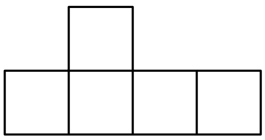
Výsledok. $5.7 = \frac{57}{10}$

Riešenie.



Vďaka dvom dvojiciam paralelných úsečiek a tomu, že $50° + 65° + 65° = 180°$, tak máme konfiguráciu rovnakú, akoby sme zohli rovnobežník $AE'D'F$ pozdĺž úsečky BC (naozaj je to rovnobežník, pretože $|\sphericalangle BAF| = |\sphericalangle CDE|$; ako na obrázku). Rovnaký výsledok by sme našli, ak by sme vhodne premietli vrcholy D a E podľa úsečky BC. Ďalej pozorovaním, že trojuholník BCG je rovnoramenný nájdeme podmienky na dĺžku $|CD| = |AB| + |BE|' - |CF| = |AB| + |EG| - |FG| = 5.7$.

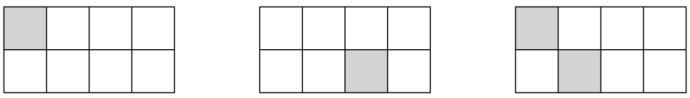
Úloha 30. Robber-ta a Fánka hrajú hru *Lodičky*. Okrem iných lodí majú obe vojnový krížnik s pristávacou plochou pre helikoptéry, ktorý má takýto tvar:



Fánka ukryla svoj krížnik niekde na hracom poli s 12×12 políčkami. Keďže hrajú na papieroch a s ceruzkami, túto loď mohla otáčať a obracať. Najmenej koľkokrát musí Robber-ta vystreliť, aby mala istotu, že Fánkin krížnik zasiahla aspoň raz?

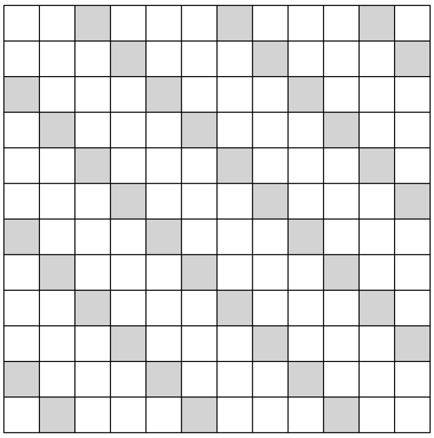
Výsledok. 36

Riešenie. Uvažujme blok 4×2. Ako vidno na prvých dvoch obrázkoch, výber jediného štvorčeka nám nezaručuje, že sme loď trafili, keďže stále existuje spôsob, ako mohla byť umiestnená bez zásahu. Navyše je zjavné, že výberom ľubovoľných dvoch štvorčekov v dvoch rôznych riadkoch sa lodička už nemala kam schovať – ak bola v tomto bloku, musí byť zasiahnutá. To vidíme aj na treťom obrázku. Je teda potrebné vystreliť do každého 4×2 bloku aspoň dvakrát. Tým zistíme, že Robber-ta musela vystreliť aspoň $18 \cdot 2 = 36$-krát.



Na druhú stranu vďaka takémuto diagonálnemu vzoru na 12×12 hracom poli vidíme, že 36 výstrelov stačí na to, aby

Robber-ta mala istotu, že krížnik trafila aspoň raz.



Úloha 31. Kubko pre dané kladné celé číslo a zostrojil ostrouhlý trojuholník ABC taký, že $|BC| = a$ a dĺžky v_b, v_c výšok zodpovedajúcich strán sú tiež celé čísla. Síce zabudol, aké bolo a, ale vie, že najväčší možný obsah tohto trojuholníka je 101.4. Nájdite a.

Výsledok. 13

Riešenie. Pretože ABC je ostrouhlý trojuholník, môžeme vidieť, že aby sme maximalizovali obsah $S = \frac{1}{2}ah_a$, výšky v_b a v_c musia byť čo najväčšie. Teda $v_b = v_c = a - 1$ a ABC je rovnoramenný. Označme stred strany BC ako M a pätu výšky v_c ako C_0. Z Pytagorovej vety pre podobné trojuholníky ľahko získame výpočet

$$101.4 = S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{a^2(a-1)}{4\sqrt{2a-1}}.$$

Keďže 101.4 je racionálne číslo, číslo $2a - 1$ musí byť nepárny štvorec, označme si to ako $(2k + 1)^2$ pre nejaké celé číslo $k \geq 0$, a teda $a = \frac{(2k+1)^2+1}{2} \in \{1, 5, 13, 25, 41, \dots\}$. Kontrolou prvých pár čísel a uvedomením si, že obsah sa zvyšuje s a rýchlo nájdeme riešenie $a = 13$.

Úloha 32. Tomáš zobral súčet 1 000 kladných celých čísel a dostal výsledok 1 200 500. Ak tieto čísla sú zoradené v zostupnom poradí, tak rozdiel medzi každými dvoma po sebe idúcimi číslami je buď 2 alebo 7. Najmenšie z čísel je 101. Teraz chce maximalizovať najväčšie z jeho čísel tak, aby súčet bol zachovaný. Aké je najväčšie možná hodnota tohto čísla?

Výsledok. 3099

Riešenie. Nech $n_1 = 101, n_2, \dots, n_{1000}$ označujú Tomášove čísla v zostupnom poradí. Ak predpokladáme, že rozdiel medzi dvomi po sebe idúcimi číslami bude 2, dostaneme $n_{1000} = 101 + 2 \cdot 999 = 2\,009$ a $\sum_{i=1}^{1000} n_i = 2200 \cdot 500 = 1\,100\,000$. Rozdiel medzi Tomášovým súčtom a týmto je $100\,500 = 20\,100 \cdot 5$.

Ak $n_{i+1} - n_i = 7$ pre nejaké konkrétne i namiesto 2, tak súčet sa zvýši o $(1\,000 - i) \cdot 5$ a n_{1000} sa zvýši o 5. Ako dôsledok máme, že pri maximalizovaní hodnoty n_{1000} s konštantným súčtom 1 200 500, vzdialenosti 7 by sa mali umiestniť na najvyššie možné čísla. Keďže $20100 = \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 201$, tak ak Tomáš zmení všetky vzdialenosti $n_{i+1} - n_i$ pre $i = 800, \dots, 999$ na 7 namiesto 2, dostane žiadanú sumu a najväčšie možné $n_{1000} = 101 + 2 \cdot 999 + 200 \cdot 5 = 3\,099$.

Úloha 33. Aké je najmenšie kladné celé číslo také, že ho môžeme zapísať iba pomocou cifier 2 a 9, má nepárny počet cifier a je deliteľné 11?

Výsledok. 29 292 929 292

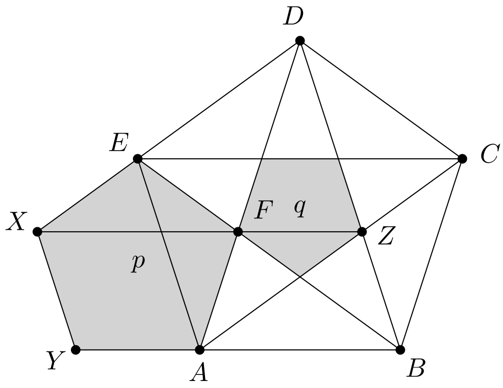
Riešenie. Všimnime si, že $100 \mod 11 = 1$. To znamená, že vynásobením 100 nezmeníme zvyšok čísla po delení 11. Teraz si predstavme, že číslo obsahuje rovnakú cifru a dvakrát za sebou. Toto číslo má tvar $x \cdot 10^{n+2} + 11a \cdot 10^n + y$. Keďže $11a \cdot 10^n$ je deliteľné 11, zvyšok závisí iba na $x \cdot 10^n + y$, čo sa dá skrátiť. Riešenie nájdeme hľadaním dlhšej a dlhšej postupnosti tvaru $2929 \cdots 292$ alebo $9292 \cdots 929$, až kým nenájdeme najmenšie také číslo deliteľné 11.

Iné riešenie. Číslo je deliteľné 11 práve vtedy, keď súčet cifier na párnych pozíciach mínus súčet cifier na nepárnych pozíciach je deliteľný 11. Z kritéria deliteľnosti 11 rovno vidíme, že riešenie nemôže mať dve po sebe idúce cifry. Keďže sa dvojky a deviatky striedajú, hľadáme najmenšie také n, že $2n - 9(n + 1)$ je násobkom 11 alebo $9n - 2(n + 1)$ je násobkom 11. V oboch prípadoch je riešenie $n = 5$, čo dáva 29 292 929 292 a 92 929 292 929. Zoberieme menšie z nich.

Úloha 34. Nech $ABCDE$ je pravidelný päťuholník a F je bod prieniku uhlopriečok AD a BE. Rovnoramenný trojuholník AFE môže byť doplnený do pravidelného päťuholníka $AFEXY$, označme ho p. Ešte môžeme vyrobiť jeden pravidelný päťuholník q tak, že jeho vrcholy sú priesečníky všetkých piatich uhlopriečok $ABCDE$. Ak $|AF| = 1$, aká je najväčšia možná vzdialenosť medzi vrcholom p a vrcholom q?

Výsledok. $(3 + \sqrt{5})/2 \doteq 2.61803$

Riešenie. Všimnime si, že päťuholníky p a q, sú rovnoľahlé cez bod F, preto strana medzi X a Z, jeden z možných párov bodov z p a q a maximálnou vzdialenosťou, musí ísť cez bod F.



Nasledujúce pozorovania sú priamočiare:

- $|\sphericalangle AFE| = 108°$, preto $|AE| = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ podľa kosínusovej vety;
- nasledujúce trojuholníky sú rovnoramenné: AFZ, XFD, DFE.

Z toho

$$|XF| = |DF| = |DE| = |AE| = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5}),$$
$$|ZF| = |AF| = 1.$$

Hľadaná vzdialenosť je $|XF| + |ZF| = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$.

Úloha 35. Uvažujme všetky trojice (a, b, c) prvočísel, riešiacich rovnicu

$$175a + 11ab + bc = abc.$$

Aký je súčet všetkých možných hodnôt c v týchto riešeniach?

Výsledok. 281

Riešenie. Môžeme upraviť rovnicu na $a(bc - 11b - 175) = bc$. Z tohto tvaru vidíme, že buď $a = b$ alebo $a = c$, keďže všetky premenné sú prvočísla. V prvom prípade dostaneme $ac - 11a - 175 = c \Leftrightarrow (a - 1)(c - 11) = 186$, čo má jediné prvočíselné riešenie $(2, 2, 197)$. V druhom prípade máme $ab - 11b - 175 = b \Leftrightarrow 175 = b(a - 12)$, ktoré má dve riešenia v prvočíslach – $(47, 5, 47)$ a $(37, 7, 37)$. Vypočítame hľadaný súčet $197 + 47 + 37 = 281$.

Úloha 36. Tom a Jerry si chcú kúpiť dom. Našli 10 ponúk. Majú však rôzne nároky, preto sa rozhodli vybrať dom podľa nasledujúceho procesu. Obaja zoradia domy vo svojom poradí preferencií, bez remíz (pre vonkajšieho pozorovateľa nerozlíšiteľné od náhodného výberu). Ak majú v trojici najvyššie hodnotených domov práve jednu zhodu, tak kúpia ten dom. Aká je pravdepodobnosť, že tento proces bude úspešný?

Výsledok. $\frac{21}{40}$

Riešenie. Pre hocijaké usporiadanie od Jerry musí mať Tom vo svojej top trojici práve jeden dom z Jerrinej top trojice a zvyšné dva musia byť medzi 4 až 10. Pre ľubovoľný Jerrin zoznam má Tom pravdepodobnosť

$$\frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{7}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{21}{40},$$

že sa zhodnú.

Úloha 37. Definujme polynómy

$$p(x) = ax^{2021} + bx^{2020} + \cdots + ax^{2019} + bx^{2018} + \cdots + bx^2 + ax + b$$

a

$$q(x) = ax^2 + bx + a,$$

kde a, b sú kladné reálne čísla. Vieme, že polynóm $q(x)$ má práve jeden koreň. Nájdite súčet všetkých reálnych koreňov polynómu $p(x)$.

Výsledok. -2

Riešenie.

Polynóm $p(x)$ sa dá napísať v tvare $(ax + b)(x^{2\cdot 1010} + x^{2\cdot 1009} + \cdots + x^2 + 1)$, pričom druhá zátvorka je ostro kladná, takže $x = \frac{-b}{a}$ je jediným reálnym koreňom polynómu $p(x)$.

Polynóm $q(x)$ má práve jeden koreň, takže jeho diskriminant je $b^2 - 4a^2 = 0$, a keďže a aj b sú kladné, môžeme tvrdiť že $b = 2a$.

Preto $x = \frac{-b}{a} = \frac{-2a}{a} = -2$.

Úloha 38. Nájdite súčet všetkých prvočísel p takých, že existuje kladné celé číslo n také, že desatinný rozvoj čísla $\frac{n}{p}$ má najkratšiu periódu dĺžky 5.

Výsledok. 37

Riešenie. Môžeme predpokladať $n < p$ a to, že desatinný rozvoj čísla $\frac{n}{p}$ má periódu dĺžky 5, ktorá sa začína prvou číslicou za desatinou čiarkou. Vskutku ak $\frac{n}{p}$ začína byť 5-periodické začínajúc nejakou cifrou ďalej od desatinnej čiarky, tak môžeme číslo n vynásobiť vhodným násobkom 10 a tým posunieme desatinnú čiarku. Ak potom $n \geq p$ môžeme n nahradiť $n' < p$ takým, že $n = kp + n'$.

Ak $0.\overline{ABCDEF}$ je periodická s desatinným rozvojom $\frac{n}{p}$, potom $p \mid 99999$, teda $p \mid 3^2 \cdot 41 \cdot 271$. Obe $1/3$ aj $2/3$ majú periódu 1, ale $1/41 = 0.\overline{02439}$ a $1/271 = 0.\overline{00369}$. Výsledkom je $41 + 271 = 312$.

Úloha 39. Štyri osoby sedia v miestnosti a každý ovláda presne tri z nasledujúcich piatich jazykov: slovenčina, angličtina, nemčina, španielčina, poľština. Nerozprávajú žiadnym iným jazykom. Môžeme vidieť, že existuje 10000 možných spôsobov, ako môžu rozprávať týmito jazykmi. Z koľkých z týchto možností môže niekto prehovoriť tak, že mu budú všetci rozumieť?

Výsledok. 5680

Riešenie. Máme $10 = \binom{5}{3}$ možností, v ktorých všetci rozprávajú rovnakými 3 jazykmi. Aby mali aspoň dva jazyky spoločné: máme $10 = \binom{5}{2}$ možností ako vybrať 2 jazyky, potom 3^4 ako vybrať tretí jazyk pre štyri osoby. Ak majú aspoň jeden jazyk spoločný: máme $5 = \binom{5}{1}$ možností ako vybrať spoločný jazyk, potom máme $\binom{4}{2} = 6^4$ možností ako vybrať ostatné dva jazyky pre štyri osoby.

Použijúc princíp inklúzie a exklúzie, hľadaný počet je $5 \cdot 6^4 - 10 \cdot 3^4 + 10 = 6480 - 810 + 10 = 5680$.

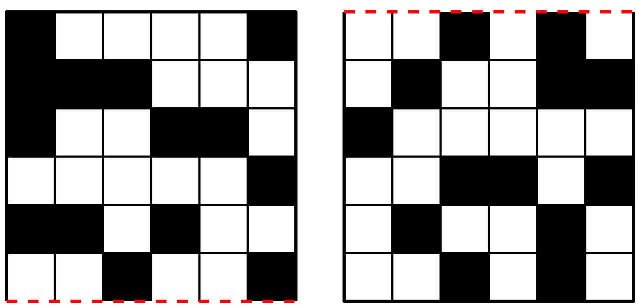
Úloha 40. Adam napísal všetky zlomky, ktorých čitateľ a menovateľ sú kladné celé čísla menšie alebo rovné ako 100 a vymazal všetky také, čo nie sú v základnom tvare. Potom ich usporiadal od najmenšieho po najväčšie. Aký zlomok je v Adamovom zozname tesne pred zlomkom $\frac{2}{3}$?

Výsledok. $\frac{65}{98}$

Riešenie. Ak $\frac{a}{b} < \frac{2}{3}$, tak $\frac{a}{b} < \frac{a+2}{b+3} < \frac{2}{3}$ a stačí nám hľadať číslo s najväčším možným menovateľom. Presnejšie to znamená hľadať medzi číslami 98, 99 a 100, preto možné riešenia sú $\frac{65}{98}$, $\frac{65}{99}$ a $\frac{66}{100} = \frac{33}{50}$. Porovnaním týchto čísel dostaneme, že

$$\frac{65}{99} < \frac{33}{50} < \frac{65}{98} < \frac{2}{3}.$$

Úloha 41. Dvadsať tri čiernych kociek je umiestnených v mriežke $6 \times 6 \times 6$. Obrázky zobrazujú výsledný objekt zobrazený z hora (ľavý obrázok) a spredu (pravý obrázok). Biele štvorce znamenajú, že v danom stĺpci nie je čierna kocka. Spoločná hrana dvoch obrázkov je vyznačená červenou. Určte povrch čierneho telesa.



Výsledok. 130

Riešenie. Obsah je rovný súčtu obsahov čiernych kociek mínus dvakrát počet spoločných stien čiernych kociek. Taký pár môže byť orientovaný v troch smeroch, nazvime ich "hore-dole", "dopredu-dozaduä "doľava-doprava". Aby sa "ľavo-pravý"prípad vyskytol, musí sa vyskytovať ako pár susedných štvorcov delený vertikálnou čiarou v oboch projekciách na rovnakej pozícií. Taký prípad sa nevyskytuje. Prípad "dopredu dozadu"musí ovplyvňovať ľavý štvorec – to sa stane dvakrát v prvom stĺpci. Keďže prvý stĺpec v pohľade spredu obsahuje iba jeden štvorček, musia všetky kocky byť v jednom riadku a mať spoločné steny. V poslednom prípade "hore-dole"vieme podobne povedať, že spoločné steny sa nachádzajú iba v piatom stĺpci pohľadu spredu a v piatom stĺpci pri pohľade zhora. Rovnako ako v predošlom sú dve dvojice stien spolu zlepené. Hľadaná plocha je preto $6 \cdot 23 - 2 \cdot 4 = 130$.

Úloha 42. *Deliaca postupnosť* kladného celého čísla N je postupnosť kladných celých čísel $d_1, d_2, \ldots, d_k$ takých, že $k \geq 1$, $d_1 \neq 1$, spĺňujú podmienky $d_1 \mid d_2 \mid d_3 \mid \cdots \mid d_k \mid N$ a $d_1 \cdot d_2 \cdot \cdots \cdot d_k = N$. Číslo d_k nazveme *vedúcim členom postupnosti*. Aký je aritmetický priemer vedúcich členov rôznych postupnosti pre všetky možné deliace postupnosti čísla 720?

Výsledok. 204

Riešenie. Máme, že $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$. Keďže pre vedúci člen musia platiť podmienky $d_k \mid 720$ a $d_1 \cdot \cdots \cdot d_k = 720$, je jasné, že $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ delí d_k. Teraz môžeme hľadať vedúce členy. Ktorékoľvek číslo tvaru $30e$, kde e je také, že $e \mid 2^3 3$, je vedúcim členom nejakej postupnosti. Existuje osem možných čísel e a pre oba $e = 2$ a $e = 6$ máme dve deliace postupnosti. V prvom prípade je deliacou postupnosťou $2, 6, 60$ s $12, 60$ a v druhom prípade je to $2, 2, 180$ s $4, 180$. Pre ostatné prípady e je deliaca postupnosť určená jednoznačne, preto máme 10 možných vodcov. Na nájdenie aritmetického priemeru stačí nájsť $\frac{30}{10}(1 + 2 + 2 + 4 + 8 + 3 + 6 + 6 + 12 + 24) = 3 \cdot 68 = 204$.

Všetky postupnosti sú tvaru buď $3 \mid e$ alebo $3 \nmid e$. V prvom prípade máme postupnosti $(2, 2, 6, 30)$, $(2, 6, 60)$, $(12, 60)$, $(6, 120)$, $(3, 240)$ a v druhom prípade máme postupnosti $(2, 2, 2, 90)$, $(2, 2, 180)$, $(4, 180)$, $(2, 360)$, (720).

Úloha 43. Máme tabuľku 5×1 a vrecko s doštičkami. Na každej doštičke je napísané jedno z písmen N, A, B, O, J. Koľko rôznych vreciek existuje, takých že počet možností ako vykladať $NABOJ$, z obsahu vreciek, je rovný 1440?

Výsledok. 9450

Riešenie. Označme postupne n, a, b, o, j počet doštičiek s písmenami N, A, B, O, J. Hľadáme také pätice (n, a, b, o, j) s vlastnosťou

$$naboj = 1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Každý prvočíselný deliteľ musí byť rozložený medzi n, a, b, o, j a rôzne rozloženia dávajú rôzne pätice. Máme

$$\binom{5}{1} + \binom{5}{2} \cdot 2 + \binom{5}{2} \cdot 2 + \binom{5}{3} \cdot 3 + \binom{5}{3} \cdot 3 + \binom{5}{4} \cdot 4 + \binom{5}{5} = 126$$

možností ako rozdistribuovať prvočísla 2 čo zodpovedá možnostiam ako rozložiť 5 na partície: 5, $4 + 1$, $3 + 2$, $3 + 1 + 1$, $2 + 2 + 1$, $2 + 1 + 1 + 1$, $1 + 1 + 1 + 1 + 1$. Ďalej máme

$$\binom{5}{1} + \binom{5}{2} = 15$$

možností ako rozložiť 3, na zodpovedné partície 2, $1 + 1$. Nakoniec máme

$$\binom{5}{1} = 5$$

možností ako rozložiť 5. Dokopy teda máme

$$126 \cdot 15 \cdot 5 = 9450$$

možných vreciek.

Úloha 44. Nájdite najväčšie kladné celé číslo n také, že $4^{2021} + 4^n + 4^{3500}$ je druhá mocnina celého čísla.

Výsledok. 4978

Riešenie. Všimnime si, že všetky tri sčítance sú štvorce, keďže $4 = 2^2$. Môžeme teda zobrať dve z nich, odmocniť, sčítať a umocniť:

$$(2^{2021} + 2^n)^2 = 4^{2021} + 2 \cdot 2^{2021} \cdot 2^n + 4^n = 4^{2021} + 2^{2022+n} + 4^n.$$

Porovnaním tohto výrazu so zadaním dostaneme

$$4^{3500} = 2^{2022+n} \qquad \Longleftrightarrow \qquad n = 4978.$$

Pre túto hodnotu máme určite štvorec. Ostatné dve možnosti výberu sčítancov vedú na riešenia $n = 541$ a $n = 2761$. Môžeme predpokladať, že $n = 4978$ je riešením.

Aby sme dokázali, že je najväčšie, musíme ukázať, že $4^{2021} + 4^n + 4^{3500}$ nie je štvorec pre $n = 4978 + m$, kde m je kladné celé číslo. Výraz

$$4^{2021} + 4^{3500} + 4^{4978+m} = 4^{2021} \cdot (1 + 4^{1479} + 4^{2957+m})$$

je štvorec práve vtedy, keď $(1 + 4^{1479} + 4^{2957+m})$ je štvorcom, keďže $4^{2021} = \left(2^{2021}\right)^2$ je štvorcom. Avšak

$$\left(2^{2957+m}\right)^2 = 4^{2957+m} < 1 + 4^{1479} + 4^{2957+m} = 1 + 2^{2958} + 4^{2957+m} < 1 + 2 \cdot 2^{2957+m} + 4^{2957+m} = \left(2^{2957+m} + 1\right)^2$$

ukazuje, že požadovaný výraz je medzi dvoma štvorcami, čo znamená, že sám nie je štvorcom. Riešením je $n = 4978$.

Úloha 45. Koľko koeficientov polynómu

$$P(x) = \prod_{i=2}^{2021} (x^i + (-1)^i i) = (x^2 + 2)(x^3 - 3)(x^4 + 4) \cdots (x^{2021} - 2021)$$

je ostro kladných.

Výsledok. 1021616

Riešenie. Uvažujme polynóm

$$Q(x) = P(-x) = (x^2 + 2)(-x^3 - 3)(x^4 + 4) \cdots (-x^{2021} - 2021) = (-1)^{1010}(x^2 + 2)(x^3 + 3)(x^4 + 4) \cdots (x^{2021} + 2021).$$

Nech $S = 2 + \cdots + 2021 = 2043230$. Keď si predstavíme súčin 2020 zátvoriek definujúcich Q, je jasné, že nebudeme mať žiadny lineárny člen a rovnako ani žiadny člen x^{S-1}, ak zvolíme mocninu x z každej zátvorky máme x^S inak máme najviac x^{S-2}. Ďalej si všimneme, že $Q(x)$ má všetky nenulové koeficienty kladné. Ukážeme, že jediné nulové koeficienty sú pri exponente 1 a $S - 1$.

Vskutku ak by existovalo m také, že x^m má nulový koeficient, tak by to znamenalo, že m sa nedá zapísať ako súčet čísel z množiny $\{2, 3, \ldots, 2021\}$. Číslo $m - 1$ musí byť tvaru $k + (k + 1) + \cdots + 2021$, inak by sme navýšením niektorého člena tohto súčtu o 1 dostali číslo m, ktoré sa takto dá zapísať. Najmenšie také $m-$ väčšie ako 1 je zjavne $3 + 4 + \cdots + 2021$, teda $m = S - 1$.

Polynóm $P(x)$ má oproti $Q(x)$ znamienka pri nepárnych mocninách otočené, teda záporné znamienka pri nepárnych mocninách, kladné pri párnych a nulové pri 1 a $S - 1$. Dokopy má $\frac{S}{2} + 1 = 1021616$ kladných koeficientov.

Úloha 46. Mesto budúcnosti ma pôdorys kockovej siete $4 \times 4 \times 4$. Každý bod s celočíselnými súradnicami je križovatkou a križovatky vzdialené 1 sú spojené cestou. Križovatka v strede mesta, $(2, 2, 2)$, je zavretá kvôli opravám a treba ju obchádzať. Miloš chce prejsť z križovatky $(0, 0, 0)$ do križovatky $(4, 4, 4)$ najkratšou možnou cestou pozdĺž ciest. Koľko rôznych ciest môže zvoliť?

Výsledok. 26550

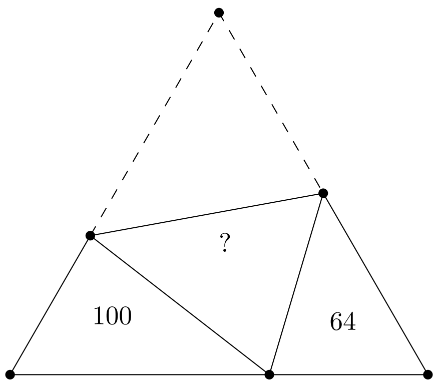
Riešenie. Najprv spočítame koľko existuje najkratších ciest bez podmienky na prostrednú križovatku. Máme prejsť z $(0, 0, 0)$ do $(4, 4, 4)$. Musíme prejsť štyri cesty v smere súradnice x, štyri v smere y a štyri v smere z v nejakom poradí. Ak by sme išli späť v nejakom smere, cesta nebude najkratšia. Máme dokopy $\frac{12!}{4! \cdot 4! \cdot 4!}$ ciest.

Teraz musíme odčítať tie cesty, ktoré vedú cez križovatku $(2, 2, 2)$. Zo symetrie vieme, že počet ciest vedúcich z $(0, 0, 0)$ do $(2, 2, 2)$ je rovnaký ako počet ciest z $(2, 2, 2)$ do $(4, 4, 4)$, čo je $\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$. Pre každú cestu z $(0, 0, 0)$ do $(2, 2, 2)$ existuje $\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$ ciest z $(2, 2, 2)$ do $(4, 4, 4)$. Preto počet všetkých ciest cez križovatku $(2, 2, 2)$ je $\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} \cdot \frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{6! \cdot 6!}{2^6}$.

Celkový počet ciest je $\frac{12!}{4!^3} - \frac{6!^2}{2^6} = 26550$.

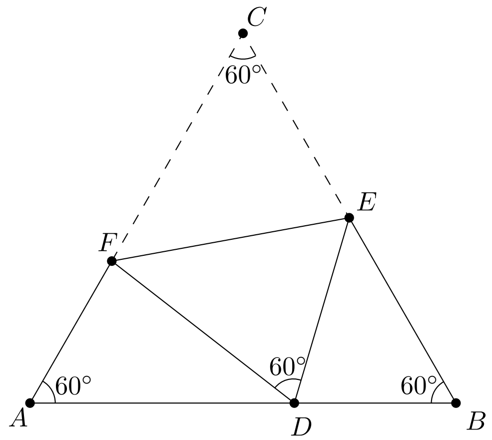
Úloha 47.

Marek zložil rovnostranný trojuholník tak, že jeden vrchol sa dotýka protiľahlej hrany. Obsahy dvoch novovytvorených neprekrytých trojuholníkových častí sú 100 a 64, tak ako aj na obrázku. Nájdite obsah prekrývajúcej sa oblasti.

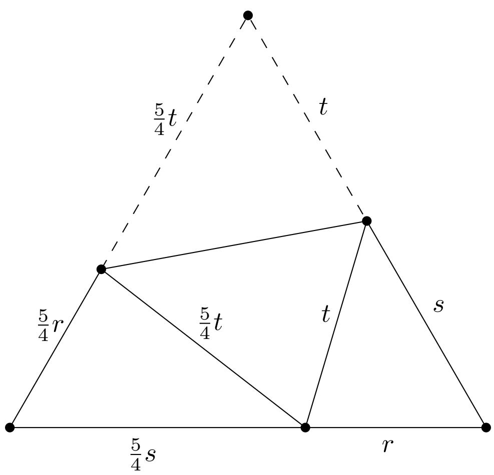


Výsledok. 98

Riešenie. Všetky dôležité body zaznačíme do obrázka:



V trojuholníku $\triangle BDE$ musí byť súčet vnútorných uhlov 180°, preto bude platiť $|\sphericalangle BDE| + |\sphericalangle DEB| = 120°$. Ďalej keďže $\sphericalangle BDA$ je priamy uhol, bude platiť $120° = |\sphericalangle BDE| + |\sphericalangle FDA|$.Potom $|\sphericalangle DEB| = |\sphericalangle FDA|$, teda trojuholníky $\triangle ADF$ a $\triangle BED$ sú podobné. Keďže tieto trojuholníky majú pomer obsahov 100 : 64, zodpovedajúce strany budú v pomere 10 : 8. Ak ďalej označíme $r = |DB|,\ s = |BE|,\ t = |ED|$, dostaneme dĺžky ako na nasledujúcom obrázku.



Ak označíme a dĺžku strany pôvodného rovnostranného trojuholníka, môžeme odvodiť:

$$a = s + t \tag{2}$$

$$a = \frac{5}{4}(r + t) \tag{3}$$

$$a = \frac{5}{4}s + r \tag{4}$$

$$64 = \frac{1}{2}rs \cdot \sin 60° = rs \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \tag{5}$$

Potom lineárna kombinácia rovníc (2)-(4) dáva $r = \frac{a}{3}$ a $s = \frac{8a}{15}$. Vložením týchto hodnôt do rovnice (5) dostávame

$$1440 = a^2\sqrt{3} = 4S$$

kde S je plocha rovnoramenného trojuholníka. Potom jednoducho získame hľadanú plochu A ako $100 + 64 + 2A = 360$ preto $A = 98$.

Úloha 48. Janko opakovane hádže vyváženou mincou, až kým mu nepadne postupnosť hlava – znak – hlava. Aká je pravdepodobnosť že nenastane postupnosť znak – hlava – znak – hlava?

Výsledok. $\frac{5}{8}$

Riešenie. Označme E udalosť, že postupnosť „hlava – znak – hlava“ alebo jednoduchšie HZH padne skôr ako $ZHZH$, ktorej pravdepodobnosť označme $\Pr(E)$. Pre danú postupnosť hláv a znakov s označme $\Pr(E|s)$ pravdepodobnosť, že

E nastane v postupnosti, ktorá začína s a pokračuje náhodne. Označme $x = \Pr(E|H)$ a $y = \Pr(E|T)$. Ak uvážime ďalšie dva až tri hody vyváženou mincou, bude pre x platiť:

$$x = \frac{1}{2}\Pr(E|HH) + \frac{1}{4}\Pr(E|HZZ) + \frac{1}{4}\Pr(E|HZH) \tag{6}$$

a analogicky o tri až štyri kroky bude pre y platiť:

$$y = \frac{1}{2}\Pr(E|ZZ) + \frac{1}{4}\Pr(E|ZHH) + \frac{1}{8}\Pr(E|ZHZZ) + \frac{1}{8}\Pr(THTH). \tag{7}$$

Keďže HZH aj $ZHZH$ sú striedavé postupnosti, máme:

$$x = \Pr(E|H) = \Pr(E|HH) = \Pr(E|ZHH),$$
$$y = \Pr(E|Z) = \Pr(E|ZZ) = \Pr(E|HZZ) = \Pr(E|ZHZZ).$$

Ďalej keďže $\Pr(E|HZH) = 1$ a $\Pr(E|ZHZH) = 0$, rovnice (6) a (7) majú tvar:

$$x = \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{1}{4},$$
$$y = \frac{y}{2} + \frac{x}{4} + \frac{y}{8},$$

teda $x = \frac{3}{4}$ a $y = \frac{1}{2}$. Hľadaná pravdepodobnosť je potom $\Pr(E) = \frac{1}{2}\Pr(E|H) + \frac{1}{2}\Pr(E|Z) = \frac{x+y}{2} = \frac{5}{8}$.

Úloha 49. Nájdite najmenšie kladné reálne číslo x také, že spĺňa nasledujúce podmienky: existuje aspoň jedna trojica kladných reálnych čísel (s, t, u) takých, že

$$s^2 - st + t^2 = 12,$$
$$t^2 - tu + u^2 = x$$

a pre ľubovoľné dve platné trojice platí, že ak sa zhodujú v s a t, tak sa musia zhodovať aj v u.

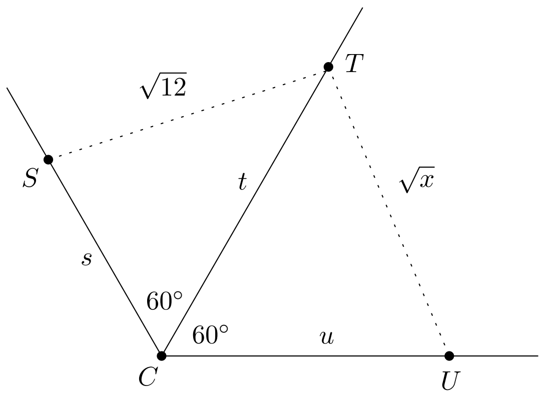
Výsledok. 16

Riešenie. Uvažujme body v rovine S, T, U a C také, že $|CS| = s$, $|CT| = t$, $|CU| = u$ a

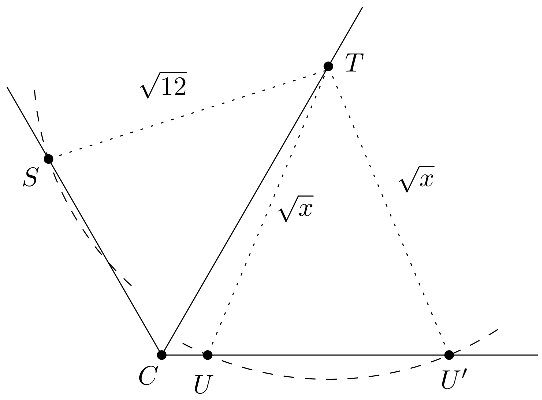
$$|\sphericalangle SCT| = |\sphericalangle TCU| = 60^\circ$$

(ako na obrázku). Podľa kosínusovej vety ($\cos 60^\circ = 1/2$) rovnice zo zadania implikujú, že $|ST|^2 = 12$ a $|TU|^2 = x$. Keďže vzdialenosť z bodu T k priamke SC je najviac $\sqrt{12}$ práve vtedy keď $|\sphericalangle TSC| = 90^\circ$, dostaneme

$$t \le \frac{\sqrt{12}}{\sin(60^\circ)} = 4.$$



V následujúcom argumente zafixujeme bod C a budeme hýbať iba bodmi S, T a U pozdĺž uvažovaných priamok tak, aby spĺňali požadované podmienky. Ak $\sqrt{x} < 4$, potom je možné umiestniť úsečku TU tak, že $|CU| < |CT| \le 4$ a $|\sphericalangle CUT| \ne 90^\circ$ (stačí umiestniť U blízko bodu C). Potom z prvej nerovnosti a podmienky na uhol máme, že kružnice so stredom v bode T a polomerom $\sqrt{x}$ má s priamkou CU dva spoločné body U a U' (ako na druhom obrázku) čo je v spore s podmienkou jednoznačnosti u. Druhá nerovnosť implikuje, že kružnica so stredom v bode T a polomerom $\sqrt{12}$ má prienik s CS aspoň v jednom bode S. Tieto dve skutočnosti implikujú, že $x \geq 4$.



Pre $\sqrt{x} = 4$ (resp. pre hoci aké pevne zvolené $\sqrt{x} \geq 4$) a hoci aké $0 < t \leq 4$ máme iba jeden taký bod U, a preto spomínané podmienky sú splnené. Analogicky kružnica so stredom v bode T a polomerom $\sqrt{12}$ má s priamkou CS aspoň jeden spoločný bod S a preto výsledná trojica $(s,t,u) = (|CS|, |CT|, |CU|)$ je riešením systému rovníc pre x. Potom najmenšie také x je $4^2 = 16$.

Úloha 50. Pre koľko z čísel $x \in \{1, 2, 3, \ldots, 2020\}$ je možné, že Marek sčítal 2020 nezáporných po sebe idúcich čísel, Michal sčítal $2020 + x$ nezáporných po sebe idúcich čísel a dostali rovnaký výsledok?

Výsledok. 1262

Riešenie. Nech n označí prvý sčítanec Marekovej sumy a m prvý sčítanec Michalovej sumy. Potom

$$\begin{aligned} 2020n + \frac{2019 \cdot 2020}{2} &= (2020+x)m + \frac{(2019+x)(2020+x)}{2} \\ 2020(n-m) &= x\frac{2m + 2019 + 2020 + x}{2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Keďže ľavá strana (8) je deliteľná 4, tak musí byť aj pravá strana, teda

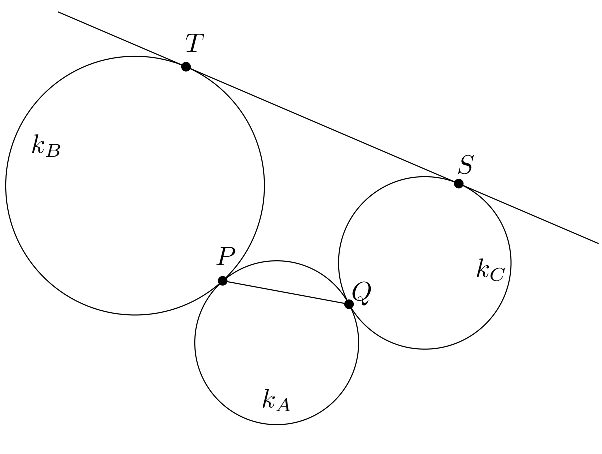
$$4 \mid x(m + \frac{x-1}{2}).$$

Potom buď x je nepárne (a zátvorka je celé číslo deliteľné 4) alebo $8 \mid x$ (ak x je párne, potom $x - 1$ je nepárne a stratíme jednu mocninu 2 v zlomku).

Môžeme priamo overiť, že čísla $x = 2k + 1$ pre $k \in \{0, 1, \ldots, 1009\}$, $m = 2020 - k$ a $n = 2020 + 3k + 2$ spĺňajú rovnicu (8). Pre čísla $x = 8k$, $k\{\mathit{1}, \mathit{2}, \ldots, \mathit{252}\}$ môžeme obdobne overiť, že (8) platí pre $m = 1263 - 4k$ a $n = 1263 + 9k$ (poznamenajme, že m a n sú kladné pre všetky uvažované hodnoty k).

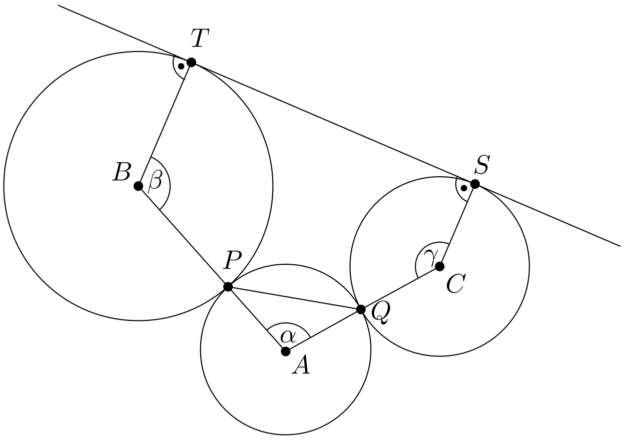
V súčte zistíme, že je $1010 + 252 = 1262$ možných hodnôt x a zároveň sme dokázali, že ich nie je viac.

Úloha 51. Kružnice k_B a k_C sa dotýkajú kružnice k_A postupne v bodoch P a Q. Nájdite polomer r_A kružnice k_A, ak sú polomery kružníc k_B a k_C postupne $r_B = 5$ a $r_C = 3$, $|PQ| = 6$ a spoločná dotyčnica kružníc k_B a k_C má $|TS| = 12$ (jednotlivé body môžete vidieť na obrázku).



Výsledok. $\frac{4+\sqrt{61}}{3} \doteq 3.93675$

Riešenie. Nech A, B, C označujú stredy kružníc. Ďalej nech $\alpha = |\sphericalangle QAP|, \beta = |\sphericalangle PBT|, \gamma = |\sphericalangle SCQ|$. Keďže $BT \perp TS$ a $CS \perp TS$, tak platí $\alpha + \beta + \gamma = 360°$ vďaka vnútorným uhlom päťuholníka $TBACS$.



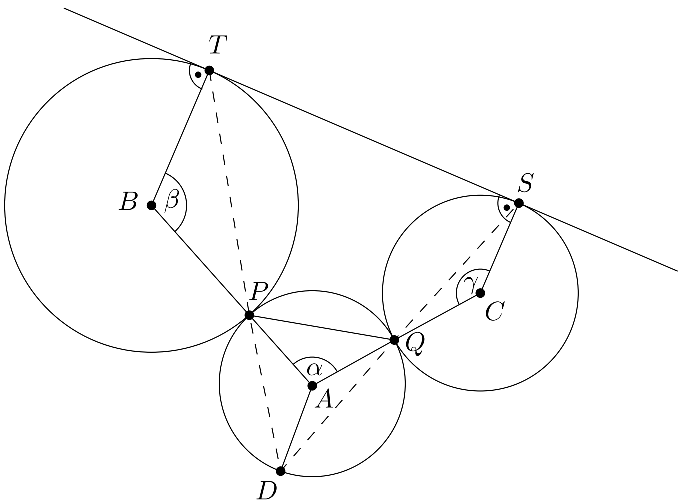
Keďže TS je dotyčnica ku kružniciam k_B a k_C, dostávame $|\sphericalangle PTS| = \frac{1}{2}\beta$ and $|\sphericalangle TSQ| = \frac{1}{2}\gamma$. Vďaka

$$|\sphericalangle SQP| = 180° - (90° - \frac{1}{2}\alpha) - (90° - \frac{1}{2}\gamma) = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma),$$

máme, že $|\sphericalangle PTS| + |\sphericalangle SQP| = 180°$, preto štvoruholník $PQST$ je tetivový. Nech D označuje priesečník priamok TP a SQ. Keďže $PQST$ je tetivový, trojuholníky DST a DQP sú podobné a dostávame rovnicu

$$\frac{|PQ|}{|TS|} = \frac{|DP|}{|DS|} = \frac{|DQ|}{|DT|}.$$

Použijúc znova $|\sphericalangle PTS| = \frac{1}{2}\beta$ a $|\sphericalangle TSQ| = \frac{1}{2}\gamma$, dostávame $|\sphericalangle SDT| = |\sphericalangle QDP| = \frac{1}{2}\alpha$, čo znamená, že D leží na kružnici k_A.



Preto máme $|\sphericalangle DPA| = |\sphericalangle TPB|$ a trojuholníky APD a BPT sú podobné. Analogicky dostaneme, že $\triangle ADQ \sim \triangle CSQ$. Z týchto podobností odvodíme vzťah

$$\frac{|TP|}{|DP|} = \frac{r_B}{r_A} \quad \text{a} \quad \frac{|SQ|}{|DQ|} = \frac{r_C}{r_A},$$

vďaka ktorému

$$\frac{|DT|}{|DP|} = \frac{r_A + r_B}{r_A} \quad \text{a} \quad \frac{|DS|}{|DQ|} = \frac{r_A + r_C}{r_A}.$$

Dosadíme výsledky do predošlej rovnice a máme

$$\frac{|TS|^2}{|PQ|^2} = \frac{|DS|}{|DP|} \cdot \frac{|DT|}{|DQ|} = \frac{(r_A + r_B) \cdot (r_A + r_C)}{r_A^2}.$$

Dosadením hodnôt dostaneme kvadratickú rovnicu v neznámej r_A

$$\frac{144}{36} \cdot r_A^2 = r_A^2 + 8r_A + 15 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3r_A^2 - 8r_A - 15 = 0.$$

Tá ma dve riešenia tvaru

$$\frac{8 \pm \sqrt{64 + 12 \cdot 15}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{61}}{3}.$$

Jediným kladným riešením je $\frac{4+\sqrt{61}}{3} \doteq 3.93675$.