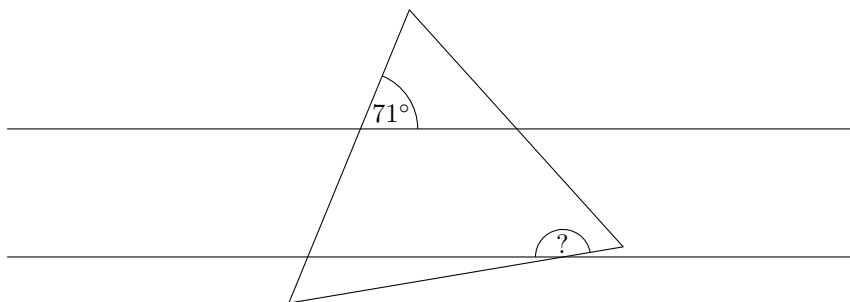


Zadanie 1. Boki trójkąta równobocznego zostały przecięte przez parę prostych równoległych. Znając miarę kąta zaznaczonego na rysunku, wyznacz miarę w stopniach kąta oznaczonego pytajnikiem.



Wynik. 169

Rozwiązanie. Proste są równoległe, a suma kątów wewnętrznych w dowolnym trójkącie wynosi 180° , możemy więc łatwo wyliczyć, że kąty w małym trójkącie odciętym przez dolną prostą są równe 60° , $180^\circ - 71^\circ = 109^\circ$ i $180^\circ - 109^\circ - 60^\circ = 11^\circ$. Zatem szukany kąt ma miarę $180^\circ - 11^\circ = 169^\circ$.

Zadanie 2. Adela ma po jednej bluzce i po jednej spódnicy w każdym z siedmiu kolorów: czerwonym, niebieskim, zielonym, żółtym, czarnym, pomarańczowym i fioletowym. Chce ona, aby każdy jej strój składał się z bluzki i spódnicy różnych kolorów. Ponadto, jeżeli jeden element stroju jest czerwony, to chce, aby drugi był fioletowy. Ile możliwych strojów może stworzyć Adela?

Wynik. 32

Rozwiązanie. Używając kolorów różnych od czerwonego można stworzyć $6 \cdot 6$ różnych strojów, jednak 6 spośród nich będzie miało oba elementy tego samego koloru. Oprócz tego, są 2 możliwe czerwono-fioletowe stroje. Wobec tego, liczba wszystkich możliwych strojów wynosi $36 - 6 + 2 = 32$.

Zadanie 3. Suma sześciu parami różnych dodatnich liczb całkowitych wynosi 22. Wyznacz ich iloczyn.

Wynik. 840

Rozwiązanie. Najmniejsza możliwa suma sześciu parami różnych dodatnich liczb całkowitych wynosi $1+2+3+4+5+6 = 21$. Skoro suma liczb z treści zadania jest jedynie o 1 większa, to pewna z tych liczb jest o 1 większa od pewnej liczby spośród 1, 2, 3, 4, 5, 6, a reszta jest taka sama. Co więcej, żadne dwie liczby się nie powtarzają, zatem jedynym możliwym zestawem liczb jest 1, 2, 3, 4, 5, 7. Ich iloczyn wynosi 840.

Zadanie 4. Ilu co najmniej prostopadłościanów $6 \times 15 \times 20$ potrzebujemy, aby zbudować z nich sześcian, jeżeli wszystkie prostopadłościany muszą być tak samo zorientowane?

Wynik. 120

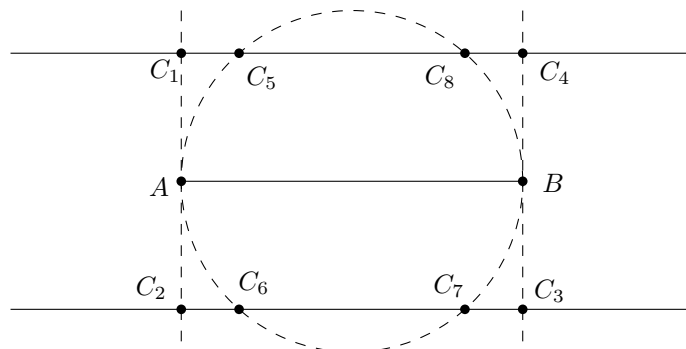
Rozwiązanie. Warunek o jednakowej orientacji oznacza, że długość krawędzi tak uzyskanego sześcianu musi być podzielna przez $6 = 2 \cdot 3$, $15 = 3 \cdot 5$ i $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$, a więc również przez $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$. W oczywisty sposób możemy zbudować sześcian o krawędzi 60. Zatem minimalna liczba użytych prostopadłościanów jest równa $\frac{60^3}{6 \cdot 15 \cdot 20} = 120$.

Zadanie 5. Kasia narysowała odcinek długości 1, a następnie chciała skonstruować trójkąt prostokątny o polu równym 0.2 używając tego odcinka jako jednego z boków. Kasia zdała sobie właśnie sprawę, że można to zrobić na kilka różnych sposobów. Wyznacz ich liczbę.

Wynik. 8

Rozwiązanie. Oznaczmy końce odcinka Kasi przez A i B . Wysokość szukanego trójkąta ABC opuszczona z trzeciego wierzchołka C musi być długości 0.4, żeby $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0.4 = 0.2$ było wymaganą wielkością pola. Oznacza to, że wierzchołek C musi leżeć na jednej z dwóch prostych równoległych do prostej AB .

Jeśli kąt prosty znajduje się przy wierzchołku A , to C musi leżeć na prostej prostopadłej do odcinka AB przechodzącej przez A . Jej przecięcie ze wspomnianymi prostymi równoległymi daje pierwsze dwa rozwiązania C_1 i C_2 zaznaczone na rysunku. Podobnie jeśli kąt prosty znajduje się przy wierzchołku B , to dostajemy rozwiązania C_3 i C_4 . W przypadku, gdy kąt prosty znajduje się przy wierzchołku C , punkt C musi leżeć na okręgu o średnicy AB . Skoro $0.4 < \frac{1}{2}$, to okrąg ten przecina się z prostymi równoległymi w dokładnie czterech punktach C_5, C_6, C_7 i C_8 oraz żaden z nich nie pokrywa się z poprzednio znalezionymi rozwiązaniami. Otrzymaliśmy zatem osiem różnych możliwych punktów.



Zadanie 6. W poniższym równaniu każda z liter oznacza pewną niezerową cyfrę, przy czym różnym literom przypisane są różne cyfry. Wyznacz liczbę BAC .

$$\begin{array}{r} A \quad A \quad B \\ + \quad A \quad B \quad A \\ + \quad \quad C \quad C \\ \hline B \quad A \quad C \end{array}$$

Wynik. 732

Rozwiązanie. Patrząc na trzecią kolumnę, widzimy, że dodanie $A + B$ do C nie zmienia cyfry jednostki, a zatem $A + B = 10$. W drugiej kolumnie mamy zatem przeniosioną jedynkę, a więc dodajemy $A + B + C + 1 = 11 + C$, otrzymując w wyniku $1A$ (nie możemy uzyskać $2A$, jako że wtedy mielibyśmy $C = 9$ i $A = 0$, a wszystkie cyfry mają być niezerowe). Zatem $C + 1 = A$. W pierwszej kolumnie dostajemy z kolei równość $A + A + 1 = B$. Dostajemy trzy równania na A , B i C , których jedynym rozwiązaniem jest $A = 3, B = 7, C = 2$, a zatem $BAC = 732$.

Zadanie 7. Liczbę całkowitą dodatnią nazwiemy *smaczną*, gdy iloczyn jej cyfr wynosi 36. Zdefiniujmy liczby a i b następująco:

- a jest sumą cyfr najmniejszej możliwej liczby smacznej;
- b jest najmniejszą możliwą sumą cyfr liczby smacznej.

Wyznacz różnicę $a - b$.

Wynik. 3

Rozwiązanie. Rozkład liczby 36 na czynniki pierwsze to $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$. Wyznamy najmniejszą możliwą liczbę smaczną. Zauważmy, że istnieją liczby dwucyfrowe o iloczynie cyfr równym 36. Aby taka liczba była możliwie najmniejsza, trzeba zminimalizować pierwszą cyfrę, podczas gdy druga cyfra nie może przekroczyć 9. Stąd najmniejsza liczba smaczna to 49, a jej suma cyfr to $4 + 9 = 13$. Teraz wyznaczmy najmniejszą możliwą sumę cyfr liczby smacznej. Liczba 2233 daje sumę 10. Żadna inna liczba smaczna nie może mieć mniejszej sumy cyfr, ponieważ dla dowolnych dwóch liczb większych od 1 ich iloczyn jest większy lub równy sumie. Zatem poszukiwana różnica to $13 - 10 = 3$.

Zadanie 8. Pewnego dnia roboty zbudowały pierwszą bazę na Marsie z miejscem dla 100 osób i od tamtej pory stale powiększają bazę w taki sposób, że co miesiąc przybywa miejsce dla dodatkowych 10 osób. Tego samego dnia, w którym zbudowano bazę dla 100 osób, pierwszy prom kosmiczny wyleciał z Ziemi na Marsa, by przywieźć 20 kolonizatorów do bazy po 7 miesiącach podróży. Była to pierwsza z n identycznych misji, które odbyły się kolejno $0, 1, 2, \dots, n-1$ miesięcy po budowie bazy. Wyznacz największą możliwą liczbę n , dla której pojemność bazy nigdy nie zostanie przekroczona.

Wynik. 16

Rozwiązanie. Pierwszych 20 kolonizatorów przybyło 7 miesięcy po budowie bazy, i od tamtej pory, dla $k \geq 7$, po k miesiącach w bazie znajdowało się $20(k-6)$ osób. W tym momencie w bazie znajdowało się miejsce dla $100 + 10k$ osób, stąd

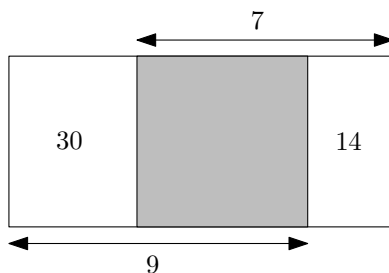
$$20(k-6) \leq 100 + 10k,$$

a więc równoważnie

$$k \leq 22.$$

Zatem wszyscy kolonizatorzy przybywający do 22 miesięcy po budowie bazy (i tylko ci) mogli się w niej zmieścić. Skoro wylot ostatniej misji musiał mieć miejsce 7 miesięcy wcześniej, to możliwe wyloty miały miejsce $0, 1, \dots, 15 = 22 - 7$ miesięcy po rozpoczęciu. Zatem największa możliwa liczba misji to 16.

Zadanie 9. Rysunek przedstawia prostokąt podzielony na 3 mniejsze prostokąty. Oblicz pole środkowego prostokąta, znając pola pozostałych dwóch oraz długości zaznaczone na rysunku.



Wynik. 42

Rozwiązanie. Niech h będzie wysokością prostokątów, a A szukany pole. Wtedy $30 + A = 9h$ i $A + 14 = 7h$. Rozwiązując układ równań, otrzymujemy $h = 8$ i $A = 42$.

Zadanie 10. Marek i Łukasz postawili sobie wyzwanie: jeśli któryś z nich odpowie niepoprawnie na zadanie o numerze n z tegorocznego Nąboja, będzie musiał zrobić $10n$ pompek. Na Nąboju są 42 zadania. Marek rozwiązywał tylko zadania o numerach podzielnych przez 5, zaś Łukasz o numerach dających resztę 1 z dzielenia przez 5. Wiedząc, że obaj podali przynajmniej jedną błędną odpowiedź, do żadnego zadania nie zostały podane dwie błędne odpowiedzi oraz Marek wykonał dokładnie tyle samo pompek co Łukasz, wyznacz najmniejszą możliwą liczbę pompek wykonanych przez Marka.

Wynik. 550

Rozwiązanie. Ponieważ Marek rozwiązuje tylko problemy o numerze podzielnym przez 5, liczba wykonanych przez niego pompek musi dzielić się przez 50. Zatem liczba pompek, które zrobił Łukasz też musi się dzielić przez 50. Ponieważ Łukasz rozwiązuje tylko zadania o numerach dających resztę 1 z dzielenia przez 5, musiał podać przynajmniej 5 błędnych odpowiedzi aby otrzymać liczbę pompek podzielną przez 50.

Założmy, że Łukasz odpowiedział błędnie na zadania 1, 6, 11, 16 oraz 21, zaś Marek na 10, 20 oraz 25. Wtedy obaj wykonali po 550 pompek. Ponieważ 1, 6, 11, 16 i 21 jest piątką numerów zadań rozwiązywanych przez Łukasza o minimalnej sumie, 550 jest minimalną liczbą pompek zrobionych przez Łukasza i Marka.

Zadanie 11. W pewnej grupie dziewięciu przyjaciół, niektórzy pożyczili innym pieniądze. Pewnego dnia postanowili pozbyć się tych długów. Tabela poniżej pokazuje bilans dla każdej pary znajomych, przykładowo dług A wobec B wynosi 5. Przez transakcję rozumiemy czynność, w którym jedna osoba daje pieniądze drugiej. Wyznacz najmniejszą możliwą liczbę transakcji potrzebną do wyrównania wszystkich długów.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A	0	-5	-1	0	3	3	5	2	4
B	5	0	3	-5	1	0	2	7	-4
C	1	-3	0	-5	2	3	6	-3	0
D	0	5	5	0	-8	-4	7	2	1
E	-3	-1	-2	8	0	4	-11	4	-7
F	-3	0	-3	4	-4	0	6	-4	0
G	-5	-2	-6	-7	11	-6	0	-1	5
H	-2	-7	3	-2	-4	4	1	0	4
I	-4	4	0	-1	7	0	-5	-4	0

Wynik. 6

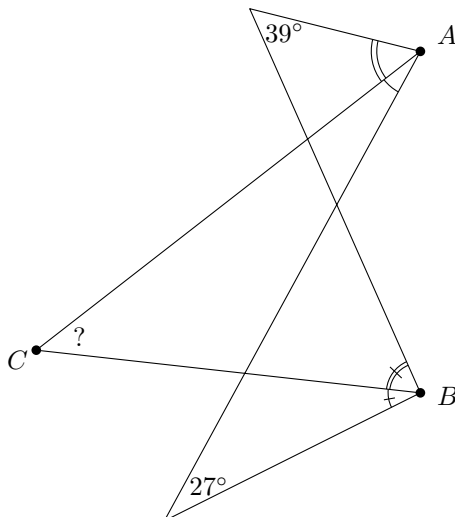
Rozwiązanie. Sumując liczby w wierszach, dostajemy łączne bilansy przyjaciół: +11, +9, +1, +8, -8, -4, -11, -3, -3. Ponieważ 5 spośród nich jest ujemnych, musi odbyć się przynajmniej 5 transakcji. Z drugiej strony, jeden z przyjaciół musi zapłacić osobie z bilansem +1 i nie może być to jedyna wykonana przez niego transakcja, więc konieczne jest 6 transakcji i tę liczbę łatwo osiągnąć.

Zadanie 12. Andrzej i Marzena poszli na spacer i znaleźli 35 kasztanów. Rozdzielili je na kilka (więcej niż jeden) stosów, z których każdy zawierał co najmniej 2 kasztany. Następnie zabrali po kasztanie z każdego stosu i włożyli je na pierwszy stos. Po tej operacji każdy stos zawiera tyle samo kasztanów. Ile kasztanów początkowo znajdowało się na drugim stosie?

Wynik. 8

Rozwiązanie. Dodatnie dzielniki liczby 35 to 1, 5, 7, 35. Ponieważ po przeprowadzonej zmianie każdy stos zawiera tyle samo kasztanów, jeden z tych dzielników musi być liczbą stosów. Z założeń zadania wiemy, że nie jest to 1. Liczba 35 również nie jest możliwa, bo wówczas każdy stos zawierałby tylko jednego kasztana. Jeżeli stosów jest 7, to po zmianie każdy miałby po 5 kasztanów. Jednak wówczas na początku ich rozmiary musiałyby być równe $-1, 6, 6, 6, 6, 6, 6$, co jest niemożliwe. Zatem jedyne możliwe rozwiązanie to 5 stosów, o początkowych liczbach kasztanów 3, 8, 8, 8, 8.

Zadanie 13. Na poniższym rysunku dane są miary dwóch kątów. Co więcej wiemy, że miary zaznaczonych kątów przy wierzchołku A są w stosunku $2 : 1$. Miary kątów przy wierzchołku B także są w stosunku $2 : 1$. Większy z kątów w obu przypadkach zaznaczony jest podwójną linią. Wyznacz miarę kąta ACB w stopniach.



Wynik. 31

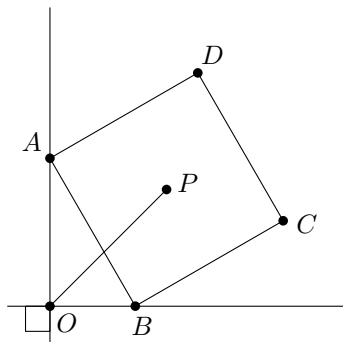
Rozwiązanie. Oznaczmy przez P i D nieoznaczone punkty na górze i na dole rysunku, a przez O punkt przecięcia prostych AD i PB . Niech $|\angle CAD| = \alpha$ i $|\angle CBD| = \beta$. Dostajemy, że $39^\circ + 3\alpha = 27^\circ + 3\beta$ (patrząc na kąty w trójkątach AOP i BOD). Analogicznie $|\angle BPA| + |\angle CAP| = |\angle ACB| + |\angle PBC|$, skąd dostajemy $39^\circ + 2\alpha = |\angle ACB| + 2\beta$. Z pierwszego równania wyliczamy $\beta - \alpha = 4^\circ$ i podstawiając do drugiego otrzymujemy $|\angle ACB| = 39^\circ - 2(\beta - \alpha) = 31^\circ$.

Zadanie 14. Dla ilu liczb całkowitych a funkcja $f(x) = 9x^2 + ax - 2022$, określona na zbiorze liczb rzeczywistych, przyjmuje dokładnie 2022 parami różne ujemne wartości całkowite?

Wynik. 11

Rozwiązanie. Przedstawienie f jako $f(x) = (3x + \frac{a}{6})^2 - \frac{a^2}{36} - 2022$ dowodzi, że zbiorem wartości f są wszystkie liczby rzeczywiste większe lub równe $-\frac{a^2}{36} - 2022$. Warunek przyjmowania dokładnie 2022 całkowitych ujemnych wartości implikuje, iż $-2023 < -\frac{a^2}{36} - 2022 \leq -2022$, co jest równoważne $\frac{a^2}{36} < 1$ i dalej $a^2 < 36$. Ostatnia nierówność zachodzi dla $a \in \{-5, -4, \dots, 4, 5\}$, a zatem wynikiem jest 11.

Zadanie 15. Kwadrat $ABCD$ o środku P wpisany jest w kąt prosty AOB . Wiedząc, że $AO = 6$ i $OP = 4\sqrt{2}$, wyznacz iloczyn odległości punktu D od prostych OA i OB .



Wynik. 48

Rozwiązanie. Poprowadźmy przez punkt P proste prostopadłe do prostych OB i OA . Oznaczmy przez E i F punkty ich przecięcia odpowiednio z prostą OB i OA . Z cechy kąt-bok-kąt wnosimy, że trójkąty PFA i PEB są przystające. Zatem $PF = PE$. Stąd czworokąt $PFOE$ jest kwadratem, a więc $OE = OF = \frac{OP}{\sqrt{2}} = 4$. Zatem $BE = AF = OA - 4 = 2$ i $OB = 2$. Jeśli teraz poprowadzimy z punktu D prostą prostopadłą do prostej AO do przecięcia z prostą AO w punkcie G , to trójkąty DGA , AOB będą przystające. Zatem $DG = OA = 6$ and $AG = OB = 2$. Zatem odległość D od prostej OB wynosi 8, a od prostej OA wynosi 6. Ich iloczyn jest więc równy 48.

Zadanie 16. System metra w Nąbojowie składa się z jednej okrężnej linii z 2022 stacjami ponumerowanymi $1, 2, \dots, 2022$, o równym czasie przejazdu między sąsiednimi stacjami. Zwiedzając miasto, Piotrek kupił tygodniowy bilet i postanowił spędzić cały czas w metrze, wielokrotnie jeżdżąc po mieście. Rozpoczyna podróż na stacji 1, a jego pociąg jedzie w kierunku rosnącym (tzn. następna stacja to 2). Na ścianie jednej ze stacji zauważył piękne zadanie matematyczne. Rozwiązanie zajęło mu cztery razy więcej czasu niż dotychczasowa podróż. Zaraz po znalezieniu rozwiązania Piotrek znalazł się na stacji numer 2022. Jaki był numer stacji, na której Piotrek zauważył zadanie?

Wynik. 1214

Rozwiązanie. Niech x będzie stacją, na której Piotrek zauważył zadanie. Odległość od początkowej stacji Piotrka (stacji 1) do stacji x wynosi $x - 1$. Całkowita odległość, którą przebył Piotrek do rozwiązania zadania wynosi $5 \cdot (x - 1)$. Zaczynając od stacji 1 i podróżując $5 \cdot (x - 1)$ Piotrek zakończył podróż na stacji $1 + 5 \cdot (x - 1) = 2022 \pmod{2022}$. Szukamy takiego x , aby

$$\begin{aligned} 1 + 5 \cdot (x - 1) &= 2022 \pmod{2022}, \\ 5 \cdot (x - 1) &= -1 \pmod{2022}, \\ 5x &= 4 \pmod{2022}. \end{aligned}$$

Skoro $4 \equiv 4 + 3 \cdot 2022 = 6070 \pmod{2022}$, to

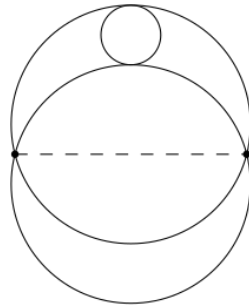
$$5x = 6070 \pmod{2022}.$$

Liczby 5 i 2022 są względnie pierwsze, więc

$$x = 1214 \pmod{2022}.$$

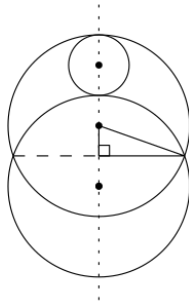
Zatem Piotrek zauważył zadanie na stacji numer 1214.

Zadanie 17. Rysunek przedstawia trzy okręgi: mały okrąg o promieniu 1 jest styczny do dwóch większych o jednakowych rozmiarach. Ponadto środek jednego z nich jest środkiem odcinka łączącego środki pozostałych dwóch okręgów. Wyznacz długość odcinka zaznaczonego przerywaną linią.



Wynik. $4\sqrt{2} \approx 5.656854$

Rozwiązanie. Warunek ze środkami okręgów oznacza, że środki wszystkich trzech okręgów leżą na symetralnej odcinka zaznaczonego linią przerywaną (który jest na rysunku poziomy). Łatwo zauważyć, że ten środek odcinka łączącego dwa pozostałe środki okręgów musi być środkiem górnego dużego okręgu. Odległość między środkami dwóch dużych przystających okręgów jest równa odległości między ich „najwyższymi” punktami, która jest z kolei równa średnicy małego okręgu, czyli 2. Jeśli przez R oznaczmy wspólną długość promienia dużych okręgów, możemy długość drugiej połowy odcinka zapisać jako $R - 1$. Dostajemy $R - 1 = 2$, skąd $R = 3$. Teraz spójrzmy na trójkąt prostokątny o wierzchołkach w: tym środku okręgu, który leży w połowie odcinka między pozostałymi, środku zakreślanego odcinka oraz w jednym z punktów przecięcia dużych okręgów. Z twierdzenia Pitagorasa wyliczamy, że długość zakreślanego odcinka wynosi $2\sqrt{3^2 - 1^2} = 4\sqrt{2}$.



Zadanie 18. 2022 smoków mlekopijów ustawiło się w rzędzie. Pierwszy z nich ma 1 kufel mleka, drugi ma 2 kufle, ..., 2022-gi smok ma 2022 kufle mleka. Pierwszy smok przeleje połowę i jeszcze pół kufła mleka drugiemu, następnie drugi przekaże połowę swojego mleka i dodatkowe pół kufła trzeciemu i tak dalej aż do 2021-szego smoka, który odda połowę swojego mleka i pół kufła 2022-giemu. Ile mleka (mierząc w kufłach) będzie miał 2022-gi smok po tych operacjach?

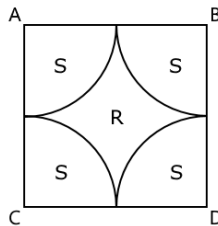
Wynik. 4043

Rozwiązanie. Załóżmy, że przed n -tym przelewem n -ty smok ma $2n - 1$ kufli mleka. Wówczas, po tym przelewie, $(n + 1)$ -szy smok będzie miał $n + 1 + \frac{2n-1}{2} + \frac{1}{2} = 2n + 1 = 2(n + 1) - 1$ kufli. Wobec tego, poprzez indukcję, dla dowolnego $k \geq n$, k -ty smok będzie miał $2k - 1$ kufli po otrzymaniu przelewu. Ponieważ, istotnie, pierwszy smok ma $1 = 2 \cdot 1 - 1$ kufel mleka na początku operacji, po ich zakończeniu ostatni smok w rzędzie będzie miał $2 \cdot 2022 - 1 = 4043$ kufle mleka.

Zadanie 19. Punkt X został wybrany losowo z wnętrza kwadratu $ABCD$ o boku długości 2. Jakie jest prawdopodobieństwo, że każdy z odcinków AX , BX , CX i DX jest dłuższy niż 1?

Wynik. $1 - \frac{\pi}{4} \approx 0.214602$

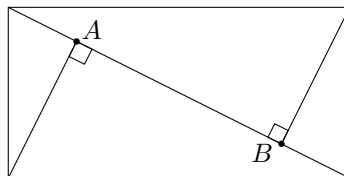
Rozwiązanie. Wszystkie punkty X spełniające żądane nierówności leżą wewnątrz obszaru R zaznaczonego na rysunku poniżej.



Szukane prawdopodobieństwo wynosi (gdzie $[F]$ oznacza pole figury F):

$$\frac{[R]}{[ABCD]} = \frac{[ABCD] - 4[S]}{[ABCD]} = \frac{4 - 4 \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{4}}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Zadanie 20. Stosunek boków poniższego prostokąta wynosi $2 : 1$, a odległość między punktami A i B wynosi 1. Ile wynosi pole prostokąta?



Wynik. $10/9 \approx 1.111111$

Rozwiązanie. Przekątna dzieli prostokąt na 2 trójkąty prostokątne. Niech a będzie wysokością trójkąta opuszczoną z kąta prostego, a $1 + 2b$ długością przeciwprostokątnej. Jak widać na rysunku, wysokość dzieli trójkąt na 2 podobne trójkąty prostokątne o bokach długości a i b oraz $1 + b$ i a . Ponieważ te trójkąty są podobne, a stosunek ich przeciwprostokątnych wynosi $2 : 1$, to $2 \cdot b = a$ i $2 \cdot a = 1 + b$. Stąd $a = \frac{2}{3}$ i $b = \frac{1}{3}$. Pole prostokąta jest iloczynem a i długości przekątnej, a więc wynosi $(1 + 2b) \cdot a = (1 + \frac{2}{3}) \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{9}$.

Zadanie 21. Każdy z pięciu krasnoludków miał na sobie kapelusz innego koloru. Następnie dwa krasnoludki wymienili się swoimi kapeluszami, później znowu dwa krasnoludki wymienili się kapeluszami i stało się to jeszcze raz. Na ile różnych sposobów krasnoludki mogły się wymienić, jeśli wiemy, że na końcu żaden krasnoludek nie miał na głowie własnego kapelusza?

Wynik. 180

Rozwiązanie. Jest $\binom{5}{2} = 10$ możliwości pierwszej zamiany. Mamy teraz dwie opcje: albo następna zamiana jest między krasnoludkami innymi niż ci z pierwszej zamiany (1), albo nie (2). W przypadku (1) są $\binom{3}{2} = 3$ opcje drugiej zamiany i 4 różne możliwości na ostatnią zamianę. W przypadku (2) mamy zaś $2 \cdot 3 = 6$ możliwości na zamianę drugą, a ostatnia będzie już jednoznacznie wyznaczona. Stąd dostajemy łącznie $10 \cdot (3 \cdot 4 + 6) = 180$ różnych sposobów.

Zadanie 22. Marek zapisał wszystkie liczby w systemie rzymskim od $I, II, III, IV, \dots$ do z na tablicy, każdą w nowej linii. Aureliusz zauważył, że następujące podciągi znaków wystąpiły tyle samo razy: IV, IX, XL, XC, CD i CM . Jaka jest najmniejsza wartość $z \geq IV$, dla której jest to możliwe? (Odpowiedź podaj w zapisie dziesiętnym, nie rzymskim.)

Wynik. 999

Rozwiązanie. Podciąg IV występuje na tablicy tyle samo razy co cyfra 4 na ostatniej pozycji w zapisie dziesiętnym liczb od 1 do z . Podobnie IX występuje tyle samo razy, co 9 na ostatniej pozycji. Z kolei liczba wystąpień XL jest równa liczbie wystąpień cyfry 4, a XC jest równa liczbie wystąpień cyfry 9 na pozycji drugiej od końca i analogicznie CD występuje tyle samo razy co 4, a CM tyle samo razy co 9 na pozycji trzeciej od końca. Zauważmy, że w zapisie liczb od 01 do 99 cyfra 4 występuje tyle samo razy na pierwszej i ostatniej pozycji, ponieważ są to wszystkie możliwe kombinacje cyfr od 0 do 9 na obu pozycjach. Zatem od 1 do 999 otrzymujemy wszystkie możliwe kombinacje cyfr od 0 do 9 na każdej z trzech pozycji, więc także taką samą liczbę wystąpień 4 i 9. Aby pokazać, że 999 jest najmniejszą możliwą wartością z wystarczy porównać wystąpienia 9 na pierwszej i ostatniej pozycji. Liczba 9 na ostatniej pozycji wzrasta o jeden co każde 10 liczb, natomiast liczba 9 na pierwszej pozycji jest równa 0 do liczby 900, a następnie wzrasta o jeden z każdą dopisaną na tablicy liczbą. Zatem dla $z = 999$ wystąpień na obu pozycjach jest tyle samo i jest to najmniejsza możliwa wartość większa lub równa 9. Analogiczne rozumowanie dla 4 kończy dowód.

Zadanie 23. Spośród pięćdziesięciu uczniów niektórzy grają w hokeja na lodzie, a niektórzy w hokeja na trawie (każdy uczeń może uprawiać oba sporty, jeden z nich lub nie uprawiać żadnego). Liczba tych uczniów, którzy nie grają w żadną z tych gier, jest dwa razy większa niż tych, którzy grają w hokeja na trawie. Co więcej, uczniów grających tylko w hokeja na lodzie jest o piętnaście więcej niż tych, którzy uprawiają oba sporty. Znajdź wszystkie możliwe wartości liczby uczniów niegrających w hokeja na lodzie i podaj ich iloczyn.

Wynik. 14725

Rozwiązanie. Oznaczamy kolejno przez: i – liczbę uczniów grających tylko w hokeja na lodzie, f – liczbę uczniów grających tylko w hokeja na trawie, b – liczbę uczniów uprawiających oba sporty, n – liczbę uczniów, którzy nie uprawiają żadnego ze sportów. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{aligned}i + f + b + n &= 50, \\n &= 2 \cdot (f + b), \\i &= b + 15\end{aligned}$$

z parametrem i . Otrzymujemy $f = \frac{1}{3}(95 - 4i)$, $n = \frac{2}{3}(50 - i)$, $b = i - 15$. Wszystkie otrzymane liczby muszą być nieujemnymi liczbami całkowitymi, a więc i może być równe 17, 20 lub 23. Wtedy nasza poszukiwana wartość $f + n$ to odpowiednio: $9 + 22 = 31$, $5 + 20 = 25$, $1 + 18 = 19$. Iloczyn tych liczb wynosi 14725.

Zadanie 24. Punkty A, B, C, D leżą na okręgu o środku w punkcie M i promieniu 1, przy czym odcinki AB i CD są prostopadłe. Okrąg o średnicy AB jest styczny do okręgu o średnicy CD w dokładnie jednym punkcie P , a przy tym okręgi te są tej samej wielkości. Wyznacz długość odcinka MP .

Wynik. $1/\sqrt{3} \approx 0.577350$

Rozwiązanie. Ustalmy tak układ współrzędnych na płaszczyźnie, aby M był jego środkiem, odcinek AB był równoległy do osi y , a odcinek CD był równoległy do osi x . Wówczas z powodu symetrii okręgu dla pewnych $x, y \in \mathbb{R}$ (bez straty ogólności $x, y > 0$) zachodzi

$$A = (x, -y), \quad B = (x, y), \quad C = (y, x), \quad D = (-y, x).$$

Skoro promień okręgu opisanego na punktach A, B, C, D wynosi 1, to

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Niech M_{AB} jest środkiem okręgu o średnicy AB , a M_{CD} jest środkiem okręgu o średnicy CD . Wówczas $M_{AB} = (x, 0)$ i $M_{CD} = (0, x)$. Z powodu styczności okręgów punkt P jest środkiem odcinka $M_{AB}M_{CD}$, a przy tym promienie

tych okręgów wynoszą y . Stąd $M_{AB}M_{CD} = 2y$. Trójkąt $MM_{AB}M_{CD}$ jest prostokątny, a zatem na mocy twierdzenia Pitagorasa

$$x^2 + x^2 = (2y)^2,$$

co wraz z $x^2 + y^2 = 1$ daje $y = 1/\sqrt{3}$. Jako że P jest środkiem przeciwprostokątnej, to $MP = \frac{1}{2}M_{AB}M_{CD} = y = 1/\sqrt{3}$.

Zadanie 25. Niech $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ będzie takim ciągiem liczb rzeczywistych, że

$$a_{n+1}^2 + a_n^2 = a_{n+1} + a_n + 24$$

zachodzi dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Znajdź największą możliwą wartość wyrażenia $a_1 + a_{2022}$.

Wynik. 8

Rozwiązanie. Zauważmy, że $a_{x+2}^2 - a_{x+2} = a_x^2 - a_x$, więc dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi

$$a_{x+2n}^2 - a_{x+2n} = a_x^2 - a_x.$$

To oznacza, że

$$a_{2+2 \cdot 1010}^2 - a_{2+2 \cdot 1010} = a_2^2 - a_2.$$

Skoro

$$a_2^2 - a_2 + a_1^2 - a_1 = 24,$$

to

$$a_{2022}^2 - a_{2022} + a_1^2 - a_1 = 24.$$

Niech $a = a_{2022} + a_1$. Z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną $a = a_1 + a_{2022} \geq 2 \cdot \sqrt{a_1 \cdot a_{2022}}$, więc $a^2 = a_{2022}^2 + a_1^2 + 2 \cdot a_1 \cdot a_{2022}$, i stąd $a_{2022}^2 + a_1^2 \geq \frac{a^2}{2}$. Zatem

$$24 \geq \frac{a^2}{2} - a.$$

Więc $a \leq 8$. Taki ciąg istnieje, gdyż ciąg stały $a_n = 4$ dla każdej liczby całkowitej dodatniej n spełnia warunki zadania.

Zadanie 26. Ponad 39%, ale mniej niż 40% członków klubu szachowego to chłopcy. Gdyby jedna z dziewczyn zdecydowała się opuścić klub, odsetek chłopców nadal byłby poniżej 40%, ale jeśli zamiast tego do klubu dołączyłby nowy chłopak, odsetek ten wynosiłby nie mniej niż 40%. Jaka jest najmniejsza możliwa liczba obecnych członków klubu?

Wynik. 64

Rozwiązanie. Niech n będzie liczbą wszystkich członków klubu, a liczbą chłopców w klubie. Mamy następujące nierówności:

$$\begin{aligned} \frac{a}{n} &> 0.39 \\ \frac{a}{n-1} &< 0.4 \\ \frac{a+1}{n+1} &\geq 0.4 \end{aligned}$$

Po przekształceniu drugiej i trzeciej nierówności i pomnożeniu przez 5 otrzymujemy:

$$2n - 2 > 5a \geq 2n - 3$$

Ponieważ $5a$ jest liczbą całkowitą, a $2n - 2$, $2n - 3$ są kolejnymi liczbami całkowitymi, to $5a = 2n - 3$. Po wstawieniu tego do pierwszej nierówności i rozwiązaniu względem n otrzymujemy, że $n > 60$. Chcemy, żeby $a = \frac{1}{5}(2n - 3)$ była liczbą całkowitą. Najmniejszą możliwą wartością n jest więc 64.

Zadanie 27. Natalia znalazła trzy funkcje kwadratowe f_1 , f_2 , f_3 o następujących własnościach: f_1 i f_2 mają wspólny pierwiastek, f_2 i f_3 mają wspólny pierwiastek, f_3 i f_1 mają wspólny pierwiastek, ale nie istnieje wspólny pierwiastek wszystkich trzech funkcji. Ponadto Natalia odkryła, że funkcje są następującej postaci:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2 - bx + 1980, \\ f_2(x) &= x^2 - (b+1)x + 2024, \\ f_3(x) &= x^2 - (b+2)x + a, \end{aligned}$$

gdzie a i b są pewnymi liczbami rzeczywistymi. Wyznacz a .

Wynik. 2070

Rozwiązanie. Oznaczmy pierwiastki przez k_1, k_2, k_3 . Wówczas funkcje są, w pewnej kolejności, następujących postaci:

$$\begin{aligned}(x - k_1)(x - k_2) &= x^2 - (k_1 + k_2)x + k_1 \cdot k_2, \\(x - k_1)(x - k_3) &= x^2 - (k_1 + k_3)x + k_1 \cdot k_3, \\(x - k_3)(x - k_2) &= x^2 - (k_3 + k_2)x + k_3 \cdot k_2.\end{aligned}$$

Bez straty ogólności niech $b = k_1 + k_2$ i $b + 1 = k_1 + k_3$, wtedy $b + 2 = k_2 + k_3$. Rozwiązując ten układ równań, otrzymujemy $k_1 = \frac{b-1}{2}$, $k_2 = \frac{b+1}{2}$ i $k_3 = \frac{b+3}{2}$. Ponieważ $1980 = k_1 \cdot k_2 = \frac{(b-1)(b+1)}{4}$, to $b = \pm 89$. Równość $2024 = k_1 \cdot k_3 = \frac{(b-1)(b+3)}{4}$ spełnia wyłącznie $b = 89$, a więc $k_1 = 44$, $k_2 = 45$, $k_3 = 46$ i stąd $a = 45 \cdot 46 = 2070$.

Zadanie 28. W turnieju siatkówki bierze udział sześciu uczestników: Ala, Bolek, Czarek, Dawid, Ewa i Franek. W każdym meczu grają po dwie dwuosobowe drużyny. Każda możliwa para gra przeciwko każdej innej możliwej parze dokładnie raz. Ala wygrała 30 meczów, Dawid 12, a Franek 18. Ile meczów wygrał Bolek?

Wynik. 10

Rozwiązanie. Każdy z graczy rozegrał w sumie 30 meczów, ponieważ dla każdego z 5 możliwych partnerów mamy $\binom{4}{2} = 6$ par przeciwników ($5 \cdot 6 = 30$). W takim razie Ala wygrała wszystkie swoje mecze. Każdych dwóch graczy rozegrało razem 6 meczów i rywalizowało ze sobą w 12 (4 możliwych partnerów dla pierwszego gracza, 3 dla drugiego). Skoro Franek wygrał 18 razy i zmierzył się z Alą 12 razy, to musiał wygrać wszystkie mecze, w których nie grał przeciwko Ali. Dawid wygrał 12 meczów, 6 grając z Alą i 3 z Frankiem (Dawid i Franek grali przeciwko Ali 3 razy i za każdym razem przegrali). Pozostałe 3 zwycięstwa odniósł w meczach, w których Ala i Franek nie brali udziału. Mamy dokładnie 3 takie możliwości, Dawid gra w parze z jednym z graczy przeciwko dwóm pozostałym. Z powyższych informacji wynika, że Bolek, Czarek i Ewa wygrali tyle samo meczy: 6 z Alą, 3 z Frankiem i 1 z Dawidem. Bolek wygrał zatem $6 + 3 + 1 = 10$ meczów.

Zadanie 29. Rozważmy trójkąt prostokątny o bokach długości 3, 4, 5. Trójkąt ten można rozciąć wzdłuż wysokości na dwa trójkąty podobne. Powtarzamy powyższy proces za każdym razem podwajając liczbę trójkątów. Oblicz średni obwód trójkątów uzyskanych po pięciu krokach.

Wynik. $\frac{50421}{25000} = 2.01684$

Rozwiązanie. Obliczmy najpierw sumę obwodów. Każdy podział trójkąta T powoduje powstanie dwóch trójkątów T_1 i T_2 podobnych do T w skali odpowiednio $\frac{3}{5}$ i $\frac{4}{5}$. Zatem suma obwodów T_1 i T_2 będzie $\frac{7}{5}$ raza większa niż obwód T . W takim razie rozcięcie wszystkich posiadanych w danym momencie trójkątów powoduje zwiększenie sumy obwodów $\frac{7}{5}$ raza. Suma obwodów po pięciu krokach będzie więc równa $(3 + 4 + 5) \left(\frac{7}{5}\right)^5$, a ponieważ trójkątów będzie 2^5 , to średni obwód wyniesie

$$12 \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^5 \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{50421}{25000}.$$

Zadanie 30. Marcin postanowił wspiąć się na ściankę z 10 uchwytami ponumerowanymi $1, \dots, 10$ od najniższego do najwyższego. Planuje on użyć tylko jednej ręki oraz jednej nogi. Zaczyna z ręką na uchwycie 3 i stopą na uchwycie 1. W jednym kroku może ruszyć rękę lub stopę do góry o kilka uchwytów, ale w każdym momencie jego ręka musi być na wyższym uchwycie niż stopa oraz różnica między numerami uchwytu trzymanego ręką oraz uchwytu, na którym trzyma stopę, musi wynosić co najmniej 1 i co najwyżej 3. Wspinaczkę uznajemy za skończoną gdy Marcin chwyci uchwyt numer 10. Na ile różnych sposobów Marcin może wspiąć się na ścianę?

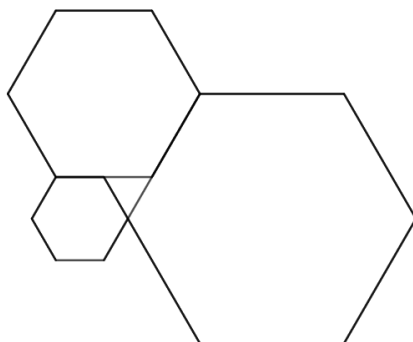
Wynik. 1458

Rozwiązanie. Możemy przedstawić osiągalne pary (położenie stopy, położenie ręki) razem z liczbą różnych sposobów prowadzących do nich od pozycji startowej $(1, 3)$ za pomocą tabeli jak poniżej.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	1	1							
4	1	2	3						
5		3	6	9					
6			9	18	27				
7				27	54	81			
8					81	162	243		
9						243	486	729	
10							729	729	0

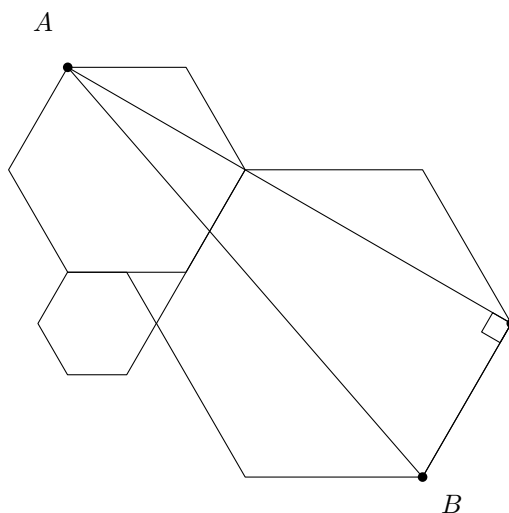
Numer wiersza odpowiada położeniu ręki, numer kolumny zaś położeniu stopy. Początkowo mamy tylko początkową pozycję (1, 3) z jednym sposobem dojścia do niej. Liczba w nowej komórce tabeli jest sumą wszystkich liczb powyżej i wszystkich liczb na lewo od niej. Przykładowo, możemy na trzy sposoby dojść do pozycji (3, 4): Albo z (2, 4) (która sama jest osiągalna z (2, 3) lub (1, 4)), lub bezpośrednio z (1, 4). Używając tej reguły możemy wypełnić tabelę aż do ostatniego wiersza gdzie sytuacja trochę się zmienia, ponieważ Marcin kończy natychmiast po chwyceniu 10-ego uchwytu. W szczególności, jedynym poprzednikiem (8, 10) jest (8, 9), zaś (9, 10) nie da osiągnąć się wcale. Wynik jest sumą liczb w ostatnim rzędzie: $729 + 729 = 1458$.

Zadanie 31. Rysunek przedstawia trzy sześciokąty foremne. Najmniejszy z nich ma bok długości 1. Ile wynosi pole najmniejszego koła, które zawiera wszystkie trzy sześciokąty?



Wynik. $21\pi \approx 65.973446$

Rozwiązanie. Trójkąt równoboczny pośrodku ma bok długości 1. Zatem dwa pozostałe sześciokąty muszą mieć boki o długościach odpowiednio 2 i 3. Średnica szukanego koła musi być nie mniejsza niż najdłuższy odcinek łączący dwa punkty narysowanej figury. Łatwo zauważyć, że najdłuższy taki odcinek to ten łączący punkty A i B na poniższym rysunku. Krótsza przyprostokątna narysowanego trójkąta ma długość 3, a dłuższa ma długość $\sqrt{3} \cdot (2 + 3) = 5\sqrt{3}$. Z twierdzenia Pitagorasa dostajemy $|AB|^2 = 3^2 + (5\sqrt{3})^2 = 9 + 25 \cdot 3 = 84$. Zatem pole koła wynosi $\frac{|AB|^2}{4} \pi = \frac{84}{4} \pi = 21\pi$. Z twierdzenia Talesa możemy łatwo wywnioskować, że koło to faktycznie zawiera wszystkie trzy sześciokąty.



Zadanie 32. Łukasz i Łucja grają w grę planszową na planszy 42×42 . Rozgrywka przebiega następująco: najpierw Łukasz umieszcza na planszy $x \geq 8$ skoczków szachowych (na każdym polu co najwyżej jeden skoczek). Potem Łucja wybiera osiem skoczków, a pozostałe są usuwane z planszy. Łucja wygrywa, jeżeli żadne dwa skoczki nie atakują się nawzajem na końcu gry. Ustal najmniejszą liczbę x , dla której Łucja może zapewnić sobie zwycięstwo niezależnie od tego, jak Łukasz rozmieści skoczki.

Wynik. 15

Rozwiązanie. Rozważamy standardowe czarno-białe kolorowanie pól szachownicy i zauważamy, że każdy skoczek atakuje tylko pola przeciwnego koloru do tego, na którym stoi. Tymczasem dla $x = 2 \cdot 7 + 1 = 15$ zawsze można znaleźć przynajmniej osiem skoczków na polach tej samej barwy. Łucja może wybrać te osiem skoczków i żaden z nich nie będzie atakował żadnego innego, więc dla $x = 15$ Łucja zawsze może zapewnić sobie zwycięstwo.

Pokażemy, że Łucja nie może wygrać jeżeli $x \leq 14$. W tym celu oznaczmy poprzez (r, c) pole w r -tym rzędzie i c -tej kolumnie. Weźmy pod uwagę następujące siedem par pól:

$$\begin{aligned} P_1 &: (1, 1), (3, 2), \\ P_2 &: (1, 2), (3, 3), \\ P_3 &: (1, 3), (3, 4), \\ P_4 &: (1, 4), (3, 5), \\ P_5 &: (1, 5), (3, 6), \\ P_6 &: (1, 6), (3, 7), \\ P_7 &: (1, 7), (3, 8), \end{aligned}$$

Łukasz umieszcza $x \leq 14$ skoczków na dowolnych spośród tych 14 pól. Wówczas, gdy Łucja wybierze osiem z nich, z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że pewne dwa wybrane skoczki należą do tej samej pary. Pozostaje zauważyć, że pary zostały tak dobrane, aby skoczki w każdej z nich atakowały się nawzajem.

Stąd najmniejszą liczbą x , dla której Łucja zawsze może zapewnić sobie zwycięstwo, jest 15.

Zadanie 33. Rzeka ma szerokość jednej mili. Paweł potrzebuje 27 minut, aby przepłynąć swoją łodzią wiosłową milę w dół rzeki, a 36 minut, aby przepłynąć milę w poprzek rzeki, do punktu położonego na drugim brzegu dokładnie naprzeciw miejsca startu. Ile czasu będzie potrzebował, aby pokonać milę w górę rzeki? Podaj odpowiedź w minutach.

Wynik. 48

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że chłopiec może przewiosłować x mil na minutę samodzielnie (na wodzie stojącej), podczas gdy prędkość nurtu to y mil na minutę. Wobec tego czas potrzebny na pokonanie mili w dół rzeki może być zapisany jako $\frac{1}{x+y}$ minut. Teraz musimy policzyć czas potrzebny, aby pokonać milę do punktu położonego na przeciwnym brzegu, dokładnie naprzeciw miejsca startu. Aby dostać się tam możliwie najszybciej, chłopiec będzie musiał celować z mil w górę rzeki tak, aby podczas jego podróży nurt zniósł go z mil w dół rzeki. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że długość jego własnej podróży to $\sqrt{1+z^2}$; ponieważ musi ona trwać tak samo długo, jak bycie zniesionym z mil przez nurt, otrzymujemy proporcję $\sqrt{1+z^2} : z = x : y$, czyli $y^2(1+z^2) = x^2z^2$, $y^2 = z^2(x^2 - y^2)$ i wreszcie $z^2 = \frac{y^2}{x^2 - y^2}$. Oznacza to, że dystans pokonywany przez Pawła (jak na wodzie stojącej) wynosi $\sqrt{1+z^2} = \sqrt{\frac{(x^2 - y^2) + y^2}{x^2 - y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}$. Potrzebny do tego czas to $\frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$ minut. Tymczasem prędkość poruszania się w górę rzeki to $x - y$ mil na minutę, zatem czas (w minutach) potrzebny do pokonania mili w ten sposób to $\frac{1}{x-y}$, przy czym oczywiście zachodzi $(\frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}})^2 : \frac{1}{x+y} = \frac{x+y}{x^2 - y^2} = \frac{1}{x-y}$. Ponieważ wiemy już, że $\frac{1}{x+y} = 27$ oraz $\frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 36$, z tą chwilą udało nam się ustalić, iż $\frac{1}{x-y} = 36^2 : 27 = 48$.

Zadanie 34. Bliźniacy Szymciej i Wolnicz trenują na owalnej bieżni. Zaczynają w tym samym punkcie, wyraźnie oznaczonym jako start, i biegną dookoła bieżni w tym samym kierunku, każdy we własnym, stałym tempie. Trening zakończy się, kiedy tylko początkujący biegacz Wolnicz przebiegnie jedno okrążenie, wracając do punktu startowego. Szymciej jest utalentowanym lekkoatletą i biega sześć razy szybciej od Wolnicza.

Bliźniacy wyglądają identycznie. Jednak gdybyśmy spojrzeli na migawkę z treningu, która jest po prostu zdjęciem stadionu, na ogół możliwe jest rozróżnienie, który z braci jest którym (używając tylko informacji podanych powyżej oraz tego jednego zdjęcia). Jak wiele razy podczas treningu możemy wykonać migawkę, na której nie potrafimy rozróżnić braci? (Nie wliczamy samego początku i końca ich treningu.)

Wynik. 34

Rozwiązanie. Niech $w \in (0, 1)$ oznacza pozycję Wolnicza na bieżni (tak więc nie wliczamy startu ani mety). Pozycja Szymcieja może być wtedy policzona jako $6w \pmod{1}$, gdzie $x \pmod{1} = x - [x]$ to część ułamkowa x . Bracia są nierozróżnialni wtedy i tylko wtedy gdy $w = (6(6w \pmod{1})) \pmod{1}$. Zauważmy, że wewnętrzne $\pmod{1}$ nie ma wpływu na wynik, tak więc możemy je pominąć. Stąd nasze równanie przybiera postać $w \pmod{1} = 36w \pmod{1}$, a zatem $35w$ jest liczbą całkowitą. Stąd $w = \frac{a}{35}$ gdzie a może być równe $1, 2, \dots, 34$ (pamiętajmy, że $0 < w < 1$ podczas treningu) i ostatecznie liczba momentów gdy nie możemy rozróżnić braci wynosi 34.

Zadanie 35. Dokument zawierający tylko tekst był początkowo złożony tak, by na każdej stronie było 60 wierszy. Kiedy zmniejszono tę liczbę do 57 wierszy na stronę, liczba stron zwiększyła się o dwie. Znajdź najmniejszą i największą liczbę stron jakie mógł mieć początkowo dokument, i podaj ich sumę.

Wynik. 77

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że początkowo dokument miał $k + 1$ stron. Na pewno k z nich musiało być w pełni zapisanych, stąd łączna liczba wierszy wynosi $60k + a$, gdzie $1 \leq a \leq 60$. Po zmianie, na pewno będziemy mieli $k + 2$ w pełni zapisanych stron, stąd liczba wierszy wynosi $57(k + 2) + b$, gdzie $1 \leq b \leq 57$. Przekształcając równanie

$$60k + a = 57(k + 2) + b,$$

otrzymujemy

$$3k = b - a + 2 \cdot 57.$$

Używając ograniczeń na a i b , dostajemy

$$55 \leq 3k \leq 170,$$

a skoro k jest liczbą całkowitą, to

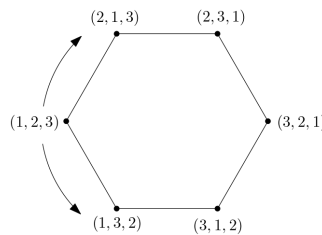
$$19 \leq k \leq 56.$$

Pozostaje pamiętać, że liczba stron jest równa $k + 1$, tak więc odpowiedzią jest $20 + 57 = 77$.

Zadanie 36. Pewna dziedzina muzyki nazywana *zmiennym wybijaniem* zajmuje się tworzeniem, przy użyciu dzwonów, *piosenek*, które są ciągami *taktów*. W jednym takcie, dzwony wybijają w pewnej kolejności, każdy dokładnie raz. Załóżmy, że dane są trzy dzwony ponumerowane liczbami 1, 2, 3. Ze względów technicznych, pozycje dowolnego z dzwonów w sąsiednich taktach mogą różnić się o co najwyżej 1. Piosenkę nazywamy *nudną*, jeżeli pewne dwa jej sąsiednie takty są identyczne. Ile istnieje nienudnych piosenek składających się z 21 taktów, z których zarówno pierwszy, jak i ostatni to (1, 2, 3)?

Wynik. 349526

Rozwiązanie. Możemy przedstawić piosenki jako ścieżki przechodzące po brzegu poniższego sześciokąta, którego wierzchołki odpowiadają wszystkim możliwym taktom.



Liczba nienudnych piosenek jest wtedy liczbą różnych ścieżek na brzegu tego sześciokąta, które zaczynają i kończą się w (1, 2, 3) i mają długość $21 - 1 = 20$. Zauważmy, że każda taka ścieżka może przejść dookoła sześciokąta maksymalnie 3 razy (w dowolną stronę). Oznacza to, że liczba ruchów zgodnych z ruchem wskazówek zegara należy do zbioru $\{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19\}$. Liczbę możliwych ścieżek możemy więc obliczyć jako

$$\binom{20}{1} + \binom{20}{4} + \binom{20}{7} + \binom{20}{10} + \binom{20}{13} + \binom{20}{16} + \binom{20}{19} = 20 + 4845 + 77520 + 184756 + 77520 + 4845 + 20 = 349526.$$

Zadanie 37. Karolina miała pięć wielokątów foremnych $P_0, P_1, \dots, P_4$, wszystkie o boku długości 1. Wzięła wielokąt P_0 , który jest kwadratem $A_1A_2A_3A_4$, i narysowała go na płaszczyźnie. Następnie narysowała pozostałe wielokąty na tej samej płaszczyźnie w taki sposób, że:

- Jeden bok wielokąta P_i pokrywa się z bokiem A_iA_{i+1} (i jest to jedyny wspólny bok dla P_i oraz P_0) dla każdego $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ (przyjmujemy, że $A_5 = A_1$);
- P_i ma jeden bok wspólny z P_{i+1} dla każdego $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ (przyjmując, że $P_5 = P_1$).

Na końcu Karolina zmierzyła obwód obszaru pokrytego przez wszystkie wielokąty łącznie. Rozważ wszystkie wartości jakie mogła otrzymać przy tych (i tylko tych) warunkach, i podaj ich średnią arytmetyczną.

Wynik. 25

Rozwiązanie. Najpierw zauważmy, że wielokąt może dzielić z innym wielokątem tylko bok sąsiadujący z bokiem, który jest dzielony z kwadratem P_0 .

Wiemy, że kąty wewnętrzne n -kąta foremnego mają miarę $180(1 - \frac{2}{n})$ stopni. Tak więc jeśli na rogu kwadratu spotykają się m -kąt i n -kąt foremny, musimy mieć

$$360 = 90 + 180(1 - \frac{2}{n}) + 180(1 - \frac{2}{m}).$$

Dla danego n , możemy z tego równania wyznaczyć m , i z symetrii równania drugi z wielokątów dzielący bok z m -kątem także musi być n -kątem foremnym. Tak więc wartości m i n w pełni wystarczają nam do określenia kształtu.

Upraszczając równanie dostajemy

$$1 = \frac{4}{n} + \frac{4}{m}.$$

Jeśli $m = n$, dostajemy $n = m = 8$ – pierwsze rozwiązanie. Jeśli $n \neq m$, któraś z wartości, bez straty ogólności n , musi być mniejsza od 8. Stąd dostajemy możliwości:

$$\begin{aligned} n = 3 &\rightarrow m = -12 \\ n = 4 &\rightarrow \text{niemożliwe} \\ n = 5 &\rightarrow m = 20 \\ n = 6 &\rightarrow m = 12 \\ n = 7 &\rightarrow m \text{ nie jest całkowite} \end{aligned}$$

To daje pozostałe trzy rozwiązania. Wariant z $n = 3$, $m = -12$ odpowiada możliwej sytuacji, w której 12-kąt rysujemy w inną stronę niż zakładaliśmy domyślnie. Obwód każdego z kształtów możemy policzyć poprzez

$$p = 2 \cdot (|n| - 3) + 2 \cdot (|m| - 3),$$

co daje możliwości 18, 38, 24 i 20. Ich średnia arytmetyczna wynosi

$$\frac{18 + 38 + 24 + 20}{4} = \frac{100}{4} = 25.$$

Zadanie 38. Niech $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie taką różnowartościową funkcją, że dla każdego $x > 0$ zachodzi $f(x) > -\frac{4}{x}$ i $f(f(x) + \frac{4}{x}) = 3$. Wyznacz $f(16)$.

Uwaga: Dla funkcji różnowartościowej z faktu $f(x) = f(y)$ wynika, że $x = y$.

Wynik. $\frac{15}{4} = 3.75$

Rozwiązanie. Istnieje taka dodatnia liczba rzeczywista a , że $f(a) = 3$. Ustalmy $x = a$. Dostajemy, że $f(f(a) + \frac{4}{a}) = f(3 + \frac{4}{a}) = 3$. Ponieważ f jest funkcją różnowartościową, to musi zachodzić

$$a = 3 + \frac{4}{a},$$

skąd otrzymujemy, że $a = 4$. To oznacza, że

$$f(x) + \frac{4}{x} = 4,$$

czyli

$$f(x) = 4 - \frac{4}{x}.$$

Zatem $f(16) = \frac{15}{4}$.

Zadanie 39. Podczas wędrowki górskiej Terenia znalazła źródło. Miała dwie butelki: jedną o objętości 2022 ml, a drugą o objętości 51 ml. Może przełąć wodę z jednej butelki do drugiej, napełnić dowolną butelkę do pełna wodą ze źródła, lub wylać wodę z dowolnej butelki. Stosując te operacje Terenia chce doprowadzić do sytuacji, w której:

- wie jaka jest objętość V wody w jednej z butelek,
- V jest najmniejszą niezerową objętością możliwą do uzyskania.

Jaka jest najmniejsza możliwa liczba przelewań pomiędzy butelkami wystarczająca do osiągnięcia powyższych celów?

Wynik. 121

Rozwiązanie. Ponieważ $\text{NWD}(2022, 51) = 3$, najmniejsza możliwa objętość to 3. Potrzebujemy znaleźć konstrukcję, która jest minimalna pod względem liczby przelewań. Zauważmy, że nie może się zdarzyć, aby obie butelki w tym samym czasie nie były ani pełne, ani puste (wówczas bowiem objętość wody w żadnej z nich nie byłaby już dokładnie znana). Jeżeli więc w dowolnej niepustej butelce mamy $51 \neq x \neq 2022$ ml wody, opróżnienie lub napełnienie jej cofnęłoby nas do sytuacji początkowej. Dlatego też są tylko dwa sposoby, jakimi można przeprowadzić proces: stale napełniać mniejszą butelkę i przelewać wodę do większej albo napełnić większą butelkę, aby stopniowo odlewać wodę do mniejszej (i ją opróżniać). Ze względu na symetrię tych metod możemy rozważyć tylko pierwszą z nich: napełniamy małą butelkę, wlewamy jej zawartość do dużej, powtarzamy działanie do momentu, gdy w małej pozostanie część wody. Otrzymujemy $2022 = 39 \cdot 51 + 33$, przy czym zostaje 18 ml wody w małej butelce. Teraz należy opróżnić dużą, a zawartość małej przełąć do dużej. Powtarzanie tych czynności daje nam następujące rozmiary pozostałości: 18, 36, 3 ml. Dokonaliśmy 41 przelewań, aby uzyskać 18 ml w dużej butelce; następne 41 przelewań, aby uzyskać 36 ml w dużej butelce; wreszcie 39 przelewań, aby uzyskać 3 ml w małej butelce. Stąd w sumie 121 przelewań.

Zadanie 40. Niech a i b będą taki dodatnimi liczbami całkowitymi, że $a + b$ dzieli $51 \cdot \text{NWW}(a, b)$. Jak wiele różnych wartości może przyjmować wyrażenie

$$\frac{51 \cdot \text{NWW}(a, b)}{a + b}?$$

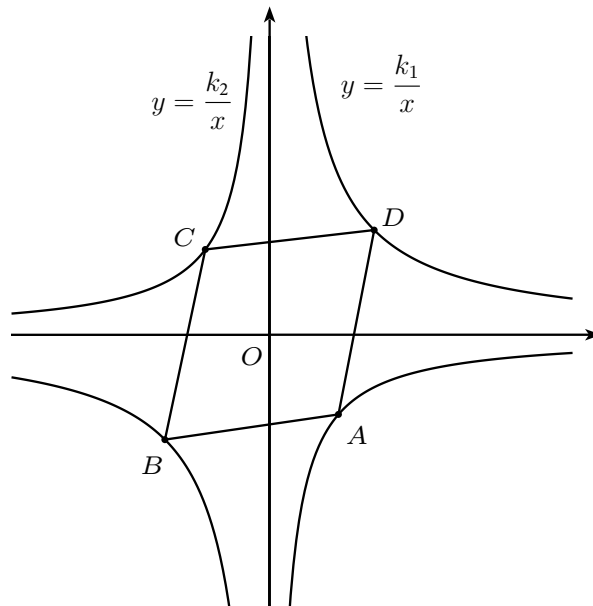
Uwaga: Przez $\text{NWW}(a, b)$ rozumiemy najmniejszą wspólną wielokrotność liczb a i b .

Wynik. 25

Rozwiązanie. Zdefiniujmy $\text{NWD}(a, b) = D$. Zapisując $a = Dx$, $b = Dy$, gdzie $\text{NWD}(x, y) = 1$ dostajemy, że $x + y$ dzieli $51xy$. Ponieważ $\text{NWD}(x + y, xy) = 1$, dostajemy, że $x + y$ dzieli $51 = 3 \cdot 17$. Stąd $x + y$ może być równe 3, 17 lub 51. Niech $k \in \{3, 17, 51\}$. Rozważając $x + y = k$ i $\text{NWD}(x, y) = 1$, dostaniemy $\text{NWD}(x, k) = \text{NWD}(y, k) = 1$. Tak więc istnieje $\frac{1}{2}\phi(k)$ wyboru pary x, y (nieuporządkowanej) przy danym k ; każda z nich da inną wartość $\frac{51xy}{x+y}$ (gdyż suma i iloczyn jednoznacznie wyznaczają parę liczb). Pozostaje pokazać, że różne wybory k dają różne wartości $\frac{51xy}{x+y}$ – jednak tylko dla $k = 51$ ta liczba będzie względnie pierwsza z 51, w pozostałych dwóch przypadkach dla $k = 17$ nie będzie ona podzielna przez 17, a dla $k = 3$ nie będzie podzielna przez 3. Stąd odpowiedź to

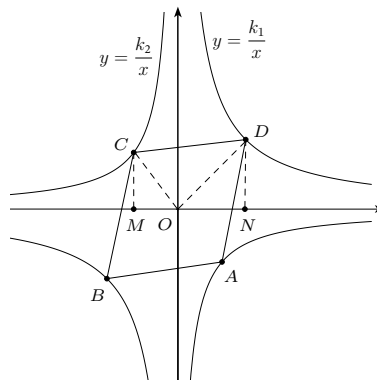
$$\frac{\phi(3) + \phi(17) + \phi(51)}{2} = \frac{51 - 1}{2} = 25.$$

Zadanie 41. Na poniższym obrazku, romb $ABCD$ jest utworzony przez punkty A, B, C, D położone na krzywych $y = \frac{k_1}{x}$, $y = \frac{k_2}{x}$. Jeśli $|\angle BCD| = 120^\circ$, wyznacz $|\frac{k_1}{k_2}|$.



Wynik. 3

Rozwiązanie. Z własności rombu oraz symetrii dostajemy, że OC jest prostopadłe do OD . Zrzutujemy punkty C, D na oś x , otrzymując odpowiednio M, N .



Pole trójkąta OCM to $\frac{|CM| \cdot |OM|}{2} = |\frac{k_2}{2}|$, i podobnie pole trójkąta ODN to $|\frac{k_1}{2}|$. Ponieważ $\angle COM + \angle DON = 90^\circ$, to trójkąty COM i NOD są podobne, skąd iloraz ich pól musi być także równy $(\frac{|OC|}{|OD|})^2$, więc ułamek ten jest równy $|\frac{k_2}{k_1}|$. Stąd rozwiązanie dostajemy poprzez obliczenie

$$\tan 60^\circ = \frac{|DO|}{|CO|} = \sqrt{3},$$

i podnosząc obie strony do kwadratu mamy

$$\left(\frac{|OC|}{|OD|}\right)^2 = \left|\frac{k_1}{k_2}\right| = 3.$$

Uwaga. Aby udowodnić, że $OC \perp OD$, możemy też postąpić następująco: niech $y = rx + s$ będzie równaniem prostej BD , zaś $y = tx + u$ prostej AC . Dostajemy, że x_D, x_B są pierwiastkami równania $rx^2 + sx - k_1 = 0$, tak więc ich suma jest równa $-\frac{s}{r}$. Analogicznie $x_A + x_C = -\frac{u}{t}$. Ponieważ $ABCD$ jest rombem, to $x_A + x_C = x_B + x_D$, więc $\frac{u}{t} = \frac{s}{r}$. To pokazuje, że AC przecina BD w punkcie $(-\frac{s}{r}, 0)$ leżącym na osi x . Analogicznie jednak punkt ten musi leżeć na osi y , stąd O jest środkiem naszego rombu. Możliwe jest kontynuowanie tego algebraicznego rozumowania, i wyliczenie za jego pomocą $\frac{k_1}{k_2}$.

Zadanie 42. W torbie znajdują się 2022 szklane kulki w sześciu różnych kolorach. Wybierając dowolne 2000 z nich mamy pewność, że wśród nich znajdzie się przynajmniej pięć różnych kolorów. Jaka jest minimalna liczba N , dla której dysponując jedynie informacją z poprzedniego zdania będziemy pewni, że wśród dowolnych N kulek będą przynajmniej cztery różne kolory.

Wynik. 1988

Rozwiązanie. Oznaczmy następująco liczby kulek w danym kolorze (w porządku rosnącym): $A \leq B \leq C \leq D \leq E \leq F$, $A + B + C + D + E + F = 2022$. Z podanego w zadaniu warunku wynika, że $C + D + E + F < 2000$, więc $A + B \geq 23$. Ponieważ $C \geq B \geq \frac{A+B}{2} \geq \frac{23}{2}$, to wiemy, że $C \geq 12$, a w konsekwencji $N = 2022 - (23 + 12) + 1 = 1988$ jest wystarczające. Z drugiej strony przykład $(A, B, C, D, E, F) = (11, 12, 12, 662, 662, 663)$, spełnia warunek, ale pokazuje, że $663 + 662 + 662 = 1987$ nie jest wystarczające.

Zadanie 43. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją o następującej własności

$$f(x) = f(137 - x) = f(2202 - x) = f(3028 - x).$$

Jaka jest największa możliwa liczba różnych wartości, które mogą pojawić się na liście $f(1), f(2), f(3), \dots, f(2022)$?

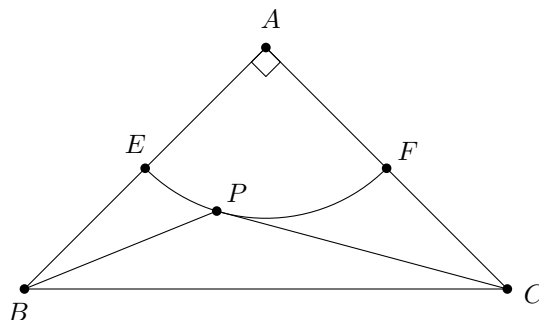
Wynik. 207

Rozwiązanie. Skoro $f(2202 - x) = f(x) = f(2202 - 137 + x) = f(2065 + x)$, to funkcja f jest okresowa, a jej okres wynosi 2065. Podobnie $f(3028 - x) = f(x) = f(3028 - 2202 + x) = f(826 + x)$, więc jej okres jest równy 826. Wiadomo, że jeśli funkcja ma dwa lub więcej okresów $p_1, p_2, p_3, \dots$, to jej okresem jest także $\gcd(p_1, p_2, p_3, \dots)$, więc okresem funkcji f jest także $\gcd(826, 2065) = 413$. Z równania $f(x) = f(137 - x)$ dostajemy, że wykres f jest symetryczny względem osi $x = 68.5 + 137 \cdot k$, na przykład $f(68) = f(69)$, $f(0) = f(137)$ lub $f(276) = f(137 - 276) = f(137 - 276 + 413) = f(274)$. Zatem maksymalna liczba różnych wartości jest równa $\frac{413+1}{2} = 207$.

Zadanie 44. Dany jest prostokątny trójkąt równoramienny ABC , w którym $AB = AC = 4$. Punkt P w taki sposób leży wewnątrz tego trójkąta, że $PA = 2$. Znajdź najmniejszą możliwą wartość wyrażenia $\frac{BP}{2} + CP$.

Wynik. $\sqrt{17} \approx 4.123106$

Rozwiązanie.



Rozważmy taki punkt T na boku AB , że $AT = 1$. Wówczas $\frac{PA}{AT} = \frac{2}{1} = \frac{AB}{PA}$. Co więcej, $\angle PAT = \angle BAP$, zatem trójkąty PAT i BAP są podobne. Stąd $\frac{PT}{PB} = \frac{PA}{AB} = \frac{1}{2}$, czyli $PT = \frac{BP}{2}$. Dalej, na mocy nierówności trójkąta i twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$$\frac{BP}{2} + CP = PT + CP \geq CT = \sqrt{AT^2 + AC^2} = \sqrt{17},$$

przy czym równość zachodzi gdy tylko punkty C, P, T są współliniowe.

Zadanie 45. W tabeli 4×4 umieszczono 8 jednostronnych lusterek na przekątnych niektórych komórek (co najwyżej jedno lustro w komórce). Lustro odbija promień światła jeśli pada on na powierzchnię lustra oraz całkowicie go pochłania jeśli padł on z drugiej strony. Ze środka każdego z ośmiu pionowych odcinków na brzegu tabeli wypuszczono poziomą wiązkę lasera do wnętrza tabeli. Ile różnych ustawień lusterek spełnia warunek, że każda z ośmiu wiązek lasera przecina albo górny brzeg tabeli, albo dolny brzeg tabeli (w szczególności żadna z wiązek nie została pochłonięta ani nie uderzyła w miejsce, z którego wypuszczono laser)?

Wynik. 90

Rozwiązanie. Pokażemy, że wystarczy wybrać kwadraty tak, aby w każdej kolumnie i każdym wierszu były po dokładnie 2 kwadraty i taki zbiór jednoznacznie wyznacza nam poprawne ustawienie luster.

Rzeczywiście, w każdej kolumnie i wierszu muszą być co najmniej 2 lustra, ponieważ w przeciwnym wypadku mielibyśmy albo pionową lub poziomą wiązkę światła lub któryś promień zostałby pochłonięty. Z drugiej strony, mając zbiór taki, że w każdym wierszu i kolumnie są dwa kwadraty, możemy wybrać skierowanie luster w sposób spełniający warunki zadania na dokładnie jeden sposób.

Musimy wobec tego znaleźć liczbę sposobów na wybranie komórek z tabeli 4×4 tak by w każdym rzędzie i każdej kolumnie były dokładnie 2 wybrane komórki. Jeśli obrócimy wszystkie lustra, okaże się że laser będzie krążył wewnątrz kraty. Są tylko dwa sposoby na jakie może krążyć lasery, albo dwa cykle długości 4 albo jeden cykl długości 8. Opcja pierwsza (cykle długości 4) odpowiada umieszczeniu lusterek w wierzchołkach dwóch prostokątów. Wybór pojedynczego prostokąta można przeprowadzić następująco: bez strat ogólności, jeden z boków pierwszego prostokąta pokrywa się z górnym wierszem, możemy wybrać więc 2 komórki z tego wiersza na 6 sposobów, a następnie wybrać przeciwny bok prostokąta na 3 sposoby, co daje łącznie 18 różnych sposobów. Drugi prostokąt jest wyznaczony jednoznacznie.

Żeby skonstruować cykl długości 8, wybierzmy najpierw dwa lustra w górnym wierszu na 6 sposobów. Następnie wybierzmy dwa kolejne lustra w wybranych kolumnach tak by nie leżały one w tym samym wierszu, można to zrobić na $3 \cdot 2 = 6$ sposobów. W końcu, wybierzmy lustro w jednym z wierszy w którym gdzie postawiono dotychczas jedno lustro, na jeden z dwóch sposobów. To wyznacza jednoznacznie cały cykl, wszystkich cykli długości 8 jest więc $6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 72$. Łącznie zatem dobrych ustawień luster jest $72 + 18 = 90$.

Zadanie 46. Znajdź najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią, która zwiększa się siedmiokrotnie po przesunięciu jej ostatniej cyfry na początek (przykładowo: 135 zmieniłoby się w 513).

Wynik. 1014492753623188405797

Rozwiązanie. Oznaczmy ostatnią cyfrę jako a , natomiast liczbę powstającą z pozostałych cyfr jako b . Wówczas oryginalna liczba jest równa $10b + a$, a nowa liczba jest równa $10^k a + b$, gdzie k jest liczbą cyfr b , czyli $k = \lfloor \log_{10} b \rfloor + 1$. Teraz należy rozwiązać równanie $70b + 7a = 10^k a + b$, czyli $b = \frac{(10^k - 7)a}{69}$. Ponieważ musimy zminimalizować b , wystarczy odnaleźć najmniejszą wartość k taką, że dla pewnego a zachodzi $69 \mid (10^k - 7)a$. Oczywiście $10^k - 7$ jest zawsze podzielne przez 3, czyli równoważnie można postawić warunek $23 \mid (10^k - 7)a$, co zdarzy się wówczas i tylko wówczas, gdy $23 \mid 10^k - 7$, mianowicie ponieważ 23 jest liczbą pierwszą oraz $a < 23$. Stąd musimy tylko znaleźć najmniejsze takie k , że $10^k \equiv 7 \pmod{23}$. I skoro $10^{-1} \equiv 7 \pmod{23}$, z małego twierdzenia Fermata można bezpośrednio wywnioskować, że najmniejszym takim k jest 21. Wstawiając tę wartość do równania, otrzymujemy $b = \frac{(10^{21} - 7)a}{69}$. Teraz pozostaje ustalić najmniejsze możliwe wartości a i b : odwrócenie wzoru na k pozwala nam stwierdzić, że b musi mieć 21 cyfr, stąd $b \geq 10^{20}$, co oznacza, iż $(10^{21} - 7)a \geq 69 \times 10^{20}$. Najmniejszym takim a jest 7, więc $a = 7$ oraz $b = \frac{7 \times 10^{21} - 49}{69}$. Teraz już możemy bezpośrednio obliczyć $699999999999999999951 : 69 = 233333333333333333317 : 23 = 101449275362318840579$. Dlatego też liczba, którą chcieliśmy znaleźć, to 1014492753623188405797.

Zadanie 47. Czarodzieje Arytmetyk i Kombinatoryka rywalizują ze sobą w pojedynku rewanżowym (pojedynkowali się wcześniej podczas zawodów Nąboj 2018). Każde z nich zaczyna mając 100 punktów życia. Arytmetyk nauczył się dwóch zaklęć – jedno zadaje 50 punktów obrażeń (tzn. obniża punkty życia przeciwnika o 50), a drugie obniża dokładność przeciwnika wyrażoną w procentach o 25 na resztę pojedynku (np. z 65 % do 40 %). Dokładność to prawdopodobieństwo, że zaklęcie zadziała (ujemna dokładność jest interpretowana jako zerowe prawdopodobieństwo), a oba zaklęcia Arytmetyka mają dokładność 100 %. Kombinatoryka zawsze używa zaklęcia zadającego 50 punktów obrażeń, z początkową dokładnością 100 %. Czarodzieje rzucają zaklęcia na zmianę, po jednym zaklęciu. Arytmetyk zaczyna i w każdej swojej turze decyduje, które zaklęcie użyć poprzez rzut symetryczną monetą. Pojedynek kończy się, gdy któryś z czarodziejów ma zero lub mniej punktów życia. Jakie jest prawdopodobieństwo, że któryś z nich wygra bez otrzymania żadnych obrażeń?

Wynik. $\frac{141}{1024} \approx 0.137695$

Rozwiązanie. Oznaczmy stan rozgrywki przez (A, C, p, t) , gdzie A to liczba punktów życia Arytmetyka, C liczba punktów życia Kombinatoryki, p obecna skuteczność zaklęcia Kombinatoryki, t jest zmienną, przechowującą informację, kto rzuca zaklęcie w tej turze.

Zauważmy, że pierwsze rzucone zakłęcie nie mogło być zakłęciem zadającym obrażenia, jako że Kombinatoryka nie mogłaby wtedy nie trafić swoim zakłęciem i obydwoje czarodzieje stracili by punkty życia. Zauważmy także, że jeśli w pewnym momencie pojedynku $p = 0\%$, to Arytmetyk wygrywa (prawdopodobieństwo nieskończonego pojedynku

zbiega do zera w nieskończoności). Kombinatoryka potrzebuje dwóch zaklęć, które trafiają, by pokonać Arytmetyka – zatem czarodziej potrzebuje rzucić zaklęcia obniżające skuteczność co najmniej dwa razy. Tym sposobem dochodzimy do możliwych szukanych wyników końcowych: $(100, 0, 75, C)$, $(100, 0, 50, C)$, $(100, 0, 25, C)$, $(100, 0, 0, C)$, $(0, 100, 50, C)$ i $(0, 100, 25, C)$.

- Pierwszy wynik końcowy jest osiągany, tylko gdy rozgrywka przebiega następująco: zaklęcie obniżające skuteczność nie trafia, Kombinatoryka trafia, Arytmetyk ponownie nie trafia zaklęciem obniżającym skuteczność, a Kombinatoryka trafia, kończąc rozgrywkę. Dzieje się tak z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^7}$.
- Drugi wynik jest osiągany przy dwóch rozgrywkach. Pierwsza możliwość to atak na skuteczność, pudło, trafienie, pudło, atak na skuteczność, pudło, atak, druga to atak na skuteczność, pudło, atak na skuteczność, pudło, atak, pudło, atak. W obu przypadkach szansa trafienia wszystkich zaklęć ataku Arytmetyka to $\frac{1}{2^4}$; szansa nietrafienia zaklęć Kombinatoryki to $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^4}$ albo $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^5}$. W takim razie ten gra zakończy się takim wynikiem z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2^4} \left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} \right) = \frac{3}{2^9}$.
- W podobny sposób obliczamy formułę na prawdopodobieństwo wyniku $(100, 0, 25, C)$: $\frac{1}{2^5} \left(\frac{3^2}{2^7} + \frac{3}{2^6} + \frac{3}{2^7} \right) = \frac{9}{2^{11}}$.
- Ostatni wynik końcowy, dla którego Arytmetyk wygrał, jest osiągany z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2^4} \cdot \frac{3}{2^5} + \frac{1}{2^5} \cdot \left(\frac{3^2}{2^7} + \frac{3}{2^6} + \frac{3}{2^7} \right) = \frac{3}{2^9} + \frac{9}{2^{11}} = \frac{21}{2^{11}}$.
- Pierwszy wynik z wygraną Kombinatoryki jest wynikiem następującej rozgrywki: atak na skuteczność, trafienie, atak na skuteczność, trafienie. Dzieje się tak z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2^2} \cdot \frac{3}{2^2} \cdot 12 = \frac{3}{2^5}$.
- W drugim przypadku z wygraną Kombinatoryki rozgrywka może przebiegać na następujące sposoby: atak na skuteczność, trafienie, atak na skuteczność, pudło, atak na skuteczność, atak lub atak na skuteczność, pudło, atak na skuteczność, trafienie, atak na skuteczność, trafienie. Sumuje się to do $\frac{1}{2^3} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2^3} \left(\frac{3}{2^5} + \frac{1}{2^5} \right) = \frac{1}{2^6}$.

Zatem prawdopodobieństwo, że rozgrywka zakończy się rezultatem, gdy wygrywający czarodziej nie straci punktów życia jest sumą prawdopodobieństw powyższych przypadków, czyli $\frac{1}{2^7} + \frac{3}{2^9} + \frac{9}{2^{11}} + \frac{21}{2^{11}} + \frac{3}{2^5} + \frac{1}{2^6} = \frac{29}{2^{10}} + \frac{7}{2^6} = \frac{141}{1024}$.

Zadanie 48. Niech a, b będą dodatnimi liczbami całkowitymi, a $(A_n)_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych spełniającym warunki $A_1 = b$, $A_2 = a$ oraz

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2} \quad \text{dla każdego } n \geq 3.$$

Następnie niech $(B_n)_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem spełniającym $B_1 = a + 2b$, $B_2 = 3a + b$ oraz ponownie

$$B_n = B_{n-1} + B_{n-2} \quad \text{dla każdego } n \geq 3.$$

Ponadto wiemy, że istnieją takie $k, l \geq 1$, że $A_k = 2022$ i $B_l = 2793$. Jaka jest najmniejsza możliwa wartość $a \cdot b$?

Wynik. $15 \cdot 72 = 1080$

Rozwiązanie. Zauważmy, że $B_n = A_n + A_{n+2}$ – dla $n = 1$ mamy $A_1 + A_3 = A_1 + (A_1 + A_2) = a + 2b = B_1$, dla $n = 2$ podobnie $A_2 + A_4 = A_2 + (A_2 + A_3) = 2a + (a + b) = 3a + b = B_2$, a dalej możemy kontynuować indukcyjnie: $B_{n+2} = B_{n+1} + B_n = (A_{n+1} + A_{n+3}) + (A_n + A_{n+2}) = (A_n + A_{n+1}) + (A_{n+2} + A_{n+3}) = A_{n+2} + A_{n+4}$.

Skoro a, b są dodatnie, mamy $A_{n+1} > A_n$ dla $n \geq 2$, oraz $A_3 > A_1$. Ponieważ później zobaczymy, że 1080 jest możliwą wartością iloczynu $a \cdot b$, możemy spokojnie założyć $k > 2$, gdyż w przeciwnym wypadku odpowiedź $ab = A_1 A_2$ byłaby równa co najmniej 2022.

Gdybyśmy mieli $k \leq l$, oznaczałoby to, że

$$2793 = A_{l+2} + A_l = A_{l+1} + 2A_l > 2A_l \geq 2A_k = 2 \cdot 2022,$$

co jest niemożliwe. Tak więc $k > l$. Ponadto $k = l + 1$ także nie jest możliwe, gdyż wtedy mielibyśmy

$$2793 = A_{l+2} + A_l = A_{l+1} + 2A_l = 2022 + 2A_l,$$

gdzie prawa strona jest parzysta, a lewa nie. Sprawdzając przypadek $k > l + 3$ dochodzimy do wniosku, że $2793 = A_l + A_{l+2} < A_{k-1} + A_{k-2} = 2022$, sprzeczność, zaś przypadek $k = l + 3$ bardzo podobnie prowadzi do

$$A_l - A_{l+1} = (A_l + A_{l+2}) - (A_{l+1} + A_{l+2}) = 2793 - 2022 = 771,$$

co jest możliwe tylko gdy $l = 1$ – ale wtedy odpowiedź równa jest $a(a + 771)$, co może być lepsze niż 1080 tylko dla przypadku $a = 1$, $b = 772$. Wtedy jednak $2793 \neq B_1 = a + 2b = 1545$, tak więc przypadek ten jest niemożliwy i $k \neq l + 3$.

Ostatecznie dochodzimy do wniosku, że $k = l + 2$. Otrzymujemy $A_{l+2} = 2022$, $A_l + A_{l+2} = 2793$, a więc $A_l = 771$ i $A_{l+1} = 1251$, co pozwala nam na obliczenie wcześniejszych wyrazów ciągu: $A_{l-1} = 480$, $A_{l-2} = 291$, $A_{l-3} = 189$, $A_{l-4} = 102$, $A_{l-5} = 87$, $A_{l-6} = 15$, $A_{l-7} = 72$, $A_{l-8} = -57$. Widzimy, że $b = 72$, $a = 15$ to minimalny wybór dwóch początkowych wyrazów, tak więc odpowiedź jest równa $15 \cdot 72 = 1080$.

Zadanie 49. W każdym wierzchołku pełnego drzewa binarnego o głębokości 10 (ma ono $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{10} = 2^{11} - 1$ wierzchołków) rośnie jabłko. W każdym jabłku mieszka $2^{11} - 2$ gąsienic. Nagle wszystkie gąsienice stwierdziły, że czas na przeprowadzkę do nowego jabłka. Żadne dwie gąsienice, które mieszkały w jednym jabłku nie wybierają na nowy dom tego samego jabłka i żadna nie zostaje w jabłku, w którym mieszkała. Jaka jest odległość, którą muszą przejść wszystkie gąsienice wzdłuż krawędzi, z których każda ma długość jeden?

Uwaga: Pełne drzewo binarne, to drzewo, którego wszystkie wierzchołki wewnętrzne mają dwoje dzieci i każdy liść ma tę samą głębokość.

Wynik. 67166208

Rozwiązanie. Rozważmy uogólniony problem i oznaczmy przez T_n pełne drzewo binarne o głębokości n (w naszym przypadku $n = 10$). Niech V_k oznacza zbiór wszystkich wierzchołków, których odległość od pewnego liścia wynosi k (odległość 0 oznacza, że wierzchołek jest liściem, odległość 1, że jest sąsiadem liścia itd.), a E_k zbiór krawędzi pomiędzy V_k i V_{k+1} . W drzewie T_n mamy $2^{n+1} - 1$ wierzchołków. Ustalmy krawędź e ze zbioru E_k . Policzmy teraz gąsienice, które przez nią przechodzą. Niech p, q będą liczbą wierzchołków odpowiednio po jednej i drugiej stronie e . Ponieważ rozważamy drzewo, to każda gąsienica idąca z wierzchołka liczonego w p do wierzchołka liczonego w q musi przejść przez e . Zatem ich liczba jest równa $p \cdot q$. Ponieważ jedna z części musi być T_k otrzymujemy, że $p = |T_k| = 2^{k+1} - 1$ i $q = |T_n| - |T_k| = 2^{n+1} - 1 - 2^{k+1} + 1 = 2^{n+1} - 2^{k+1}$. Zatem $2 \cdot p \cdot q = 2 \cdot (2^{k+1} - 1) \cdot (2^{n+1} - 2^{k+1})$. W zbiorze E_k znajduje się 2^{n-k} krawędzi, więc liczba gąsienic przechodzących przez E_k jest równa $(2^{n-k+1}) \cdot (2^{k+1} - 1) \cdot (2^{n+1} - 2^{k+1}) = (2^{n+1} - 2^{n-k} - 2^{k+1} + 1) \cdot 2^{n+2}$. Sumując powyższe wyrażenie dla każdego $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ dostajemy

$$\sum_{k=0}^{n-1} (2^{n+1} - 2^{n-k} - 2^{k+1} + 1) \cdot 2^{n+2} = 2^{n+2} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (2^{n+1} - 2^{n-k} - 2^{k+1} + 1) = 2^{n+2} \cdot (n \cdot 2^{n+1} + n - \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1}).$$

Suma po prawej stronie różni się jedynie kolejnością, stąd:

$$\begin{aligned} 2^{n+2} \cdot (n \cdot 2^{n+1} + n - \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1}) &= 2^{n+2} \cdot (n \cdot 2^{n+1} + n - 2 \cdot \sum_{k=1}^n 2^k) = \\ &= 2^{n+2} \cdot (n \cdot 2^{n+1} + n - 2 \cdot (2^{n+1} - 2)) = 2^{n+2} \cdot ((n-2) \cdot 2^{n+1} + n + 4). \end{aligned}$$

Podstawiając $n = 10$ dostaniemy $4096 \cdot (8 \cdot 2048 + 14) = 67166208$.

Zadanie 50. Dla liczby pierwszej p niech N_p oznacza liczbę takich trójek (a, b, c) , że $a, b, c \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ oraz

$$a^3 + b^3 + c^3 \equiv 3abc \pmod{p}.$$

Znajdź sumę wszystkich liczb pierwszych $p \leq 1000$ takich, że $N_p > p^2 + p$.

Wynik. 36668

Rozwiązanie. Zauważmy, że $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2} \cdot (a+b+c)((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2)$. Następnie podstawiając $a-b = x$, $b-c = y$ dostajemy $c-a = -x-y$. Wtedy $\frac{1}{2}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) = x^2 + xy + y^2$. Użyjemy następujących faktów:

1. Jeśli $p \equiv 2 \pmod{3}$ i $p \mid x^2 + xy + y^2$, to $p \mid x, y$.
2. Jeśli $p \equiv 1 \pmod{3}$, równanie $z^2 + z + 1 \equiv 0$ ma pewne dwa rozwiązania r oraz r^{-1} . Wtedy $x^2 + xy + y^2 \equiv (x - ry)(x - r^{-1}y) \pmod{p}$. Zatem jeśli p dzieli $x^2 + xy + y^2$, to $x \equiv ry \pmod{p}$ lub $x \equiv r^{-1}y \pmod{p}$.

Następnie jeśli $p \equiv 2 \pmod{3}$, to albo $a+b+c \equiv 0 \pmod{p}$, co daje p^2 rozwiązań, albo $p \mid x^2 + xy + y^2$, co z pierwszego faktu daje $a-b \equiv b-c \equiv 0 \pmod{p}$, czyli $a \equiv b \equiv c \pmod{p}$. Jedynym przypadkiem, który policzymy tu podwójnie, jest $(a, b, c) = (0, 0, 0)$; uwzględniając to, dostajemy łącznie $p^2 + p - 1$ rozwiązań, czyli mniej niż $p^2 + p$.

Jeśli $p \equiv 1 \pmod{3}$, dostajemy p^2 rozwiązań dla $a+b+c \equiv 0 \pmod{p}$. Jeśli $x^2 + xy + y^2 \equiv 0 \pmod{p}$, to, korzystając z drugiego z faktów, musi zachodzić $a-b \equiv r(b-c) \pmod{p}$ lub $a-b \equiv r^{-1}(b-c) \pmod{p}$. W pierwszym przypadku otrzymujemy $a \equiv (r+1)b - rc \equiv p$, w drugim zaś $a \equiv (r^{-1}+1)b - rc \pmod{p}$. W obu przypadkach dostajemy p^2 możliwych trójek (a, b, c) spełniających te równania. Jeśli $a \equiv b \equiv c \pmod{p}$ (i dokładnie wtedy) oba te równania są spełnione, dostajemy więc w ten sposób p wspólnych rozwiązań. Jeśli zaś zachodzi pierwsze z tych równań oraz $a+b+c \equiv 0 \pmod{p}$, to $(r+2) - (r-1)c \equiv 0 \pmod{p}$, co daje kolejne p powtórzonych rozwiązań; podobnie w przypadku drugiego z równań. Wszystkie te równania są spełnione jedynie gdy $a \equiv b \equiv c \equiv 0 \pmod{p}$, więc z zasady włączeń-wyłączeń otrzymujemy łącznie $3p^2 - 3p + 1$ rozwiązań.

Ostatecznie gdy $p = 3$, dostajemy $a^3 + b^3 + c^3 \equiv 0 \pmod{3}$. Skoro $x \equiv x^3 \pmod{3}$, to dostajemy $a+b+c \equiv 0 \pmod{3}$, co daje tylko 9 rozwiązań w tym przypadku.

Ponieważ $3p^2 - 3p + 1 > p^2 + p$ dla liczb pierwszych postaci $3k+1$, wszystkie one spełniają założenia zadania, zatem odpowiedzią jest ich suma, równa **36668**.

Uwaga.

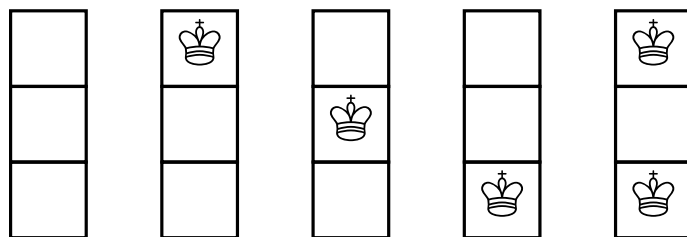
Fakty 1 i 2 można udowodnić na wiele różnych sposobów. Dla pierwszego pomnóżmy równanie $x^2 + xy + y^2 \equiv 0 \pmod{p}$ przez $x - y$. Otrzymamy w ten sposób równanie $x^3 \equiv y^3 \pmod{p}$, które podniesione stronami do potęgi $\frac{p+1}{3}$ daje $x^{p+1} \equiv y^{p+1} \pmod{p}$. Stąd $x^2 \equiv y^2 \pmod{p}$, i ponownie korzystając z $x^3 \equiv y^3 \pmod{p}$ mamy $x \equiv y \pmod{p}$. Zatem p dzieli $x^2 + xy + y^2 \equiv 3x^2 \pmod{p}$, a skoro $p \neq 3$, to p dzieli x (a więc także y).

Drugi z faktów jest konsekwencją tego, iż równanie $z^3 \equiv 1 \pmod{p}$ ma trzy rozwiązania gdy $p \equiv 1 \pmod{3}$. Zatem $z^2 + z + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ ma dwa rozwiązania r oraz r^{-1} .

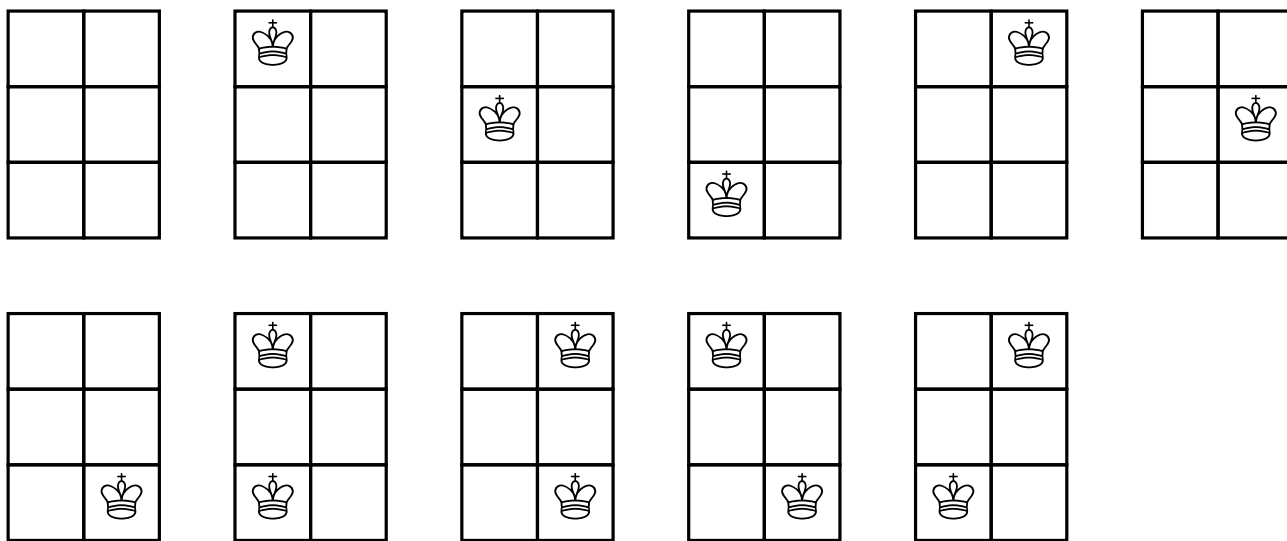
Zadanie 51. Na ile sposobów można umieścić króle szachowe (co najmniej jednego) na szachownicy o wymiarach 3×11 , aby nie szachowały się nawzajem? Uwaga: Król szachuje drugiego wtedy, gdy znajdują się na sąsiednich polach, stykających się bokiem lub wierzchołkiem.

Wynik. 132 290

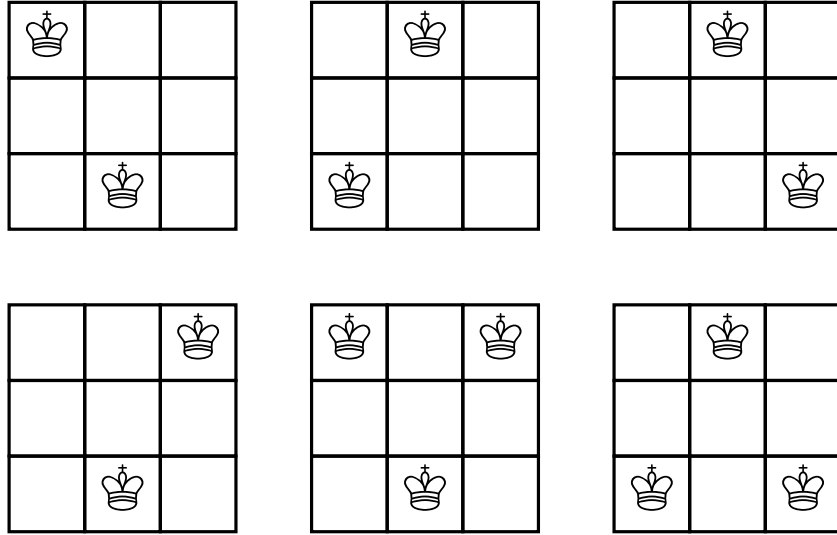
Rozwiązanie. Dla $n \geq 0$, oznaczmy przez $k(n)$ liczbę możliwych rozmieszczeń króli na szachownicy $3 \times n$ w taki sposób, że żadne dwa się nie szachują; wliczając w to pustą szachownicę (0 króli). Jako że jest tylko jedna pusta szachownica, to mamy $k(0) = 1$. Ponadto łatwo możemy obliczyć, że $k(1) = 5$



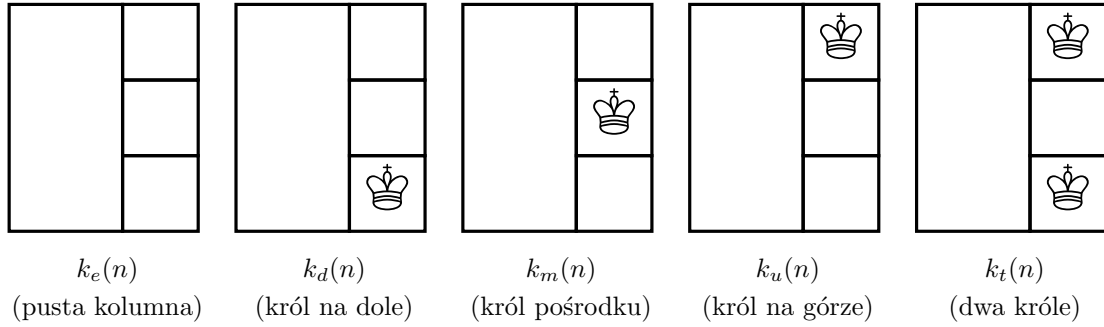
oraz $k(2) = 11$.



Teraz jesteśmy w stanie obliczyć $k(3) = 35$. Jeżeli w środkowej kolumnie nie znajduje się żaden król, to mamy 5 możliwości rozstawienia króli w pierwszej i trzeciej kolumnie, jako że $k(1) = 5$. W ten sposób dostajemy 25 możliwości (wliczając w to pustą szachownicę). Jeżeli króle znajdują się tylko w drugiej kolumnie, to mamy 4 możliwości umieszczenia w niej jednego lub dwóch króli. Dodatkowo, istnieje 6 możliwych ustawień króli, w których zarówno środkowa kolumna, jak i jedna z zewnętrznych zawierają przynajmniej jednego króla.



Teraz sklasyfikujemy wszystkie możliwe ustawienia króli na szachownicy $3 \times n$ (dla $n \geq 2$) w zależności od ustawienia króli w ostatniej kolumnie.



Mamy $k(n) = k_e(n) + k_d(n) + k_m(n) + k_u(n) + k_t(n)$ i ponieważ króle nie mogą się wzajemnie szachować, dostajemy następujące równania rekurencyjne:

$$\begin{aligned}
 k_e(n) &= k(n-1) \\
 k_d(n) &= k_u(n-1) + k_e(n-1) \\
 k_u(n) &= k_d(n-1) + k_e(n-1) \\
 k_m(n) &= k_t(n) = k_e(n-1)
 \end{aligned}$$

Ze względu na symetrię mamy $k_d(n) = k_u(n)$, a więc dla $n \geq 2$ możemy zauważyć równość

$$\begin{aligned}
 k(n) &= k_e(n) + 2 \cdot k_d(n) + 2 \cdot k_m(n) \\
 &= k(n-1) + 2 \cdot k_d(n) + 2 \cdot k_e(n-1) \\
 &= k(n-1) + 2 \cdot k_d(n) + 2 \cdot k(n-2),
 \end{aligned}$$

z której wnioskujemy

$$2 \cdot k_d(n) = k(n) - k(n-1) - 2 \cdot k(n-2).$$

Z kolei korzystając z równości $k_d(n) = k_u(n-1) + k_e(n-1)$ oraz $k_e(n-1) = k(n-2)$, otrzymujemy

$$2 \cdot k_d(n) = 2 \cdot k_d(n-1) + 2 \cdot k(n-2).$$

Podstawiając po obu stronach k_d z powyżej uzyskanego wzoru, dostajemy rekurencję

$$\begin{aligned}
 k(n) - k(n-1) - 2 \cdot k(n-2) &= k(n-1) - k(n-2) - 2 \cdot k(n-3) + 2 \cdot k(n-2) \\
 \iff k(n) &= 2 \cdot k(n-1) + 3 \cdot k(n-2) - 2 \cdot k(n-3)
 \end{aligned}$$

dla $n \geq 3$, z warunkami początkowymi $k(0) = 1$, $k(1) = 5$ oraz $k(2) = 11$. Stosując tę rekurencję, otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned}k(3) &= 2 \cdot 11 + 3 \cdot 5 - 2 \cdot 1 = 35 \\k(4) &= 2 \cdot 35 + 3 \cdot 11 - 2 \cdot 5 = 93 \\k(5) &= 2 \cdot 93 + 3 \cdot 35 - 2 \cdot 11 = 269 \\k(6) &= 2 \cdot 269 + 3 \cdot 93 - 2 \cdot 35 = 747 \\k(7) &= 2 \cdot 747 + 3 \cdot 269 - 2 \cdot 93 = 2115 \\k(8) &= 2 \cdot 2115 + 3 \cdot 747 - 2 \cdot 269 = 5933 \\k(9) &= 2 \cdot 5933 + 3 \cdot 2115 - 2 \cdot 747 = 16717 \\k(10) &= 2 \cdot 16717 + 3 \cdot 5933 - 2 \cdot 2115 = 47003 \\k(11) &= 2 \cdot 47003 + 3 \cdot 16717 - 2 \cdot 5933 = 132291.\end{aligned}$$

Pozostaje jeszcze odjąć pustą szachownicę – w rezultacie otrzymujemy 132 290 możliwych rozstawień króli.

Zadanie 52. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC . Punkt A' jest punktem, w którym wysokość opuszczona z wierzchołka A przecina półokrąg o średnicy BC zbudowany na zewnątrz trójkąta ABC . W analogiczny sposób definiujemy punkty B' , C' . Przez $[XYZ]$ oznaczajmy pole trójkąta $[XYZ]$. Wiedząc, że $[BCA'] = 5$, $[B'CA] = 6$ i $[BC'A] = 7$, wyznacz $[ABC]$.

Wynik. $\sqrt{110} \approx 10.488088$

Rozwiązanie. Udowodnimy, że $[BCA']^2 + [CAB']^2 + [ABC']^2 = [ABC]^2$, skąd dostaniemy wynik.

Niech α, β, γ będą kątami wewnętrznymi trójkąta ABC , odpowiednio przy wierzchołkach A, B, C . Oznaczmy przez D spodek wysokości trójkąta ABC opuszczonej z wierzchołka A . W trójkącie prostokątnym BCA' dostajemy równość $|A'D|^2 = |BD| \cdot |DC|$. Zatem

$$\left(\frac{[BA'C]}{[BAC]}\right)^2 = \frac{|BD| \cdot |CD|}{|AD|^2}.$$

Jako że $\frac{|BD|}{|AD|} = \operatorname{ctg}(\beta)$, wystarczy udowodnić

$$\operatorname{ctg}(\beta) \cdot \operatorname{ctg}(\gamma) + \operatorname{ctg}(\gamma) \cdot \operatorname{ctg}(\alpha) + \operatorname{ctg}(\alpha) \cdot \operatorname{ctg}(\beta) = 1.$$

Ponieważ $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, to mamy

$$0 = \sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) + \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma) + \sin(\gamma) \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma),$$

$$\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) + \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma) + \sin(\gamma) \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha),$$

$$1 = \frac{\cos(\beta) \cdot \cos(\gamma)}{\sin(\beta) \cdot \sin(\gamma)} + \frac{\cos(\beta) \cdot \cos(\alpha)}{\sin(\beta) \cdot \sin(\alpha)} + \frac{\cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma)}{\sin(\alpha) \cdot \sin(\gamma)} = \operatorname{ctan}(\beta) \cdot \operatorname{ctan}(\gamma) + \operatorname{ctan}(\alpha) \cdot \operatorname{ctan}(\gamma) + \operatorname{ctan}(\beta) \cdot \operatorname{ctan}(\alpha) = 1.$$

Zatem pole $[ABC]$ jest równe $\sqrt{[A'BC]^2 + [AB'C]^2 + [ABC']^2} = \sqrt{25 + 36 + 49} = \sqrt{110}$.

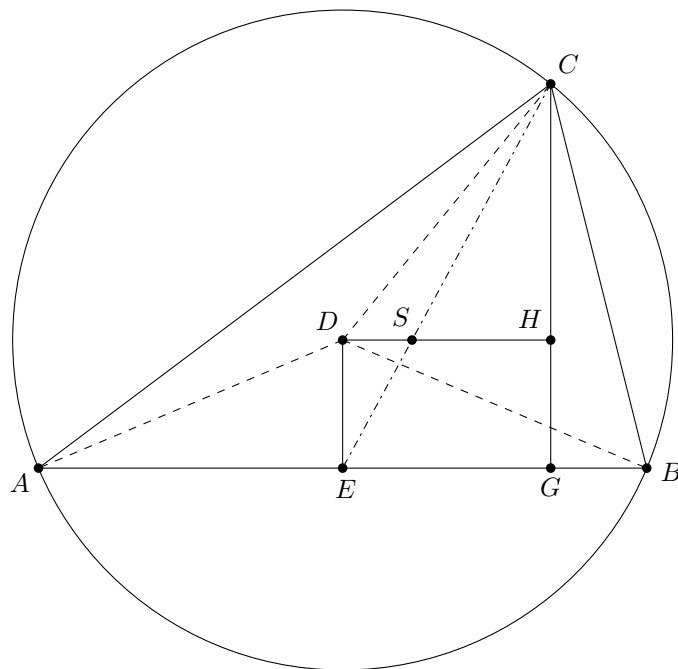
Zadanie 53. Valentin gra w grę strategiczno-ekonomiczną *Settlers*. Rozpoczyna nową grę z początkowym ustawieniem będącym wyspą o następujących własnościach:

- Wyspa ma kształt koła z trzema portami A, B, C na wybrzeżu.
- Na wyspie są cztery ważne budynki D, E, G, H , umieszczone w wierzchołkach prostokąta $DEGH$.
- Zamek D znajduje się w środku wyspy.
- Kościół E jest zlokalizowany dokładnie w połowie drogi między portem B i portem A .
- Chata myśliwego G jest położona bliżej portu B niż portu A .
- Magazyn wszystkich zasobów H znajduje się w ortocentrum trójkąta ABC .

Valentin wie, że odległość od D do E to 8 km, a odległość od E do G to 13 km. Ile kilometrów ma trasa transportu rudy z magazynu do najbliższego portu?

Wynik. 10

Rozwiązanie. W prowadzonych obliczeniach pomijamy jednostki. Ponieważ $DEGH$ jest prostokątem, więc $DE = HG = 8$ oraz $DH = EG = 13$. Co więcej, G jest bliżej B niż A , D jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC , a H — ortocentrum tego trójkąta.



Wykorzystując fakt, że ortocentrum H , środek ciężkości S oraz środek okręgu opisanego D leżą na prostej Eulera i spełniają równość $SH = 2 \cdot DS$ oraz podobieństwo trójkątów SHC i EGC , uzyskujemy

$$\frac{CH}{HS} = \frac{CG}{GE} \iff \frac{CH}{2} = \frac{CG}{3} \iff CH = 2 \cdot HG.$$

Stąd uzyskujemy $CH = 16$ i w konsekwencji na mocy twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta DHC : $CD^2 = 16^2 + 13^2$. Zauważmy, że $AD = BD = CD$ to promień wyspy, wobec czego w trójkącie prostokątnym AED mamy $AE = \sqrt{16^2 + 13^2 - 8^2} = 19 = EB$ i w konsekwencji $GB = 19 - 13 = 6$. Korzystając ponownie z twierdzenia Pitagorasa, uzyskujemy ostatecznie $HB = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ — odległość magazynu od najbliższego portu to 10 km.