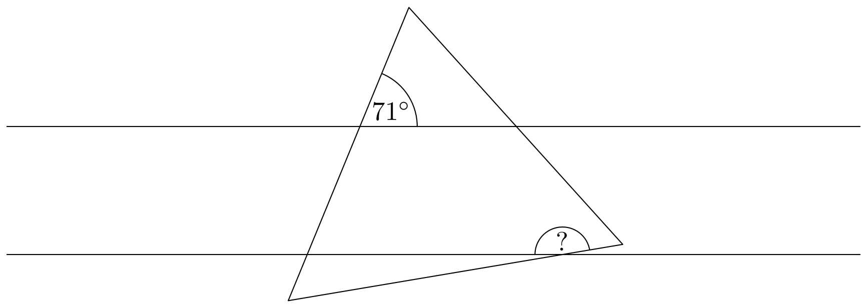
Úloha 1. Strany rovnostranného trojuholníka pretínajú dve rovnobežky (pozri obrázok). Ak vieme veľkosť jedného vyznačeného uhla, určte veľkosť uhla označeného otáznikom v stupňoch.



Výsledok. 169

Riešenie. Pozrime sa na trojuholník pod nižšou rovnobežkou – jeden jeho uhol je 60° z pôvodného trojuholníka. Druhý je susedný k otázniku – označme α. Tretí je susedný k súhlasnému uhlu k vyznačenému 71°, teda má veľkosť $180° - 71° = 109°$.

Môžeme teda dopočítať $\alpha = 180° - 60° - 109° = 11°$. Otáznik je susedný k α, a teda je $180° - 11° = 169°$.

Úloha 2. Števka má jedno tričko a jednu sukňu každej zo siedmich farieb: červenej, modrej, zelenej, žltej, čiernej, oranžovej a fialovej. Vždy chce mať oblečené tričko a sukňu rôznych farieb. Ak má oblečené niečo červené, chce, aby bol druhý kus oblečenia žltý. Koľko rôznych outfitov si môže Števka vybrať?

Výsledok. 32

Riešenie. Dokopy existuje $6 \cdot 6$ kombinácií, ktoré neobsahujú červenú, 6 z nich ale má tú istú farbu dvakrát. Potom sú ešte dva červeno-žlté outfity. Výsledok je teda $36 - 6 + 2 = 32$.

Úloha 3. Súčet šiestich navzájom rôznych kladných celých čísel je 22. Aký je ich súčin?

Výsledok. 840

Riešenie. Najmenší súčet 6 rôznych prirodzených čísel je $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Keďže je naša suma len o jedna vyššia, jediná možnosť je $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 = 22$. Ak by sme zväčšili iné číslo o 1, tak by sme mali dve rovnaké čísla. Potom $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 = 840$.

Úloha 4. Koľko najmenej identických kvádrov rozmerov $6 \times 15 \times 20$ potrebuje Marek na to, aby postavil kocku? Všetky kvádre musia byť otočené rovnako.

Výsledok. 120

Riešenie. Kvôli podmienke na otočenie kvádrov vieme, že dĺžka strany kocky musí byť deliteľná zároveň $6 = 2 \cdot 3$, $15 = 3 \cdot 5$ a $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$, potom teda musí byť deliteľná aj $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$, čo je zjavne možná dĺžka strany kocky. Počet kvádrov je teda $60^3/(6 \cdot 15 \cdot 20) = 120$.

Úloha 5. Lukáš nakreslil úsečku jednotkovej dĺžky. Ďalej chcel skonštruovať pravouhlý trojuholník s obsahom 0,2 tak, aby táto úsečka bola jedna z jeho strán. Vtedy si uvedomil, že by to mohol urobiť viacerými spôsobmi. Koľkými možnými spôsobmi to mohol Lukáš spraviť?

Výsledok. 8

Riešenie. Ako prvé si uvedomme, že daná úsečka bude buď odvesna, alebo prepona. V oboch prípadoch sa bude tretí bod trojuholníka nachádzať na rovnobežke vzdialenej 0,4 od Lukášovej úsečky (pretože výška z tohto bodu po prenásobení 1/2 tvorí obsah trojuholníka). Všimnime si, že takéto priamky sú dve.

V prípade, že ide o preponu, bude tretí bod trojuholníka ležať aj na kružnici, ktorej priemer je Lukášova úsečka (ide o Tálesovu kružnicu). Táto kružnica má s rovnobežkami 4 priesečníky.

Pokiaľ ide o odvesnu, tretí bod trojuholníka sa bude nachádzať aj na kolmici z jedného z krajných bodov Lukášovej úsečky. Krajné body sú dva, a teda aj kolmice na túto úsečku sú dve. Tým pádom dostávame ďalšie 4 priesečníky s rovnobežkami, čo je v súčte s predchádzajúcimi 8.

Nakoniec všimnime si, že žiadne dva z týchto prípadov nie sú ten istý prípad započítaný dvojmo.

Úloha 6. Každé písmeno predstavuje inú nenulovú cifru. Spočítajte $\overline{BAC}$.

$$\begin{array}{cccc} & A & A & B \\ + & A & B & A \\ + & & C & C \\ \hline & B & A & C \end{array}$$

Poznámka: číslom $\overline{XYZ}$ myslíme číslo, ktoré má na mieste stoviek cifru X, na mieste desiatok cifru Y a na mieste jednotiek cifru Z.

Výsledok. 732

Riešenie. V treťom stĺpci vidíme, že ak sčítame $A+B+C$, posledná číslica bude stále C. To znamená, že $A+B = 10$. Keď sa pozrieme na druhý stĺpec, vieme, že z tretieho stĺpca musíme pričítať ešte 1, teda sčítavame $A+B+C+1 = 11+C = \overline{1A}$. $C + 1 = A$. Prvý stĺpec teda vieme prepísať na $A + A + 1 = B$. Teraz máme tri rovnice pre A, B a C, ktoré nám po vyriešení dajú, že $A = 3$, $B = 7$, $C = 2$. Preto $\overline{BAC} = 732$.

Úloha 7. *Masívne* číslo je také kladné celé číslo, ktorého súčin cifier je 36. Nech a a b sú definované nasledovne.

- a je ciferný súčet najmenšieho možného masívneho čísla,
- b je najmenší možný ciferný súčet masívneho čísla.

Nájdite rozdiel $a - b$.

Výsledok. 3

Riešenie. Prvočíselný rozklad čísla 36 je $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$.

Poďme najskôr nájsť najmenšie možné masívne číslo. Môžeme si všimnúť, že dvojciferné číslo so súčinom cifier 36 existuje (napríklad 66). Aby sme našli to najmenšie, prvá cifra musí byť čo najmenšia a súčin zvyšných deliteľov nemôže byť väčší ako 9. Také číslo je $(2 \cdot 2) \cdot 10^1 + (3 \cdot 3) \cdot 10^0 = 49$. Teda súčet cifier najmenšieho možného masívneho čísla je $4 + 9 = 13$.

Zamyslime sa teraz, aký je najmenší možný ciferný súčet masívneho čísla. $2+2+3+3$ sa nasčíta na 10. Vynásobením nejakých dvoch cifier (ak by sme chceli dvoj- alebo trojciferné číslo) dostaneme ciferný súčet, ktorý je väčší alebo rovný pôvodnému. Najmenší možný ciferný súčet je preto 10. Rozdiel je teda $13 - 10 = 3$.

Úloha 8. Kde bolo, tam bolo, v deň M (ako Mars) roboti dokončili prvú marťanskú základňu pre 100 ľudí. Ďalej rozširovali priestory tak, že každý ďalší mesiac pribudol priestor pre 10 ľudí. V deň M zároveň vyštartovala zo Zeme prvá raketa mieriaca na Mars. Cesta jej trvala 7 mesiacov a prepravila 20 kolonistov na marťanskú základňu. Išlo o prvú z n identických rakiet, ktoré mali Zem opustiť postupne 0, 1, 2 až $n - 1$ mesiacov po dni M. Určte najväčšie možné $n$také, že základňa bude mať vždy pre kolonistov dostatok priestoru.

Výsledok. 16

Riešenie. Sedem mesiacov po dni M dorazilo prvých 20 ľudí na Mars. Vo všeobecnosti, k mesiacov ($k \geq 7$) po dni M sa na základni nachádzalo $20(k - 6)$ kolonistov. V tom čase bola kapacita základne $100 + 10k$. To nám dáva nerovnicu

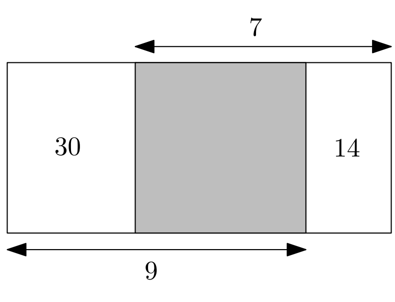
$$20(k - 6) \leq 100 + 10k,$$

ktorá sa dá ľahko zjednodušiť na

$$k \leq 22.$$

To značí, že po 22 mesiacoch nastane okamih, keď už nemôže priletieť žiadna ďalšia raketa. Odlet poslednej možnej rakety sa udial sedem mesiacov pred jej príletom na Mars, teda posledná raketa odletela $22 - 7 = 15$ mesiacov po dni M. Z toho už jasne vidíme, že mohlo byť najviac 16 rakiet.

Úloha 9. Na obrázku je obdĺžnik rozdelený na tri menšie obdĺžniky. Určte obsah prostredného obdĺžnika, ak máte dané obsahy zvyšných dvoch a dve vyznačené dĺžky.



Výsledok. 42

Riešenie. Označme šírku obdĺžnikov v a hľadaný obsah S. Potom $9v = 30 + S$ a $7v = 14 + S$. Vyriešením tejto sústavy lineárnych rovníc dostaneme $v = 8$ a $S = 42$.

Úloha 10. Marek a Lukáš sa navzájom vyzvali – ak ktorýkoľvek z nich odovzdá na Nábojovú úlohu číslo n nesprávny výsledok, musí urobiť $10n$ klikov. Náboj má 42 úloh. Marek riešil iba úlohy s poradovým číslom deliteľným piatimi a Lukáš zas iba úlohy, ktorých poradové číslo dáva zvyšok 1 po delení piatimi. Ak viete, že

- každý z nich aspoň raz odovzdal nesprávny výsledok,
- žiadna úloha nebola nesprávne zodpovedaná viac ako raz,
- Marek urobil rovnako veľa klikov ako Lukáš,

koľko najmenej klikov mohol urobiť Marek?

Výsledok. 550

Riešenie. Keďže Marek rieši iba úlohy s poradovým číslom deliteľným piatimi, počet klikov, ktoré urobil, je deliteľný 50. Preto aj počet klikov, ktoré urobil Lukáš, musí byť deliteľný 50. A z dôvodu, že Lukáš rieši iba úlohy, ktorých poradové číslo dáva zvyšok 1 po delení piatimi, musel odovzdať aspoň 5 nesprávnych výsledkov (inak by nedosiahol počet klikov deliteľný 50).

Ak by Lukáš odovzdal nesprávne výsledky pri úlohách 1, 6, 11, 16 a 21 a Marek pri úlohách 10, 20 a 25, obaja by urobili 550 klikov. Keďže 1, 6, 11, 16, 21 je pätica úloh riešených Lukášom s najmenším možným súčtom poradových čísel, 550 je hľadaný výsledok.

Úloha 11. V skupine deviatich priateľov si niektorí navzájom dlžia peniaze. Jedného dňa sa rozhodli zbaviť svojich podlžností. Tabuľka ukazuje dlžoby medzi jednotlivými priateľmi, teda **A**dam dlží 5 **B**etke. Ak platba znamená, že niekto dá nejaké množstvo peňazí inej osobe, určte najmenší možný počet platieb potrebný na urovnanie všetkých dlhov.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A	0	−5	−1	0	3	3	5	2	4
B	5	0	3	−5	1	0	2	7	−4
C	1	−3	0	−5	2	3	6	−3	0
D	0	5	5	0	−8	−4	7	2	1
E	−3	−1	−2	8	0	4	−11	4	−7
F	−3	0	−3	4	−4	0	6	−4	0
G	−5	−2	−6	−7	11	−6	0	−1	5
H	−2	−7	3	−2	−4	4	1	0	4
I	−4	4	0	−1	7	0	−5	−4	0

Výsledok. 6

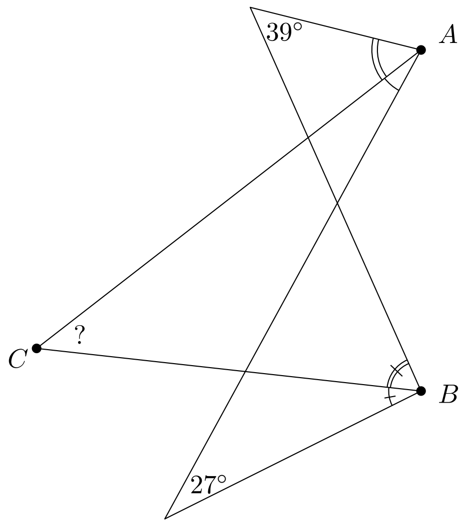
Riešenie. Sčítaním každého riadku dostaneme dlh daného priateľa. Sú to postupne $+11, +9, +1, +8, -8, -4, -11, -3, -3$. Keďže piati z nich majú záporný balans, musí prebehnúť aspoň 5 platieb. Zároveň niekto musí zaplatiť **C**, ktorý má dostať iba 1. Nik však nemá taký malý dlh, a teda musí prebehnúť aspoň o jednu transakciu viac. Zo súčtov v riadkoch je už jasné, ako majú platby prebehnúť, a že ich naozaj stačí $5 + 1 = 6$.

Úloha 12. David a Baška na prechádzke našli 35 orechov. Rozdelili ich do niekoľko (viac ako jednej) kôpok, pričom každá obsahovala aspoň dva orechy. Potom zobrali jeden orech z každej kôpky a položili ho na prvú kôpku. Teraz majú všetky kôpky rovnaký počet orechov. Koľko orechov bolo pôvodne na druhej kôpke?

Výsledok. 8

Riešenie. Kladní delitelia 35 sú iba 1, 5, 7, 35. Keďže každá kôpka má na konci rovnaký počet orechov, tak jeden z deliteľov musí byť počet kôpok. Zo zadania môžeme vylúčiť 1 a 35 ako počty kôpok. Ak by sme mali 7 kôpok, museli by na nich byť na začiatku nasledovné počty orechov: $-1, 6, 6, 6, 6, 6, 6$, čo očividne nefunguje. Ostáva nám teda možnosť piatich kôpok, čo ľahko overíme, že sedí – 3, 8, 8, 8, 8.

Úloha 13. Na nasledujúcom obrázku máme zadané dva uhly. Navyše vieme, že veľkosť označených uhlov pri vrchole A je v pomere $2 : 1$, a to isté platí pre vrchol B (pričom väčší z uhlov je vždy označený dvoma čiarkami). Určte veľkosť uhla ACB v stupňoch.



Výsledok. 31

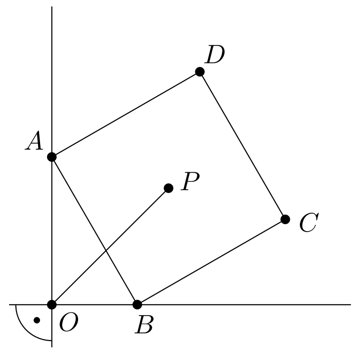
Riešenie. Na začiatok si označme menší uhol pri A ako α a menší pri B ako β. Pomocou rovnosti vrcholových uhlov a faktu, že súčet uhlov každého trojuholníka je $180°$, dostávame rovnicu $39° + 3\alpha = 27° + 3\beta$. Z nej si vieme vyjadriť rozdiel $\beta - \alpha = \frac{39°-27°}{3} = 4°$. Rovnakým princípom (vrcholové uhly a súčet uhlov v trojuholníku) sa vieme dostať aj k rovnici $? + \alpha = 27° + \beta$. Z nej si vyjadríme ? a dosadíme rozdiel, ktorý sme vypočítali z predošlej rovnice $? = 27° + \beta - \alpha = 27° + 4° = 31°$.

Úloha 14. Pre koľko celých čísel a má funkcia $f(x) = 9x^2 + ax - 2022$ definovaná pre všetky reálne čísla x práve 2022 rôznych záporných celočíselných hodnôt?

Výsledok. 11

Riešenie. Prepísanie zadania do tvaru $f(x) = (3x + \frac{a}{6})^2 - \frac{a^2}{36} - 2022$ ukazuje, že f nadobúda všetky reálne hodnoty väčšie alebo rovné ako $-\frac{a^2}{36} - 2022$. Daná podmienka potom znamená, že $-2023 < -\frac{a^2}{36} - 2022 \leq -2022$, čo je ekvivalentné s $\frac{a^2}{36} < 1$, a preto $a^2 < 36$. To platí pre $a \in \{-5, -4, \ldots, 4, 5\}$ a preto je výsledok 11.

Úloha 15. V pravom uhle AOB je vpísaný štvorec $ABCD$ so stredom v bode P. Ak $|AO| = 6$ a $|OP| = 4\sqrt{2}$, určte súčin vzdialeností bodu D od priamok AO a OB.



Výsledok. 48

Riešenie. Nakreslime si kolmice s pätami F a E postupne na úsečky AO a OB tak, že obe budú prechádzať cez bod P. Potom budú trojuholníky PFA, PEB zhodné. Tým pádom $|PF| = |PE|$. Navyše $PFOE$ je štvorec a $|OE| = |OF| = \frac{|OP|}{\sqrt{2}} = 4$. Teda $|BE| = |AF| = |OA| - 4 = 2$ a $|OB| = |OE| - |BE| = 4 - 2 = 2$. Ak si ďalej nakreslíme kolmicu s pätou G na úsečku AO prechádzajúcu bodom D, trojuholníky DGA, AOB sú zhodné a $|DG| = |OA| = 6, |AG| = |OB| = 2$. Takže $x_D = 6, y_D = 8$. Z toho vyplýva, že súčin je 48

Úloha 16. V Nábojove je len jedna linka metra, ktorá má tvar kružnice a nachádza sa na nej 2022 staníc očíslovaných postupne 1, 2, …, 2022, pričom vzdialenosť medzi každými dvoma susediacimi stanicami je rovnaká. Peťo si kúpil týždenný lístok na metro, a rozhodol sa, že po celý tento čas z neho nevystúpi. Na stanici 1 nasadol do metra, ktoré išlo v smere rastu čísel označujúcich jednotlivé stanice (jeho ďalšia stanica teda bola 2). Na stene jednej zo staníc uvidel zaujímavú úlohu, tak sa pustil do jej riešenia. To mu trvalo štyrikrát dlhšie ako trvala celá cesta doteraz. Keď úlohu vyriešil, metro akurát zastavovalo na stanici 2022. Akým číslom bola označená stanica, na ktorej Peťo našiel úlohu?

Výsledok. 1214

Riešenie. Nech je x stanica, na ktorej Peťo uvidel úlohu. Vzdialenosť medzi 1 (Peťov štart) po x je $x-1$. Celková vzdialenosť, ktorú Peťo prešiel, kým úlohu vyriešil, je $5\cdot(x-1)$. Začal teda na stanici 1, prešiel $5\cdot(x-1)$ a skončil na stanici $1+5\cdot(x-1)\equiv 2022 \pmod{2022}$. Takže hľadáme také x, že

$$\begin{aligned}1+5\cdot(x-1)&\equiv 2022 \pmod{2022},\\ 5\cdot(x-1)&\equiv -1 \pmod{2022},\\ 5x&\equiv 4 \pmod{2022}.\end{aligned}$$

Vydelením 2022/5 uvidíme, že zvyšok je 2. To znamená, že $5\cdot 404 = 2020$ a

$$5\cdot 404 \equiv -2 \pmod{2022}.$$

Vynásobíme obe strany 3:

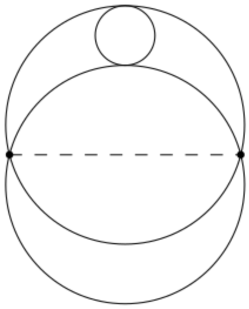
$$5\cdot 1212 \equiv -6 \pmod{2022}.$$

Pričítame 10:

$$5\cdot 1214 \equiv 4 \pmod{2022}.$$

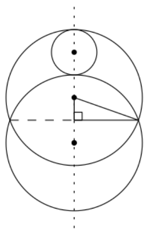
Teda Peťo úlohu uvidel na stanici 1214.

Úloha 17. Marek si nakreslil obrázok troch kružníc. Malá kružnica má polomer 1 a dotýka sa oboch veľkých kružníc, ktoré sú rovnako veľké. Navyše jeden zo stredov veľkých kružníc leží v strede úsečky medzi zvyšnými dvoma stredmi. Určte veľkosť spoločnej (čiarkovanej) tetivy.



Výsledok. $4\sqrt{2} \doteq 5.656854$

Riešenie. Podmienka o strede jednej z veľkých kružníc nám hovorí, že všetky stredy kružníc ležia na kolmici prerušovanej tetivy. Ďalej je ľahké uvidieť, že ten v strede úsečky medzi zvyšnými dvoma je stred hornej veľkej kružnice. Vzdialenosť medzi stredmi veľkých zhodných kružníc vieme vypočítať, ako vzdialenosť ich najvyšších bodov, ktorá je rovnaká, ako priemer malej kružnice, teda 2.



Označme polomery väčších kružníc R, potom túto vzdialenosť môžeme vyjadriť aj ako $R-1$. Teda $R-1=2$, z čoho vyplýva $R=3$. Teraz sa pozrime na pravouhlý trojuholník s vrcholmi: stred strednej kružnice, v stred prerušovanej úsečky a priesečník väčších kružníc. Pomocou Pytagorovej vety určíme dĺžku prerušovanej tetivy $2\sqrt{3^2-1^2}=4\sqrt{2}$.

Úloha 18. V rade stojí 2022 smädných drakov. Prvý má 1 liter mlieka, druhý 2 litre, a tak ďalej až 2022-hý drak má 2022 litrov mlieka. Prvý drak preleje polovicu svojho mlieka a pol litra navyše druhému drakovi. Druhý potom preleje polovicu svojho mlieka a pol litra navyše tretiemu drakovi. Takto to pokračuje, až kým 2021-vý drak preleje polovicu svojho mlieka a pol litra navyše 2022-hému drakovi. Koľko mlieka bude mať 2022-hý drak na konci tohto procesu?

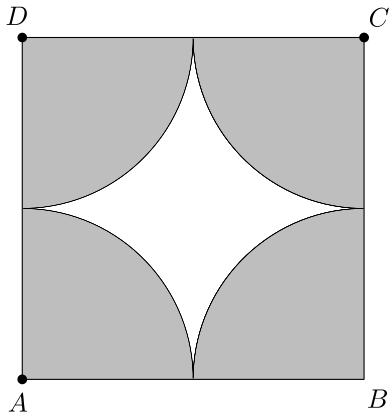
Výsledok. 4043

Riešenie. Predpokladajme, že pred n-tým preliatím v poradí má n-tý drak $2n-1$ litrov mlieka. Po preliatí bude mať $n+1$-vý drak $n+1+\frac{2n-1}{2}+\frac{1}{2}=2n+1=2(n+1)-1$ litrov. Indukciou získame, že pre každé $k\geq n$, k-ty drak bude mať po preliatí $2k-1$ litrov mlieka. Pretože prvý drak má na začiatku skutočne $1=2\cdot 1-1$ litrov mlieka, posledný drak bude mať na konci $2\cdot 2022-1=4043$ litrov.

Úloha 19. Bod X leží náhodne vo štvorci $ABCD$ so stranou dĺžky 2. Aká je pravdepodobnosť, že úsečky AX, BX, CX, a DX sú všetky dlhšie ako 1?

Výsledok. $1 - \frac{\pi}{4} \doteq 0.214602$

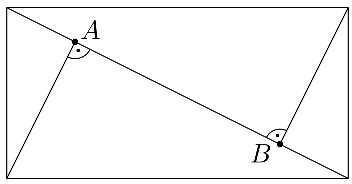
Riešenie. Nech S_T označuje obsah útvaru T. Body X spĺňajúce všetky nerovnosti sú znázornené na obrázku nižšie.



Pravdepodobnosť vypočítame ako podiel $\frac{S_R}{S_{ABCD}}$, pričom očividne $S_{ABCD} = 4$. Ďalej

$$S_R = S_{ABCD} - 4S_S = 4 - 4 \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = 4 - \pi \quad \Rightarrow \quad \frac{S_R}{S_{ABCD}} = \frac{4-\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Úloha 20. Pomer medzi stranami obdĺžnika je $2:1$ a $|AB| = 1$. Aký je obsah obdĺžnika?



Výsledok. $10/9 \doteq 1.111111$

Riešenie. Diagonála na obrázku rozdeľuje obdĺžnik na 2 pravouhlé trojuholníky. Označme dĺžku ich prepony $1 + 2b$ a výšky na ňu a. Z obrázka vidno, že výška rozdeľuje trojuholníky na dva podobné pravouhlé trojuholníky s odvesnami a a b, a s odvesnami $1 + b$ a a. Keďže tieto trojuholníky sú podobné a pomer ich prepôn je $2:1$, vieme, že $2 \cdot b = a$ a $2 \cdot a = 1 + b$. Z toho vieme vyjadriť $a = \frac{2}{3}$ a $b = \frac{1}{3}$. Obsah sa teda rovná dĺžke prepony vynásobenej a. Preto $(1 + 2b) \cdot a = (1 + \frac{2}{3}) \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{9}$

Úloha 21. Každý z piatich trpaslíkov nosí čiapku rôznej farby. Dvaja trpaslíci si vymenili čiapky, potom znovu nejakí dvaja trpaslíci si vymenili čiapky a nakoniec znovu si nejakí dvaja trpaslíci vymenili čiapky. Ak na konci žiaden trpaslík nemá tú istú čiapku, čo na začiatku, tak koľkými možnými spôsobmi si mohli trpaslíci povymieňať čiapky?

Výsledok. 180

Riešenie. Ukážeme dve riešenia, jedno používajúce cykly a jedno nepoužívajúce cykly.

Výsledná permutácia musí pozostávať z cyklov dĺžok 2 a 3. Takých permutácií je $\binom{5}{2} \cdot 2$ (vyberieme cyklus dĺžky 2 a potom orientáciu cyklu dĺžky 3). Cyklus dĺžky 3 môžeme rozložiť na dva cykly dĺžky 2 troma (orientovanými) spôsobmi. Nakoniec máme tri možnosti ako dostaneme nezávislý cyklus dĺžky 2, teda dokopy $20 \cdot 3 \cdot 3 = 180$.

Bez použitia cyklov. Vyberiem prvú zámenu $\binom{5}{2} = 10$ spôsobmi. Potom máme dve možnosti, ako môžeme spraviť druhú zámenu: buď druhá výmena neobsahuje trpaslíka z prvej (1) alebo nie (2). V prípade (1), máme $\binom{3}{2} = 3$, možností ako vybrať druhú výmenu a 4 pre poslednú výmenu. Kým možnosť (2) obsahuje $2 \cdot 3 = 6$ možností ako spraviť druhú výmenu a posledná výmena bude jednoznačne určená. Preto tiež máme $10 \cdot (3 \cdot 4 + 6) = 180$ možností, ako si trpaslíci mohli meniť čiapky.

Úloha 22. Tomáš napísal na tabuľu všetky rímske čísla od $I, II, III, IV, \ldots$ po z, každé do nového riadku. Potom prišiel Žaneta a všimol si, že na tabuli sú dvojice bezprostredne po sebe idúcich znakov IV, IX, XL, XC, CD, a CM zastúpené v rovnakom počte. Aké je najmenšie možné $z \geq IV$, pre ktoré je to možné? (Zadajte číslo v desiatkovom arabskom zápise, nie v rímskych číslach.)

Výsledok. 999

Riešenie. Počet znakov IV je počet číslic 4 na poslednom mieste čísel od 1 po z. Podobne IX je počet číslic 9. Počet XL je množstvo číslic 4 na predposlednej pozícii. Rovnako XC je 9 na predposlednej pozícii, CD je 4 na treťom mieste od konca a CM je 9 na tretej pozícii od konca.

Uvedomme si, že od 01 po 99 je rovnako veľa číslic 4 na poslednom mieste ako na prvom. Vidno to napríklad z toho, že ide o všetky možné kombinácie prvého čísla od 0 po 9 a druhého podobne. Tým pádom 999 má všetky kombinácie, ako vybrať z čísel od 1 po 9 na prvú, druhú aj tretiu pozíciu. Musí mať rovnako veľa 4 a 9 na každej z pozícií.

Aby sme dokázali, že 999 ja najmenšie možné číslo, stačí, aby sme porovnali 9 na prvej pozícii s 9 na poslednej pozícii. Počet 9 na poslednej pozícii sa zvyšuje s každou desiatkou o jedna. Ale počet 9 na prvej pozícii je stále 0, až kým Tomáš nenapísal číslo 900 a potom sa zvyšovalo o 1 s každým ďalším číslom. Vieme, že tieto hodnoty sa vyrovnajú na 999, a preto to nemôže byť žiadne menšie číslo. Podobne 4 na poslednej pozícii, čím je dôkaz hotový.

Úloha 23. V triede je 50 študentov. Niektorí chodia na matematický krúžok, niektorí chodia na fyzikálny krúžok (študent môže nechodiť na žiaden krúžok alebo môže chodiť na jeden alebo aj na oba). Počet študentov, ktorí nechodia na žiaden krúžok je dvojnásobok počtu tých, čo chodia na fyzikálny krúžok. Navyše vieme, že počet tých, ktorí chodia iba na matematický krúžok je o pätnásť väčší ako počet tých, ktorí chodia na oba krúžky. Nájdite všetky možné hodnoty počtu študentov, ktorí nechodia na matematický krúžok a zadajte ich súčin.

Výsledok. 14725

Riešenie. Označme m počet študentov, ktorí chodia len na matematický krúžok, f počet študentov, ktorí chodia len na fyzikálny krúžok, b tých, ktorý navštevujú oba a n tých, ktorý nenavštevujú žiaden. Dostávame teda sústavu rovníc

$$\begin{aligned} m+f+b+n &= 50, \\ n &= 2\cdot(f+b), \\ m &= b+15. \end{aligned}$$

Z nej si vieme vyjadriť $f=\frac{1}{3}(95-4m)$, $n=\frac{2}{3}(50-m)$, $b=m-15$. Aby sme mali iba nezáporné počty študentov, $m\in\{17,20,23\}$, z čoho plynie $f+n\in\{9+22=31,\ 5+20=25,\ 1+18=19\}$. Súčin je teda $31\cdot25\cdot19=14725$.

Úloha 24. Body A, B, C, D ležia na kružnici s polomerom 1 a stredom M. Úsečky AB a CD sú navzájom kolmé. Kružnica s priemerom AB sa dotýka kružnice s priemerom CD v bode P a obe kružnice majú rovnakú veľkosť. Určte veľkosť úsečky MP.

Výsledok. $1/\sqrt{3}\doteq 0.577350$

Riešenie. Urobme si nákres tak, aby: $\overline{AB}$ bola rovnobežná s y-ovou osou, $\overline{CD}$ rovnobežná s x-ovou osou a $M=(0,0)$ (použijeme klasický karteziánsky súradnicový systém). Teraz sú body A, B, C, D symetrické podľa osí, teda $A=(x,-y),\ B=(x,y),\ C=(y,x),\ D=(-y,x)$. Bez ujmy na všeobecnosti $x>0,\ y>0$. Keďže polomer je rovný jednej, tak $x^2+y^2=1$.

Každá kružnica sa dotýka dvoch z A, B, C, D, kružnica M_{AB} sa dotýka A a B, a kružnica M_{CD} sa dotýka C a D. Uvažujme nasledovné body

$$M=(0,0),\ M_{AB}=(x,0),\ M_{CD}=(0,x),$$

ktoré tvoria pravouhlý trojuholník so stranami dĺžok x,x a $2y$ (pretože obe dotýkajúce sa kružnice majú polomer y). Z Pytagorovej vety potom $x^2+x^2=(2y)^2$, z čoho úpravou a dosadením do predošlej kvadratickej rovnice dostaneme $y=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Keďže P leží uprostred prepony, tak $|\overline{MP}|=y=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Úloha 25. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel taká, že

$$a_{n+1}^2+a_n^2=a_{n+1}+a_n+24$$

platí pre každé $n\in\mathbb{N}$. Nájdite najväčšiu možnú hodnotu výrazu a_1+a_{2022}.

Výsledok. 8

Riešenie. Všimnime si, že $a_{x+2}^2-a_{x+2}=a_x^2-a_x$. Preto pre každé kladné celé číslo n:

$$a_{x+2n}^2-a_{x+2n}=a_x^2-a_x.$$

Z toho vieme, že

$$a_{2+2\cdot1010}^2-a_{2+2\cdot1010}=a_2^2-a_2.$$

Potom

$$a_2^2-a_2+a_1^2-a_1=24,$$

a preto

$$a_{2022}^2 - a_{2022} + a_1^2 - a_1 = 24.$$

Nech $a = a_{2022} + a_1$ a AG nerovnosť $a = a_1 + a_{2022} \geq 2 \cdot \sqrt{a_1 \cdot a_{2022}}$, potom vieme, že $a^2 = a_{2022}^2 + a_1^2 + 2 \cdot a_1 \cdot a_{2022}$, a teda $a_{2022}^2 + a_1^2 \geq \frac{a^2}{2}$. Preto,

$$24 \geq \frac{a^2}{2} - a.$$

Preto, $a \leq 8$. Taká postupnosť skutočne existuje a je ňou $a_n = 4$, pre kladné celé čísla n spĺňa podmienky zo zadania.

Úloha 26. Viac ako 39 %, ale menej ako 40 % členov matematického klubu sú chlapci. Ak sa jedno dievča rozhodne opustiť klub, tak podiel chlapcov bude stále pod 40 %, ale ak príde nový chlapec, tak podiel chlapcov bude aspoň 40 %. Aký je najmenší možný počet členov matematického klubu?

Výsledok. 64

Riešenie. Označme n celkový počet členov a a počet chlapcov. Dostaneme nasledovné nerovnosti:

$$\begin{aligned} \tfrac{a}{n} &> 0.39 \\ \tfrac{a}{n-1} &< 0.4 \\ \tfrac{a+1}{n+1} &\geq 0.4. \end{aligned}$$

Upravením druhej a prenásobením tretej piatimi dostaneme

$$2n - 2 > 5a \geq 2n - 3,$$

a keďže $5a$ je celé číslo a $2n-2$, $2n-3$ sú po sebe idúce celé čísla, tak $5a = 2n - 3$. Dosadením do prvej nerovnice dostaneme riešenie pre n, a to $n > 60$. Potrebujeme ešte dostať celočíselný počet chlapcov, ktorý je v tvare $a = \frac{1}{5}(2n-3)$, a n musí byť tým pádom aspoň 64.

Úloha 27. Našli sme tri kvadratické funkcie s nasledujúcimi vlastnosťami: f_1 ma spoločný koreň s f_2 a s f_3, funkcia f_2 ma spoločný koreň s f_3, ale f_1, f_2, f_3 nemajú spoločný koreň. Navyše sme zistili, že majú nasledovný tvar:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2 - bx + 1980, \\ f_2(x) &= x^2 - (b+1)x + 2024, \\ f_3(x) &= x^2 - (b+2)x + a, \end{aligned}$$

kde a, b sú pevne dané reálne čísla. Nájdite hodnotu a.

Výsledok. 2070

Riešenie. Označme $k_1,\ k_2,\ k_3$ spoločné korene. Funkcie potom majú (v nejakom poradí) nasledovný tvar:

$$\begin{aligned} (x-k_1)(x-k_2) &= x^2 - (k_1+k_2)x + k_1 \cdot k_2, \\ (x-k_1)(x-k_3) &= x^2 - (k_1+k_3)x + k_1 \cdot k_3, \\ (x-k_3)(x-k_2) &= x^2 - (k_3+k_2)x + k_3 \cdot k_2. \end{aligned}$$

Bez ujmy na všeobecnosti, nech $b = k_1 + k_2$ a $b + 1 = k_1 + k_3$, potom $b + 2 = k_2 + k_3$. Môžeme teda vyriešiť túto sústavu rovníc a dostaneme: $k_1 = \frac{b-1}{2}$, $k_2 = \frac{b+1}{2}$ a $k_3 = \frac{b+3}{2}$. Keďže $1980 = k_1 \cdot k_2 = \frac{(b-1)(b+1)}{4}$, vieme dorátať $k_1 = 44,\ k_2 = 45,\ k_3 = 46$ a konečne $a = 45 \cdot 46 = 2070$.

Úloha 28. Turnaja v zjazdovom lyžovaní sa zúčastnilo šesť vedúcich - Aňa, Baška, CD, David, Emma a Fánka. V každej hre hrajú dvaja vedúci proti dvom iným vedúcim. Každá dvojica hrala proti každej inej dvojici práve raz. Aňa vyhrala 30 zápasov, David vyhral 12 zápasov a Fánka vyhrala 18 zápasov. Koľko zápasov vyhrala Baška?

Výsledok. 10

Riešenie. Každý vedúci hral 30 hier, pretože pre každého z 5 možných spoluhráčov existuje $\binom{4}{2} = 6$ rôznych dvojíc protihráčov. Vieme teda, že Aňa vyhrala všetky hry. Každí dvaja hráči spolu hrajú 6 hier a proti sebe hrajú 12 krát (pre prvého máme totiž 4 možnosti na spoluhráča, pre druhého 3). Keďže Fánka vyhrala 18 hier a proti Ani hrala 12 krát (kde prehrala), vyhrala všetky hry, ktoré nehrala proti Ani. David vyhral 12 hier. Z toho 6 s Aňou a 3 s Fánkou (David a Fánka hrali proti Ani trikrát a prehrali). Zostávajúce 3 víťazstvá teda boli v hrách bez Ani alebo Fánky. Práve tri hry hral bez Ani alebo Fánky, v každej z nich bol David v dvojici s jedným zo zvyšných vedúcich a hral proti ostatným dvom. David teda vyhral každú z hier bez Ani alebo Fánky. Z toho vyplýva, že Baška, CD a Emma vyhrali rovnaký počet hier: 6 s Aňou, 3 s Fánkou, 1 s Davidom. Baška vyhrala $6 + 3 + 1 = 10$ hier.

Iné riešenie: Ak sčítame všetky hry každého hráča, $30 \cdot 6 = 180$. Každú hru sme započítali štyrikrát (raz za každého hráča). Hralo sa dokopy $180/4 = 45$ hier. Keďže úloha viac nerozlišuje medzi Baškou, CD a Emmou, všetci museli vyhrať rovnako veľa hier. Každá výhra sa započítala dvakrát (raz pre každého víťaza v dvojici) a teda $2 \cdot 45 = 30 + 18 + 12 + 3 \cdot \textit{Baška}$ čo nám dá výsledok $\textit{Baška} = 10$.

Úloha 29. Uvažujme pravouhlý trojuholník so stranami dĺžok $3, 4, 5$. Tento trojuholník vieme rozdeliť pozdĺž jeho výšky na preponu na dva menšie podobné trojuholníky. Tento proces môžeme opakovať, pričom v každom kroku zdvojnásobíme počet trojuholníkov. Vypočítajte priemerný obvod trojuholníkov po piatich deleniach.

Výsledok. $\frac{50421}{25000} = 2.01684$

Riešenie. Najskôr vypočítajme súčet obvodov. Každým rozdelení trojuholníka T vzniknú dva nové, jemu podobné trojuholníky T_1 a T_2, s koeficientami podobnosti $\frac{3}{5}$ a $\frac{4}{5}$. Z toho plynie, že súčet obvodov T_1 a T_2 bude $\frac{7}{5}$ krát väčší než obvod T. Keďže každým rozdeleným sa celkový obvod koeficientom $\frac{7}{5}$, tak po piatich deleniach dostaneme $(3+4+5) \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^5$. Už nám ostáva to len vydeliť počtom všetkých trojuholníkov a dostávame

$$12 \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^5 \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{50421}{25000}.$$

Úloha 30. Lucy sa rozhodla vyliezť na stenu pozostávajúcu z 10 úchytov označených $1, \ldots, 10$ od najnižšieho po najvyšší. Lucy sa rozhodla vyliezť použijúc iba jednu ruku a jednu nohu. Začala s rukou na úchyte 3 a nohou na úchyte 1. V jednom kroku vie posunúť svoju nohu alebo ruku o niekoľko miest vyššie, ale rukou nedosiahne na nič vyššie ako úchyt s číslom o tri väčším ako má na nohe. Taktiež, noha musí byť na čísle menšom ako ruka. Lezecká stena je považovaná za zdolanú, keď sa ruka dostane na úchyt číslo 10. Koľkými možnými spôsobmi vie Lucy zdolať túto stenu?

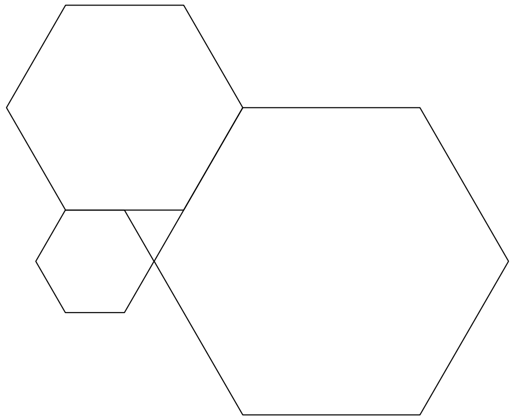
Výsledok. 1458

Riešenie. Pozície, ktoré Lucy môže dosiahnuť si môžeme znázorniť v tabuľke a vypísať do nej, koľkými spôsobmi sa na túto pozíciu môže dostať.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	1	1							
4	1	2	3						
5		3	6	9					
6			9	18	27				
7				27	54	81			
8					81	162	243		
9						243	486	729	
10							729	729	0

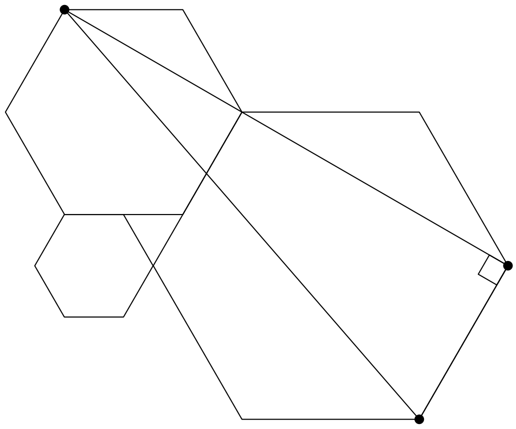
Číslo riadku označuje pozíciu ruky a číslo stĺpca pozíciu nohy. Máme jednu možnosť ako začať (1,3), ako je vidíme vyznačené sivou. Počet možností každej pozície určíme súčtom pozícií, z ktorých sa na ňu vieme dostať - čiže sčítame čísla nad a naľavo od vybraného políčka. Týmto spôsobom dokážeme postupne vyplniť celú tabuľku. Na záver potrebujeme sčítať všetky možnosti v desiatom riadku (keďže v ňom Lucy zdolá stenu) $729 + 729 = 1458$.

Úloha 31. Malý šesťuholník má dĺžku strany 1. Aký je obsah najmenšieho kruhu pokrývajúceho všetky tri šesťuholníky?



Výsledok. $21\pi \doteq 65.973446$

Riešenie. Rovnostranný trojuholník má stranu 1, čiže väčšie šesťuholníky budú mať strany dĺžok 2 a 3. Priemer kruhu musí byť aspoň taký, aká je dĺžka diagonály idúcej cez šesťuholníky. Očividne najdlhšia diagonála vedia z A do B.



Jej dĺžku môžeme vyjadriť pomocou vyznačeného trojuholníka. Jeho kratšia strana má dĺžku 3 a dlhšia $\sqrt{3}\cdot(2+3) = 5\sqrt{3}$. Pomocou Pytagorovej vety môžeme dopočítať $|AB|^2 = 3^2 + (5\sqrt{3})^2 = 9 + 25\cdot 3 = 84$. Ostáva už len dorátať obsah $\frac{|AB|^2}{4}\pi = \frac{84}{4}\pi = 21\pi$, pričom z Tálesovej vety zároveň vidíme, že kruh skutočne pokrýva celý útvar.

Úloha 32. Lukáš a Teri hrajú hru na šachovnici rozmerov 42×42. Najprv Lukáš položí na šachovnicu $x \geq 8$ jazdcov (na každé políčko najviac jedného). Potom si Teri vyberie osem z týchto jazdcov. Nakoniec Lukáš odstráni nezvolených jazdcov zo šachovnice. Teri vyhrá, ak sa žiadni dvaja jazdci zostávajúci na šachovnici navzájom neohrozujú. Určte najmenšie možné číslo x, pre ktoré vie Teri vyhrať bez ohľadu na Lukášovo počiatočné rozmiestnenie x jazdcov.

Výsledok. 15

Riešenie. Uvažujme klasickú šachovnicu s čiernobielym ofarbením. Jazdec môže ohrozovať iba políčka opačnej farby, než je tá, na ktorej stojí. Teda podľa Dirichletovho pricípu, ak $x = 2\cdot 7 + 1 = 15$, medzi každými 15 jazdcami je určite aspoň 8 jazdcov na políčkach rovnakej farby a vzájomne sa neohrozujú. Teri vie určite vyhrať pre $x = 15$.

Teraz ukážeme, že Teri nemôže vyhrať ak $x \leq 14$. Označme (r, c) políčko v r-tom riadku a c-tom stĺpci. Uvažujme týchto 7 dvojíc políčok:

$$\begin{aligned}
P_1&: (1,1),\ (3,2),\\
P_2&: (1,2),\ (3,3),\\
P_3&: (1,3),\ (3,4),\\
P_4&: (1,4),\ (3,5),\\
P_5&: (1,5),\ (3,6),\\
P_6&: (1,6),\ (3,7),\\
P_7&: (1,7),\ (3,8),
\end{aligned}$$

Lukáš umiestni $x \leq 14$ jazdcov na ľubovolné z týchto 14 políčok. Ak Teri vyberie ľubovolných 8 z nich, podľa Dirichletovho princípu budú určite aspoň dvaja z vybratých patriť jednej dvojici. Uvedomme si, že títo dvaja sa budú ohrozovať kvôli tomu, ako sme vybrali 7 dvojíc.

Teda najmenšie číslo, pri ktorom vie Teri určite vyhrať, je 15.

Úloha 33. Rieka je kilometer široká. Robo potrebuje 27 minút aby prepádloval vo svojej loďke kilometer po prúde a 36 minút aby prepádloval kolmo na druhý breh vzdialený jeden kilometer. Ako dlho potrebuje pádlovať aby prepádloval kilometer proti prúdu?

Výsledok. 48

Riešenie. Predpokladajme, že Robo vie sám prepádlovať x kilometrov za minútu (v stojacej vode) a rýchlosť prúdu je y kilometrov za minútu. Teda čas potrebný na presun jeden kilometer po prúde je $\frac{1}{x+y}$ minút.

Ďalej potrebujeme spočítať čas, za ktorý k opačnému brehu vzdialenému jeden kilometer. Aby sa tam dostal čo najrýchlejšie, bude musieť mieriť z kilometrov hore prúdom, pričom ho rieka odnesie z kilometrov po prúde. Z Pytagorovej vety bude dĺžka jeho trasy $\sqrt{1+z^2}$; keďže túto vzdialenosť bude prekonávať, kým ho bude rieka unášať po prúde, objaví sa nám pomer $\sqrt{1+z^2} : z = x : y$, takže $y^2(1+z)^2 = x^2z^2$, $y^2 = z^2(x^2-y^2)$ a nakoniec $z^2 = \frac{y^2}{x^2-y^2}$. To znamená, že vzdialenosť, ktorú musí prekonať (akoby v stojacej vode) je $\sqrt{1+z^2} = \sqrt{\frac{(x^2-y^2)+y^2}{x^2-y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$, čo zvládne za $\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$ minút. Popri tom je rýchlosť pádlovania proti prúdu $x-y$ kilometrov za minútu, takže prejsť kilometer týmto smerom Robovi potrvá $\frac{1}{x-y}$.

Dostávame teda $(\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}})^2 : \frac{1}{x+y} = \frac{x+y}{x^2-y^2} = \frac{1}{x-y}$. Keďže už vieme, že $\frac{1}{x+y} = 27$ a $\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}} = 36$, konečne môžeme dorátať $\frac{1}{x-y} = 36^2 : 27 = 48$.

Úloha 34. Dvojčatá Maťko a Kubko behajú na kruhovej bežeckej dráhe. Začínajú na tom istom mieste, označenom štart a bežia v rovnakom smere, každý svojou konštantnou rýchlosťou. Tréning končí vtedy keď začiatočník Kubko odbehne jedno kolečko. Maťko je už skúsený bežec a beží šesť-krát rýchlejšie ako Kubko.

Dvojičky sú identické a nevieme ich rozoznať. Ak sa pozrieme na fotku štadióna počas tréningu, je zvyčajne možné ich rozoznať (používajúc len informácie v prvom odstavci a fotku). Koľko krát počas tréningu vieme spraviť fotku, že dvojčatá na nej nevedno rozoznať? (Nerátajúc začiatok ani koniec ich tréningu.)

Výsledok. 34

Riešenie. Nech $s \in (0,1)$ označuje pozíciu Kubka na okruhu. Pozícia Maťka je vypočítaná ako $6s \pmod 1$, kde $x \pmod 1 = x - \lfloor x \rfloor$ (myslíme tým iba desatinnú časť). Bratia sú potom na nerozoznanie, práve vtedy, keď $s = (6(6s \pmod 1)) \pmod 1$. Všimnime si, že vnútorne $\pmod 1$ nemá vplyv na výsledok a môže byť vynechané. Preto môžeme prepísať rovnicu na

$$36s \pmod 1 = s \pmod 1$$

a teda $35s$ je celé číslo. Preto $s = \frac{a}{35}$ pre $a \in \{1, 2, \ldots, 34\}$ (keďže počas tréningu $0<s<1$), z čoho plynie, že počet takých okamihov kedy bratov nemožno rozlíšiť je 34.

Úloha 35. Dokument pozostávajúci z textu bol pôvodne napísaný s nastavením 60 riadkov na stranu. Keď Dávid zmenil nastavenie na 57 riadkov na stranu, tak počet strán narástol o dve. Nájdite najmenší a najväčší možný počet strán, aké mohol mať Dávid na začiatku. Odovzdajte ich súčet.

Výsledok. 77

Riešenie. Môžeme predpokladať, že pôvodný dokument pozostáva z $k+1$ strán, z toho k určite plných. Celkový počet riadkov je potom $60k + a$, kde $1 \leq a \leq 60$. Po zmene je určite $k+2$ plných strán, takže počet riadkov je $57(k+2)+b$, kde $1 \leq b \leq 57$. Pre usporiadaním rovnice

$$60k + a = 57(k+2) + b,$$

dostaneme

$$3k = b - a + 2 \cdot 57.$$

Použijúc obmedzenia pre a a b dostaneme

$$55 \leq 3k \leq 170,$$

a keďže k je celé číslo, tak

$$19 \leq k \leq 56.$$

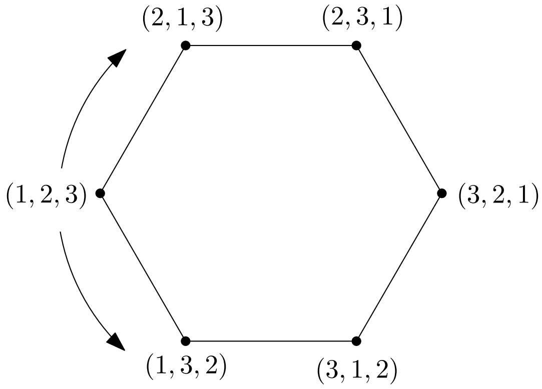
Teraz si stačí spomenúť, že počet strán je o jedna viac ako k a teda $20 + 57 = 77$.

Úloha 36. Matúš sa naučil britskému umeniu *change ringing*, ktoré pozostáva zo zvonenia na rôzne zvončeky, na každý práve raz. Jedna takáto sekvencia zvonení sa nazýva *takt* a spojením viacerých taktov vzniká *pieseň*. Platí, že v dvoch po sebe idúcich *taktoch* sa nesmie líšiť pozícia žiadneho zvončeka o viac ako jedna (ak máme tri očíslované zvončeky 1, 2 a 3, tak po *takte* $(1, 2, 3)$ môže ísť $(2, 1, 3)$, ale nemôže ísť $(2, 3, 1)$, pretože tretia pozícia sa líši o 2).

Matúš chce zahrať na troch zvončekoch *pieseň* zloženú z 21 *taktov*, začínajúcu aj končiacu $(1, 2, 3)$. Tinka mu však zakázala zahrať dva rovnaké *takty* po sebe. Koľko rôznych *piesní* môže Matúš zahrať bez toho aby porušil Tinkin zákaz?

Výsledok. 349526

Riešenie. Zadanie si môžeme graficky reprezentovať ako nasledovný šesťuholník, ktorého vrcholy predstavujú *takty* a spojené sú tie, ktoré môžu po sebe nasledovať.



Počet *piesní* vyhovujúcich Tinkinmu zákazu je potom počet rôznych ciest po šesťuholníku, ktoré začínajú a končia vo vrchole $(1, 2, 3)$, a majú dĺžku $20 = 21 - 1$.

Všimnime si, že v každej takej ceste môžeme urobiť okruh okolo celého šesťuholníka (v oboch smeroch) najviac tri-krát. Z toho plynie, že počet krokov, ktoré na ceste spravíme v smere hodinových ručičiek bude z množiny $\{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19\}$. Potom teda môžeme vypočítať počet všetkých ciest ako

$$\binom{20}{1} + \binom{20}{4} + \binom{20}{7} + \binom{20}{10} + \binom{20}{13} + \binom{20}{16} + \binom{20}{19} = 20 + 4845 + 77520 + 184756 + 77520 + 4845 + 20 = 349526.$$

Úloha 37. Mihál nemá rád útvary s prívlastkami. Má však rád útvary, ktoré majú v strede štvorec so stranou dĺžky 1 a ku každej jeho strane majú pripísaný pravidelný mnohouholník tiež so stranami dĺžok 1 (mnohouholníky môžu mať rôzne počty strán). Zároveň, každý z týchto pravidelných mnohouholníkov má spoločnú stranu so svojimi susedmi. (Mnohouholníky N, N, sú susedné ak M zdielaná hrana so štvorcom je susedná k zdielanej hrane N so štvorcom.) Aký je priemer obvodov všetkých útvarov, ktoré má Mihál rád?

Výsledok. 25

Riešenie. Mnohouholníky môžu zdielať hranu iba ak je to susedná hrana k zdielaným hranám na štvorci. Je známe, že vnútorný uhol pravidelného n-uholníka je $180\left(1 - \frac{2}{n}\right)$ stupňov. Pre každý roh štvorca, kde sa stretávajú štvorec, m-uholník a n-uholník preto platí:

$$360 = 90 + 180\left(1 - \frac{2}{n}\right) + 180\left(1 - \frac{2}{m}\right).$$

Uvažujúc n ako parameter môžeme vypočítať m. Keďže je výraz symetrický vzhľadom na m a n môžeme spočítať, že ďalší n'-uholník ktorý sa dotýka m-uholníka musí byť tiež n-uholník. Z čoho dostávame, že mnohouholníky môžu nadobúdať iba dve veľkosti v rámci jednej konfigurácie (m a n). Zjednodušením výrazu dostaneme

$$1 = \frac{4}{n} + \frac{4}{m}.$$

Ak predpokladáme, že $n = m$ tak potom riešenie je jednoducho $n = m = 8$. Toto je prvé riešenie. Ak $n \neq m$ môžeme predpokladať, že hodnoty veľkosť jedného mnohouholníka, bez ujmy na všeobecnosti, n musí byť menšia ako 8. Preto n musí byť celé číslo z množiny $\{3, 4, 5, 6, 7\}$. Vypočítaním m pre všetky hodnoty n dáva:

$$\begin{aligned} &n = 3 \to m = -12 \\ &n = 4 \to \text{nie je možné} \\ &n = 5 \to m = 20 \\ &n = 6 \to m = 12 \\ &n = 7 \to m \notin \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Odtiaľto dostávame tri rôzne riešenia. Riešenie $n = 3$, $m = -12$ je v poriadku, keďže znamienko mínus znamená, že mnohouholník je iba umiestnený v opačnej polrovine ako sme pôvodne uvažovali. Obvod každého riešenia vypočítame ako

$$p = 2 \cdot (n - 3) + 2 \cdot (m - 3).$$

Dostaneme teda obvody $\{18, 38, 24, 20\}$ a ich priemer je

$$\frac{18 + 38 + 24 + 20}{4} = \frac{100}{4} = 25.$$

Úloha 38. Majme prostú funkciu $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Nech pre kladné reálne číslo $x > 0$ platí $f(x) > -\frac{4}{x}$ a súčasne $f(f(x) + \frac{4}{x}) = 3$. Určte hodnotu $f(16)$. *Funkcia je prostá, ak $f(x) = f(y)$ platí len pre $x = y$.*

Výsledok. $\frac{15}{4} = 3.75$

Riešenie. Zjavne existuje kladné reálne a také, že $f(a) = 3$. Položme $x = a$. Potom $f(f(a) + \frac{4}{a}) = f(3 + \frac{4}{a}) = 3 = f(a)$. Keďže f je prostá, dostávame z toho

$$a = 3 + \frac{4}{a},$$

čiže $a = 4$. Ďalej ale

$$f(x) + \frac{4}{x} = 4,$$

a teda hľadaná funkcia je

$$f(x) = 4 - \frac{4}{x}.$$

Teraz už ľahko nahliadneme, že $f(16) = \frac{15}{4}$.

Úloha 39. Teri bola na túre a našla studničku. So sebou má dve fľaše: jednu s objemom 2022 ml a druhú s objemom 51 ml. V prameni si môže doplniť ľubovoľnú fľašu doplna alebo ľubovoľnú fľašu vyliať do potoka. Navyše vie prelievať vodu medzi fľašami. Pomocou týchto krokov chce dosiahnuť nasledujúcu situáciu

- vie, aký objem V vody je v jednej z fliaš,
- V je najmenšie možné na základe popísaných operácií.

Na koľko najmenej preliatí vody medzi fľašami vie dosiahnuť tento stav?

Výsledok. 121

Riešenie. Keďže $\mathrm{NSD}(2022, 51) = 3$, najmenšia dosiahnuteľná hodnota je 3. Iné čísla ako násobky 3 nevieme dostať, pretože používaním oboch krokov zjavne v každom okamihu máme v oboch fľašiach objemy, ktoré sú násobkami 3. Teraz potrebujeme nájsť konštrukciu, ktorou objem 3 dosiahneme na minimálny počet preliatí. Všimnite si, že v každom momente je niektorá z fliaš buď prázdna alebo plná. To ďalej znamená, že ak máme vo fľaši v nejakom momente x ml vody, pričom $x \notin \{0,\ 51,\ 2022\}$, tak plnenie alebo vyprázdnenie tejto fľaše nás dostane späť na začiatok. Preto je zmysluplné uvažovať len nasledovné dva postupy:

- napĺňať malú fľašu a prelievať z nej do veľkej fľaše,
- naplniť veľkú fľašu a prelievať z nej do malej fľaše.

Keďže sú tieto dva postupy symetrické, bez ujmy na všeobecnosti, sa vyberme tým prvým. Napĺňajme malú fľašu a prelievajme jej obsah do veľkej, dokým nám v nej nezostane nejaká prebytočná voda. Keďže $2022 = 40 \cdot 51 - 18$, v malej fľaši nám zostane 18 ml vody. Teraz vyprázdnime veľkú fľašu a prelejeme do nej týchto 18 ml. Opakovaním tohto procesu dostaneme v ďalšej sérii prebytok 36 ml a v tej ďalšej už žiadané 3 ml. Na to, aby sme v malej fľaške dosiahli 18 ml, sme potrebovali 40 preliatí. Tento objem sme následne na 1 preliatie preliali do veľkej fľaše. Ďalej, keďže $2022 = 18 + 40 \cdot 51 - 36$, na dosiahnutie 36 ml potrebujeme opäť 40 preliatí. Tento objem opäť na 1 preliatie prelejeme do veľkej fľaše. Nakoniec, keďže $2022 = 36 + 39 \cdot 51 - 3$, na dosiahnutie 3 ml už potrebujeme len 39 preliatí. Dokopy sme teda potrebovali $40 + 1 + 40 + 1 + 39 = 121$ preliatí.

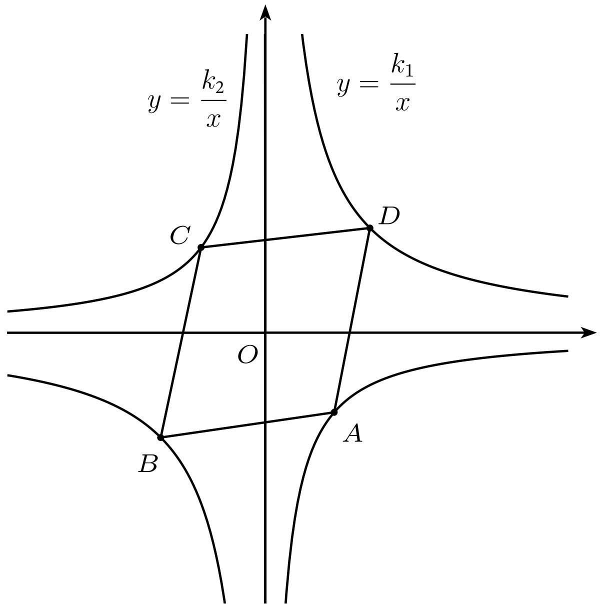
Úloha 40. Nech (a, b) sú kladné celé čísla také, že $a + b$ delí $51 \cdot \mathrm{nsn}(a, b)$. Koľko rôznych hodnôt môže nadobúdať výraz $\frac{51 \cdot \mathrm{nsn}(a,b)}{a+b}$?

Značením $\mathrm{nsn}(a, b)$ *myslíme najmenší spoločný násobok kladných celých čísel a, b.*

Výsledok. 25

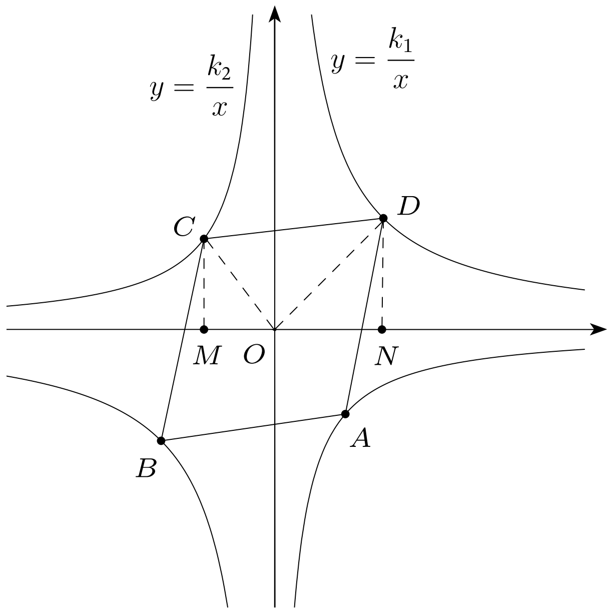
Riešenie. Nech $[NSD](a, b) = D$ a nech $a = Dx, b = Dy$ kde $[NSD](x, y) = 1$. Potom vieme, že $x + y$ musí deliť $2021xy$. Keďže $[NSD](x + y, xy) = 1$, vieme, že $x + y$ delí $51 = 3 \cdot 17$. Preto $x + y$ môže byť len $3, 17, 51$. Nech $k \in \{3, 17, 51\}$, potom $x + y = k$ a $[NSD](x, y) = 1$ dokopy dávajú, že $[NSD](x, k) = [NSD](y, k) = 1$. Teraz definujme, že $c = \frac{51 \cdot \mathrm{nsn}(a,b)}{a+b}$. Potom je zrejmé, že $c = \frac{51xy}{x+y}$. Keďže máme $\phi(k)$ možností pre (x, y), kde $\phi(k)$ je Eulerova funkcia, musíme mať $\frac{\phi(k)}{2}$ možností pre c. Potom celkový počet možností pre c je vskutku $\frac{\phi(3)+\phi(17)+\phi(51)}{2} = \frac{51-1}{2} = 25$.

Úloha 41. Nech $ABCD$ je kosoštvorec umiestnený medzi hyperbolami $y = \frac{k_1}{x}$, $y = \frac{k_2}{x}$ ako na obrázku. Ak $|\sphericalangle BCD| = 120°$, určte podiel $|\frac{k_1}{k_2}|$.



Výsledok. 3

Riešenie. Z vlastností kosoštvorca a zo symetrie vyplýva, že OC je kolmé na OD. Nech M, N sú päty kolmíc z bodov C, D na os x.



Teraz plocha trojuholníka OCM je $\frac{|CM|\cdot|OM|}{2} = |\frac{k_2}{2}|$ a plocha trojuholníka ODN je $|\frac{k_1}{2}|$. Keďže trojuholníky COM, DON sú podobné, tak pomer plôch týchto trojuholníkov je $(\frac{|OC|}{|OD|})^2 = |\frac{k_2}{k_1}|$. Keďže $|\sphericalangle BCD| = 120°$ tak potom $|\sphericalangle OCD| = 60$. Preto riešenie môžme získať z

$$\tan 60° = \frac{|DO|}{|CO|} = \sqrt{3},$$

umocnením oboch strán

$$\left(\frac{|OC|}{|OD|}\right)^2 = \left|\frac{k_1}{k_2}\right| = 3.$$

Úloha 42. Vo vrecúšku je 2022 guľôčok, každá jednej zo šiestich rôznych farieb. Ak vyberieme ľubovoľných 2000, je isté, že medzi nimi je aspoň päť rôznych farieb. Aké je najmenšie N také, že ak vyberieme ľubovoľných N guľôčok, tak budú medzi nimi aspoň štyri farby?

Výsledok. 1988

Riešenie. Označme počty guľôčok jednotlivých farieb v poradí od najmenšieho $A \leq B \leq C \leq D \leq E \leq F$, platí teda $A+B+C+D+E+F = 2022$. Zo zadania plynie $C+D+E+F < 2000$, resp. $A+B \geq 23$. Keďže $C \geq B \geq \frac{A+B}{2} \geq \frac{23}{2}$, tak $C \geq 12$ a teda $N = 2022-(23+12)+1 = 1988$ vyhovuje.

Môžeme nájsť aj konkrétne počty $(A, B, C, D, E, F) = (663, 662, 662, 12, 12, 11)$, ktoré dokazujú, že $663+662+662 = 1987$ menší počet guľôčok nestačí.

Úloha 43. Nech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkcia spĺňajúca

$$f(x) = f(137-x) = f(2202-x) = f(3028-x).$$

Koľko najviac rôznych hodnôt sa môže nachádzať medzi $f(1)$, $f(2)$, $f(3), \ldots, f(2022)$?

Výsledok. 207

Riešenie. Keďže $f(2202-x) = f(x) = f(2202-137+x) = f(2065+x)$, tak f je periodická, s periódou 2065. Podobne, $f(3028-x) = f(x) = f(3028-2202+x) = f(826+x)$ má periódu 826. Pokiaľ funkcia má dve alebo viac periód $p_1, p_2, p_3 \ldots$ tak má aj periódu $\mathrm{NSD}(p_1, p_2, p_3 \ldots)$, a teda perióda f je $\mathrm{NSD}(826, 2065) = 413$. Z $f(x) = f(137-x)$ vidíme, že funkcia je aj symetrická podľa čísel $68.5 + 137 \cdot k$, napríklad: $f(68) = f(69)$, $f(0) = f(137)$ alebo $f(276) = f(137-276) = f(137-276+413) = f(274)$. Z toho plynie, že najmenší počet rôznych hodnôt je $\frac{413+1}{2} = 207$.

Úloha 44. Trojuholník ABC je rovnoramenný pravouhlý trojuholník, taký že $|AB| = |AC| = 4$. Body E, F sú stredmi úsečiek AB a AC. Nech $\overset{\frown}{EF}$ je štvrťkružnica so stredom v bode A. Nech P leží na $\overset{\frown}{EF}$. Nájdite najmenšiu možnú hodnotu $\frac{|BP|}{2} + |CP|$.

Výsledok. $\sqrt{17} \doteq 4.123$

Riešenie. Doplňme bod T na strane AB taký, že $|AT| = 1$. Keďže $|AP| = 2, |AB| = 4$, tak $|PA|^2 = |AT| \cdot |AB|$, čiže $\frac{|PA|}{|AT|} = \frac{|AB|}{|PA|}$. To znamená, že PAT, BAP sú podobné trojuholníky. Z toho vieme $\frac{|PT|}{|PB|} = \frac{|PA|}{|AB|} = \frac{1}{2}$, a teda $\frac{|BP|}{2} + |CP| = |CP| + |PT|$. Zároveň $|CT| = \sqrt{|AT|^2 + |AC|^2} = \sqrt{17}$. Konečne teda môžeme napísať $|PC| + |PT| \geq |TC| = \sqrt{17}$. Na záver ešte môžeme poznamenať, že rovnosť nastáva pokiaľ C, P, T sú kolineárne.

Úloha 45. Do štvorčekovej tabuľky 4×4, položíme osem jednosmerných zrkadiel ako diagonály niektorých štvorčekov. Jednosmerné zrkadlo má takú vlastnosť, že keď príde lúč svetla z jednej strany odrazí sa normálne, ale keď príde z druhej strany, tak je pohltený. V strede každej z ôsmich vertikálnych hraničných úsečiek je laser, smerujúci (kolmo) do tabuľky. Koľkými spôsobmi vieme umiestniť zrkadlá tak, aby každý laser po odraze, strelil do niektorej z horných alebo dolných hraničných úsečiek, tak že žiaden laser nie je pohltený?

Výsledok. 90

Riešenie. Uvedomte si, že postačuje vybrať po dva štvorce v každom riadku a každom stĺpci. Toto určuje žiadanú konfiguráciu zrkadiel.

Naozaj, v každom riadku aj každom stĺpci musia byť aspoň dve zrkadlá. Ak by totiž v nejakom riadku bolo nula zrkadiel, narazil by lúč z lasera tohto riadku do iného lasera. V prípade, že by v nejakom riadku bolo jedno zrkadlo, lúč z jednej strany bude pohltený. Čo sa týka stĺpcov, začneme pozorovaním, že v každom stĺpci musí na vrchný aj spodný okraj dopadať lúč - lúčov je totiž 8 a nevieme dosiahnuť, aby na jednu stenu dopadali dva lúče. Ak by teda v nejakom stĺpci boli menej ako dve zrkadlá, aspoň na jeden z okrajov tohto stĺpca by nedopadal žiaden lúč.

Keď však naopak dostaneme množinu 8 štvorcov, pričom v každom riadku aj každom stĺpci sú práve 2 z nich, vieme orientáciu nastaviť tak, že odrazivá plocha smeruje na tie steny, ktoré od tohto zrkadla neoddeľuje ďalšie zrkadlo. Dostaneme tak korektné (a zároveň jediné možné korektné) orientácie zrkadiel v tomto rozmiestnení.

Čiže zostáva zistiť počet spôsobov, ktorými vieme vybrať 8 štvorcov tabuľky 4×4 tak, že v každom riadku aj stĺpci sú presne dva. Preklopme všetky zrkadlá (čiže vymeníme odrazivú a pohlcujúcu stranu). Ak by na niektoré zo zrkadiel zasvietil laser, zjavne musí vytvoriť cyklus. Sú iba dva spôsoby, akými môžu cykly vzniknúť – dva cykly dĺžky štyri alebo jeden dĺžky osem. Ak máme vytvoriť dva cykly dĺžky 4, je to ekvivalentné uloženiu zrkadiel do dvoch obdĺžnikových zoskupení. Najskôr umiestnime prvý obdĺžnik. Bez ujmy na všeobecnosti, jedna strana obdĺžnika bude vo vrchnom riadku. V ňom vieme vybrať dve zrkadlá 6 spôsobmi. Potom treba vybrať spodný riadok, na to sú 3 možnosti. Dokopy teda $6 \cdot 3 = 18$ možností na rozmiestnenie prvého obdĺžnika. Rozmyslite si, že druhý obdĺžnik je potom jednoznačne určený.

Na dosiahnutie cyklu dĺžky 8 umiestnime dve zrkadlá do prvého riadku - na to máme 6 možností. Teraz v stĺpcoch, v ktorých sú zrkadlá v prvom riadku, vyberieme druhé zrkadlá tak, aby neboli v spoločnom riadku. Na to máme $3 \cdot 2 = 6$

možností. Na záver už len umiestnime druhé zrkadlo do niektorého z riadkov, v ktorých je zatiaľ iba jedno - na to sú dve možnosti. To nám už jednoznačne určuje hľadaný cyklus, teda takýchto cyklov je $6 \cdot 6 \cdot 2 = 72$.

Všetkých možností dokopy je preto $18 + 72 = 90$.

Úloha 46. Nájdite najmenšie kladné celé číslo také, že po presunutí poslednej cifry na začiatok dostaneme 7-krát väčšie číslo.

Presunutie vyzerá napríklad takto $135 \to 513$.

Výsledok. 1014492753623188405797

Riešenie. Označme poslednú cifru hľadaného čísla ako a a číslo utvorené zvyšnými ciframi ako b. Potom pôvodné číslo je $10b + a$ a nové číslo je $10^k a + b$, kde k je počet cifier b. Preto $k = \lfloor \log_{10} b \rfloor + 1$. Potrebujeme teda vyriešiť rovnicu $70b + 7a = 10^k a + b$, skadiaľ máme $b = \frac{(10^k - 7)a}{69}$.

Keďže zadanie požaduje minimalizovať hodnotu b, stačí nájsť najmenšiu hodnotu k takú, že preň existuje cifra a, pričom $69 \mid (10^k - 7)a$. Zjavne $10^k - 7$ je vždy deliteľné tromi, takže stačí overovať podmienku $23 \mid (10^k - 7)a$, ktorá však nastáva práve vtedy, keď $23 \mid 10^k - 7$, pretože 23 je prvočíslo a $a \le 9 < 23$.

Treba teda nájsť najmenšie k, pre ktoré $10^k \equiv 7 \pmod{23}$. A keďže $10^{-1} = 7 \pmod{23}$, priamo z Malej Fermatovej vety vieme odvodiť, že 21 je najmenšie také k.

Dosaďme túto hodnotu do vyššie uvedenej rovnice, čím zistíme, že $b = \frac{(10^{21} - 7)a}{69}$. Teraz potrebujeme určiť najmenšie možné hodnoty a a b: zo vzťahu pre k spätne získame, že b musí byť 21-ciferné číslo, čiže $b \ge 10^{20}$, čo znamená, že $(10^{21} - 7)a \ge 69 \times 10^{20}$. Najmenšie také a je 7, čiže $a = 7$ a $b = \frac{7 \times 10^{21} - 49}{69}$. Teraz už len spočítame $6999999999999999999951 : 69 = 2333333333333333333317 : 23 = 101449275362318840579$. Hľadané číslo je teda 1014492753623188405797.

Úloha 47. Dvaja čarodejníci Aritmetix a Kombinatorika majú druhé kolo svojho súboja. *(Pre pamätníkov, prvý súboj mali v roku 2018.* Obaja začínajú so 100 životmi. Arimetix sa naučil dve kúzla, prvé spôsobí 50 poškodenia druhé zníži presnosť oponentovho kúzla o 25%, po zvyšok súboju (teda napríklad z 65% na 40%). Presnosť kúzla je pravdepodobnosť, že kúzlo zasiahne nepriateľa. Aritmetix si vyberá kúzlo hodením mince a obe kúzla majú presnosť 100%. Kombinatorika sa naučila kúzlo, ktoré udelí 50 poškodenia a na začiatku má tiež presnosť 100%. Striedajú sa v používaní kúziel a Aritmetix začína. Zápas sa končí vtedy keď niektorý z čarodejníkov má 0 života. Aká je pravdepodobnosť, že zápas skončí tak, že nejaký čarodejník odíde bez toho aby dostal poškodenie?

Výsledok. $\frac{141}{1024}$

Riešenie. Nech (A, K, p, t) označuje stav súboja. Hodnota A je počet životov Aritmetixa, C je počet životov Kombinatoriky, p je súčasná presnosť kúzla Kombinatoriky a t označuje, ktorý čarodejník je na ťahu. Začínajúca pozícia bude $(100, 100, 100, A)$, a vyhovujúce konečné pozície sú $(0, 100, p, A)$, $(100, 0, p, K)$.

Uvedomme si, že prvé kúzlo nemôže byť poškodenie, potom by Kombinatorika nemohla netrafiť a obaja čarodejníci by dostali poškodenie. Ďalej si uvedomme, že ak v nejakom bode bude $p = 0\%$, Aritmetix vyhrá, pretože pravdepodobnosť, že duel bude nekonečný, sa limitne blíži k nule. Kombinatorika potrebuje dva zásahy na to, aby vyradila Aritmetixa z hry. Takže na to, aby Kombinatorika vyhrala (bez ujmy), Aritmetix musel použiť kúzlo na zníženie presnosti aspoň dvakrát. To nám dáva možné vyhovujúce výsledky $(100, 0, 75, K)$, $(100, 0, 50, K)$, $(100, 0, 25, K)$, $(100, 0, 0, K)$, $(0, 100, 50, A)$ a$(0, 100, 25, A)$.

- Prvý výsledok mohol nastať len ak súboj prebiehal: kúzlo na presnosť, netrafenie, trafenie, netrafenie, trafenie s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^7}$.
- Druhý výsledok mohol nastať dvoma spôsobmi: presnosť, netrafenie, trafenie, netrafenie, presnosť, netrafenie, trafenie ale bo presnosť, netrafenie, presnosť, netrafenie, trafenie, netrafenie, trafenie. V oboch prípadoch je násobenec Artimetixovho kúzla $\frac{1}{2^4}$ ale násobenec Kombinatorikinho je buď $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^4}$ alebo $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^5}$, takže pravdepodobnosť tohto výsledku je $\frac{1}{2^4}(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5}) = \frac{3}{2^9}$.
- Podobne môžeme odvodiť, že pravdepodobnosť výsledku $(100, 0, 25, C)$, je $\frac{1}{2^5}(\frac{3^2}{2^7} + \frac{3}{2^6} + \frac{3}{2^7}) = \frac{9}{2^{11}}$.
- A posledný z Aritmetixovych víťazných výsledkov má pravdepodobnosť $\frac{1}{2^4} \cdot \frac{3}{2^5} + \frac{1}{2^5} \cdot (\frac{3^2}{2^7} + \frac{3}{2^6} + \frac{3}{2^7}) = \frac{3}{2^9} + \frac{9}{2^{11}} = \frac{21}{2^{11}}$.
- Prvý Kombinatorikin víťazný výsledok musí mať postupnosť presnosť, zásah, presnosť, zásah. To nám dáva $\frac{1}{2^2} \cdot \frac{3}{2^2} \cdot 12 = \frac{3}{2^5}$.
- Druhý spôsob, ktorým mohla Kombinatorika vyhrať bez ujmy na zdraví je buď presnosť, zásah, presnosť, netrafenie, presnosť, zásah, alebo presnosť, netrafenie, presnosť, zásah, presnosť, zásah. To nám spolu dáva pravdepodobnosť $\frac{1}{2^3} \cdot (\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}) = \frac{1}{2^3}(\frac{3}{2^5} + \frac{1}{2^5}) = \frac{1}{2^6}$.

Nakoniec pravdepodobnosť, že duel skončí pre jedného čarodejníka bez ujmy na zdraví je súčet pravdepodobností možností vymenovaných vyššie: $\frac{1}{2^7} + \frac{3}{2^9} + \frac{9}{2^{11}} + \frac{21}{2^{11}} + \frac{3}{2^5} + \frac{1}{2^6} = \frac{29}{2^{10}} + \frac{7}{2^6} = \frac{141}{1024}$.

Úloha 48. Nech a, b sú kladné celé čísla. Nech A_n je postupnosť definovaná ako $A_2 = a,\ A_1 = b,\ A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$. Nech B_n je postupnosť definovaná ako $B_2 = 3a + b,\ B_1 = a + 2b,\ B_n = B_{n-1} + B_{n-2}$. Navyše vieme, že existujú k, l také, že $A_k = 2022$ a $B_l = 2793$. Aká je najmenšia možná hodnota $a \cdot b$?

Výsledok. 1080

Riešenie.

Nahliadnime, že $B_n = A_n + A_{n+2}$ – pre $n = 1$ máme $A_1 + A_3 = A_1 + (A_1 + A_2) = a + 2b = B_1$, pre $n = 2$ zas $A_2 + A_4 = A_2 + (A_2 + A_3) = 2a + (a + b) = 3a + b = B_2$ a ďalej indukciou pre $n = m$ dostávame $B_{m+2} = B_{m+1} + B_m = (A_{m+1} + A_{m+3}) + (A_m + A_{m+2}) = (A_m + A_{m+1}) + (A_{m+2} + A_{m+3}) = A_{m+2} + A_{m+4}$.

Keďže a, b sú kladné, vieme, že $A_3 > A_1$ a pre $n \geq 2$ platí $A_{n+1} > A_n$. Ukážeme, že 1080 je dosiahnuteľná hodnota. Predpokladajme, že $k > 2$, keďže v opačnom prípade by bola výsledkom hodnota $ab = A_1 A_2 \leq 2022 > 1080$.

Pre spor predpokladajme, že $k \leqslant l$. Potom však

$$2793 = A_{l+2} + A_l = A_{l+1} + 2 \cdot A_l > 2 \cdot A_l \geq 2 \cdot A_k = 2 \cdot 2022 = 4044,$$

čo je spor. Preto $k > l$. Navyše, $k = l + 1$ vedie k

$$2793 = A_{l+2} + A_l = A_{l+1} + 2 \cdot A_l = 2022 + 2 \cdot A_l,$$

kde pravá strana je násobkom 2, zatiaľ čo na ľavej strane máme nepárne číslo. Čiže dokonca $k > l + 1$. Ak by sme ďalej predpokladali $k > l + 3$, opäť by sme dostali spor, tentokrát ako $2793 = A_l + A_{l+2} < A_{k-1} + A_{k-2} = 2022$. Podobným spôsobom vieme eliminovať aj prípad $k = l + 3$, kedy

$$A_l - A_{l+1} = (A_l + A_{l+2}) - (A_{l+1} + A_{l+2}) = 2793 - 2022 = 771,$$

čo však je možné len pre $l = 1$. Potom ale $ab = b(b + 771)$ dá riešenie lepšie ako 1080 iba ak $b = 1$, $a = 772$. Avšak s takouto počiatočnou podmienkou pre postupnosť A máme prvé členy 772, 1, 773, 774, 1547, 2321, čiže kvôli monotónnosti A nedosahuje 2022.

Preto jediný zmysluplný prípad je $k = l + 2$. Dostávame $A_{l+2} = 2022$, $A_l + A_{l+2} = 2793$, skadiaľ $A_l = 771$, $A_{l+1} = 1251$. To nám umožňuje spätne spočítať predošlé členy postupnosti: $A_{l-1} = 480$, $A_{l-2} = 291$, $A_{l-3} = 189$, $A_{l-4} = 102$, $A_{l-5} = 87$, $A_{l-6} = 15$, $A_{l-7} = 72$, $A_{l-8} = -57$. Z toho už ale ľahko dostaneme, že $b = 72$, $a = 15$ je najmenší možný výber dvoch počiatočných hodnôt, čo dáva odpoveď $15 \cdot 72 = 1080$.

Úloha 49. Na dokonalom binárnom strome hĺbky 10 (teda s $1 + 2 + 4 + \ldots 2^{10} = 2^{11} - 1$ vrcholmi) rastie na každom vrchole jablko. Všetky hrany sú dĺžky 1. V každom jablku býva $2^{11} - 2$ červíkov. Jedného dňa sa všetky červy rozhodli presťahovať tak, aby žiadna dvojica červíkov, čo bývali spolu v jablku nebudú bývať spolu a žiaden červík nezostane vo svojom pôvodnom jablku. Akú vzdialenosť sa musia červíky dokopy preplaziť, aby dosiahli tento nový ubytovací poriadok?

Dokonalý binárny strom je taký, že každý vnútorný vrchol má práve dvoch synov a všetky listy majú rovnakú hĺbku.

Výsledok. 67166208

Riešenie. Uvažujme všeobecnú situáciu kde n je hĺbka stromu, v našom prípade je $n = 10$, a T_n bude značiť perfektný binárny strom hĺbky n. Nech V_k značí množinu vrcholov takú, že ich vzdialenosť od najbližšieho listu je k. (vzdialenosť 0 značí, že je to list, vzdialenosť 1 značí, že je to sused nejakého listu, a.t.ď.) Nech E_k značí množinu hrán medzi V_k a V_{k+1}.

V strom N_n je $2^{n+1} - 1$ vrcholov. Uvažujme hranu e z množiny E_k a budeme počítať červov prechádzajúcich cez túto hranu. Nech p, q je počet vrcholov na jednej a druhej strany od hrany e. Keďže problém je na strome, ľubovoľný červ, ktorý chce prejsť z vrchola započítaného v p do q musí prejsť cez hranu e. Preto počet červov prechádzajúcich hranou e musí byť $p \cdot q$. Keďže jedna množina je vždy T_k máme, že $p = |T_k| = 2^{k+1} - 1$ a $q = |T_n| - |T_k| = 2^{n+1} - 1 - 2^{k+1} + 1 = 2^{n+1} - 2^{k+1}$. Preto $2 \cdot p \cdot q = 2 \cdot (2^{k+1} - 1) \cdot (2^{n+1} - 2^{k+1})$. Hrán v množine E_k je 2^{n-k}. Preto množstvo červov prechádzajúcich cez E_k je $(2^{n-k+1}) \cdot (2^{k+1} - 1) \cdot (2^{n+1} - 2^{k+1}) = (2^{n+1} - 2^{n-k} - 2^{k+1} + 1) \cdot 2^{n+2}$. Sčítaním týchto výrazov pre každé $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ dostaneme

$$\sum_{k=0}^{n-1} (2^{n+1} - 2^{n-k} - 2^{k+1} + 1) \cdot 2^{n+2} = 2^{n+2} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (2^{n+1} - 2^{n-k} - 2^{k+1} + 1) = 2^{n+2} \cdot (n \cdot 2^{n+1} + n - \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1}).$$

Sumy na pravej strane sú rovnaké sumy len inak zapísané, preto

$$\begin{aligned} 2^{n+2} \cdot (n \cdot 2^{n+1} + n - \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1}) &= 2^{n+2} \cdot (n \cdot 2^{n+1} + n - 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} 2^k) = \\ = 2^{n+2} \cdot (n \cdot 2^{n+1} + n - 2 \cdot (2^{n+1} - 2)) &= 2^{n+2} \cdot ((n-2) \cdot 2^{n+1} + n + 4) = \\ = 4096 \cdot (8 \cdot 2048 + 14) &= 67166208. \end{aligned}$$

Úloha 50. Pre dané prvočíslo p označme N_p počet trojíc (a,b,c) takých, že $a,b,c \in \{0,1,\dots,p-1\}$ a

$$a^3+b^3+c^3 \equiv 3abc \pmod{p}.$$

Nájdite súčet všetkých prvočísel $p \leq 1000$, pre ktoré $N_p > p^2+p$.

Výsledok. 36668

Riešenie. Všimnime si, že $a^3+b^3+c^3-3abc = \frac{1}{2}\cdot(a+b+c)((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)$. Zo substitúcie $a-b=x, b-c=y$ vyplýva, že $c-a=-x-y$. Potom $\frac{1}{2}((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2) = x^2+xy+y^2$. Ďalej vyslovíme nasledovné vety (ich dôkaz sa nachádza na konci riešenia):

(1) Ak p dáva zvyšok 2 po delení tromi a súčasne delí x^2+xy+y^2, tak potom p delí x,y.

(2) Ak p dáva zvyšok 1 po delení tromi, rovnica $z^2+z+1\equiv 0 \pmod{p}$ má dve riešenia, menovite r, r^{-1}. Preto $x^2+xy+y^2 \equiv (x-ry)(x-r^{-1}y) \pmod{p}$. Z toho máme, že ak p delí x^2+xy+y^2, tak potom $x\equiv ry \pmod{p}$ alebo $x \equiv r^{-1}y \pmod{p}$.

V prípade, že p dáva zvyšok 2 po delení tromi, potom $p \mid a+b+c$ (čo vedie k p^2 trojiciam) alebo $p \mid x^2+xy+y^2$ (čo v súvislosti s vetou (1) vedie k $a-b\equiv b-c \equiv 0 \pmod{p}$, a teda $a\equiv b\equiv c \pmod{p}$ – čiže sa jedná o p trojíc). Potrebujeme však odrátať duplicitne zarátané trojice - to sú také, že $a\equiv b\equiv c \pmod{p}$ a súčasne $a+b+c\equiv 0 \pmod{p}$. To spĺňa iba trojica $(0,0,0)$, a preto máme p^2+p-1 riešení. Z toho už ale ľahko nahliadneme, že $N_p \leq p^2+p$ pre všetky $p\equiv 2 \pmod{3}$.

Ak p dáva zvyšok 1 po delení tromi, z $a+b+c\equiv 0 \pmod{p}$ máme p^2 riešení. Ak p delí x^2+xy+y^2, potom z vety (2) máme buď $a-b\equiv r(b-c) \pmod{p}$ alebo $a-b\equiv r^{-1}(b-c) \pmod{p}$. V prvom prípade z toho dostávame $a\equiv (r+1)b-rc \pmod{p}$ a v druhom prípade máme $a\equiv (r^{-1}+1)b-r^{-1}c \pmod{p}$. Každý z tých prípadov nám teda poskytne p^2 trojíc. Tieto dva prípady majú spoločné riešenie, keď $a\equiv b\equiv c \pmod{p}$. Preto máme p dvakrát započítaných riešení. Na to, aby $p \mid a+b+c$ a $p \mid x^2+xy+y^2$ mali spoločné riešenie, potrebujeme $(r+2)b-(r-1)c\equiv 0 \pmod{p}$. Tu je teda tiež p duplicitne započítaných riešení. Na záver, všetky tri rovnice sú splnené práve vtedy, keď $a\equiv b\equiv c\equiv 0 \pmod{p}$, čo spĺňa iba trojica $(0,0,0)$. Z *princípu zapojenia a vypojenia* tak vieme, že v tejto vetve máme $3p^2-3p+1$ riešení.

Ostáva prešetriť prípad $p=3$. Potom $a^3+b^3+c^3\equiv 0 \pmod{3}$. Keďže $x^3\equiv x \pmod{3}$, musí nutne platiť $a+b+c\equiv 0 \pmod{3}$. V tejto vetve máme teda 9 riešení.

Keďže $3p^2-3p+1 > p^2+p$ pre všetky prvočísla tvaru $p=3k+1$, výsledkom je súčet všetkých prvočísel $p\leq 1000$ tvaru $3k+1$. Ich súčet je 36 668.

Poznámka

Je viacero spôsobov, ako sa dajú dokázať vety (1) a (2). Na dokázanie (1), uvažujme rovnicu $x^3\equiv y^3 \pmod{p}$. Umocnením oboch strán exponentom $\frac{p+1}{3}$ dostávame $x^{p+1}\equiv y^{p+1} \pmod{p}$. Ak by p nedelilo x,y, dostali by sme, že $x^2\equiv y^2 \pmod{p}$. Máme, že $x^2\equiv y^2 \pmod{p}$ a $x^3\equiv y^3 \pmod{p}$, z čoho nutne $x\equiv y \pmod{p}$. Potom $0\equiv x^2+xy+y^2\equiv 3y^2 \pmod{p}$, a teda $p\mid 3$. Zvyšok p po delení tromi je však 2, spor.

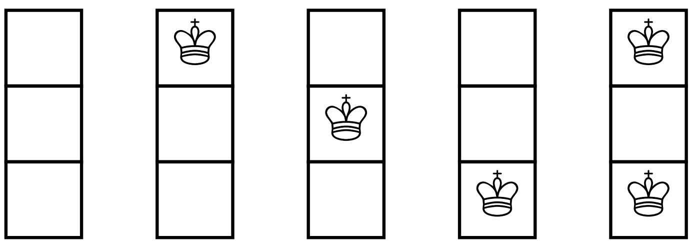
Na dôkaz vety (2) si všimnime, že rovnica $z^3\equiv 1 \pmod{p}$ má tri riešenia vždy, keď $p\equiv 1 \pmod{3}$. Preto $z^2+z+1\equiv 0 \pmod{p}$ má dve riešenia.

Úloha 51. Určte počet možností, ako položiť aspoň jedného kráľa na šachovnicu 3×11 tak, že žiadni dvaja králi sa navzájom neohrozujú.

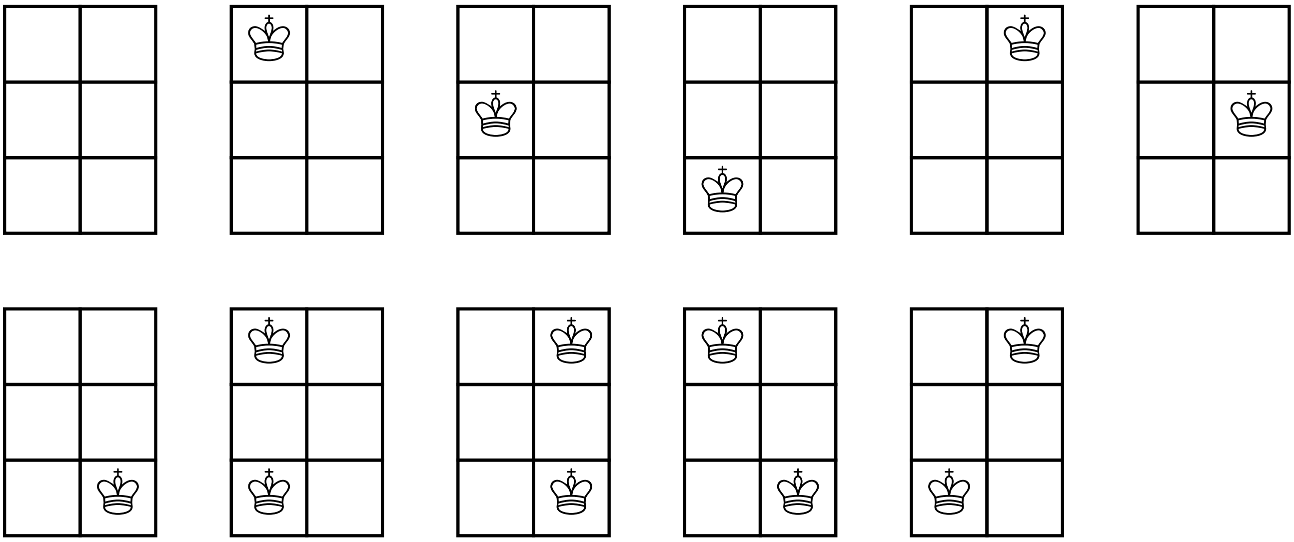
Dvaja králi sa neohrozujú, ak nie sú postavení na políčkach susediacich hranou alebo rohom.

Výsledok. 132 290

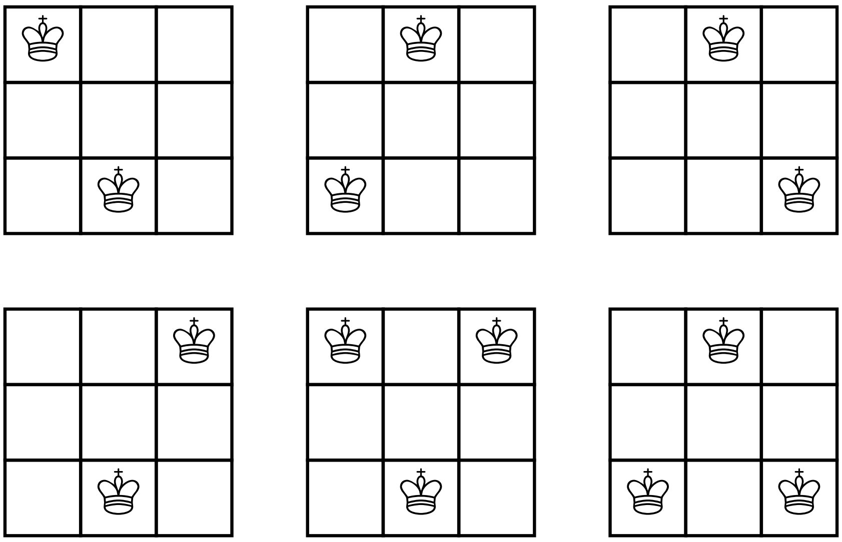
Riešenie. Nech $k(n)$ označuje, pre $n\geq 0$, počet možností ako postaviť niekoľko kráľov, vrátane žiadneho, na šachovnicu $3\times n$. Počet možností ako vyplniť prázdnu šachovnicu je $k(0)=1$. Ďalej priamo spočítame $k(1)=5$



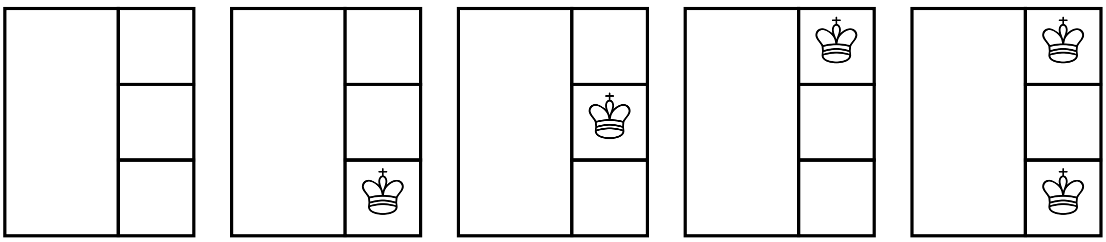
a $k(2)=11$.



Taktiež vieme spočítať, že $k(3) = 35$. Ak je stredný stĺpec prázdny tak aj prvý aj tretí stĺpec má $k(1) = 5$ možností na umiestnenie kráľa a teda dokopy 25. Sú 4 možnosti ako postaviť kráľov iba do prostredného stĺpca. Navyše je 6 možností ako usporiadať kráľov tak aby stredný stĺpec bol použitý a aspoň jeden z okrajových stĺpcov. Teda dokopy $k(3) = 25 + 4 + 6 = 35$.



Preto možností ako usporiadať kráľov na šachovnici $3 \times n$, pre $n \geq 2$, klasifikujeme podľa pozícií kráľov v poslednom stĺpci.



$k_p(n)$ (prázdne) $k_d(n)$ (dole) $k_s(n)$ (stred) $k_h(n)$ (hore) $k_o(n)$ (obe)

Z čoho je zrejmé, že $k(n) = k_p(n) + k_d(n) + k_s(n) + k_h(n) + k_o(n)$, a ak sa králi navzájom neohrozujú, tak tieto rovnice musia tiež platiť:

$$
\begin{aligned}
k_p(n) &= k(n-1), \\
k_d(n) &= k_h(n-1) + k_p(n-1), \\
k_h(n) &= k_d(n-1) + k_p(n-1), \\
k_s(n) &= k_o(n) = k_p(n-1).
\end{aligned}
$$

Zo symetrie je zrejmé, že $k_d(n) = k_h(n)$ a pre $n \geq 2$ navyše, že

$$\begin{aligned} k(n) &= k_p(n) + 2 \cdot k_d(n) + 2 \cdot k_s(n), \\ &= k(n-1) + 2 \cdot k_d(n) + 2 \cdot k_p(n-1), \\ &= k(n-1) + 2 \cdot k_d(n) + 2 \cdot k(n-2). \end{aligned}$$

Potom je zrejmé, že

$$2 \cdot k_d(n) = k(n) - k(n-1) - 2 \cdot k(n-2).$$

Keďže platí $k_d(n) = k_h(n-1) + k_p(n-1)$, tak platí aj

$$2 \cdot k_d(n) = 2 \cdot k_d(n-1) + 2 \cdot k(n-2).$$

Dosadením rovnice pre k_d dva krát dostaneme rekurziu

$$\begin{aligned} & k(n) - k(n-1) - 2 \cdot k(n-2) = k(n-1) - k(n-2) - 2 \cdot k(n-3) + 2 \cdot k(n-2) \\ \iff \quad & k(n) = 2 \cdot k(n-1) + 3 \cdot k(n-2) - 2 \cdot k(n-3), \end{aligned}$$

pre $k(n)$ s $n \geq 3$ a počiatočnými podmienkami $k(0) = 1$, $k(1) = 5$ a $k(2) = 11$. Postupne vypočítanie tejto rekurzie pre $k(11)$:

$$\begin{aligned} k(3) &= 2 \cdot 11 + 3 \cdot 5 - 2 \cdot 1 = 35, \\ k(4) &= 2 \cdot 35 + 3 \cdot 11 - 2 \cdot 5 = 93, \\ k(5) &= 2 \cdot 93 + 3 \cdot 35 - 2 \cdot 11 = 269, \\ k(6) &= 2 \cdot 269 + 3 \cdot 93 - 2 \cdot 35 = 747, \\ k(7) &= 2 \cdot 747 + 3 \cdot 269 - 2 \cdot 93 = 2\,115, \\ k(8) &= 2 \cdot 2\,115 + 3 \cdot 747 - 2 \cdot 269 = 5\,933, \\ k(9) &= 2 \cdot 5\,933 + 3 \cdot 2\,115 - 2 \cdot 747 = 16\,717, \\ k(10) &= 2 \cdot 16\,717 + 3 \cdot 5\,993 - 2 \cdot 2\,115 = 47\,003, \\ k(11) &= 2 \cdot 47\,003 + 3 \cdot 16\,717 - 2 \cdot 5\,933 = 132\,291. \end{aligned}$$

Po odpočítaní prázdnej šachovnice je výsledok 132 290.

Úloha 52. Majme ostrouhlý trojuholník ABC. Označme A' priesečník výšky z bodu A na stranu BC a vonkajšej polkružnice nad priemerom BC (vonkajšia polkružnica je tá, ktorej žiadna časť neleží vnútri trojuholníka ABC). Podobne sú určené aj body B' a C'. Nech S_{XYZ} označuje obsah trojuholníka XYZ. Ak $S_{BCA'} = 5\text{cm}^2$, $S_{B'CA} = 6\text{cm}^2$ a $S_{BC'A} = 7\text{cm}^2$, určte obsah trojuholníka ABC.

Výsledok. $\sqrt{110} \doteq 10.488088$

Riešenie. Ukážeme, že $S^2_{BCA'} + S^2_{CAB'} + S^2_{ABC'} = S^2_{ABC}$. To nám už potom ľahko odhalí výsledok.

Označme D pätu výšky z vrchola A na stranu BC. Z Euklidovej vety o výške máme, že $|A'D|^2 = |BD| \cdot |DC|$, z čoho

$$\left(\frac{[BA'C]}{[BAC]} \right)^2 = \frac{|BD| \cdot |CD|}{|AD|^2}.$$

Keďže $\frac{|BD|}{|AD|} = \operatorname{cotg}(\beta)$, chceme dokázať

$$\sum \operatorname{cotg}(\beta) \cdot \operatorname{cotg}(\gamma) = 1.$$

Z toho, že $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ vyplýva, že

$$0 = \sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) + \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma) + \sin(\gamma) \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma),$$

$$\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) + \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma) + \sin(\gamma) \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha),$$

$$1 = \frac{\cos(\beta) \cdot \cos(\gamma)}{\sin(\beta) \cdot \sin(\gamma)} + \frac{\cos(\beta) \cdot \cos(\alpha)}{\sin(\beta) \cdot \sin(\alpha)} + \frac{\cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma)}{\sin(\alpha) \cdot \sin(\gamma)} = \operatorname{cotg}(\beta) \cdot \operatorname{cotg}(\gamma) + \operatorname{cotg}(\alpha) \cdot \operatorname{cotg}(\gamma) + \operatorname{cotg}(\beta) \cdot \operatorname{cotg}(\alpha) = 1.$$

Preto obsah trojuholníka ABC určíme ako $\sqrt{S^2_{A'BC} + S^2_{AB'C} + S^2_{ABC'}} = \sqrt{25 + 36 + 49} = \sqrt{110}$.

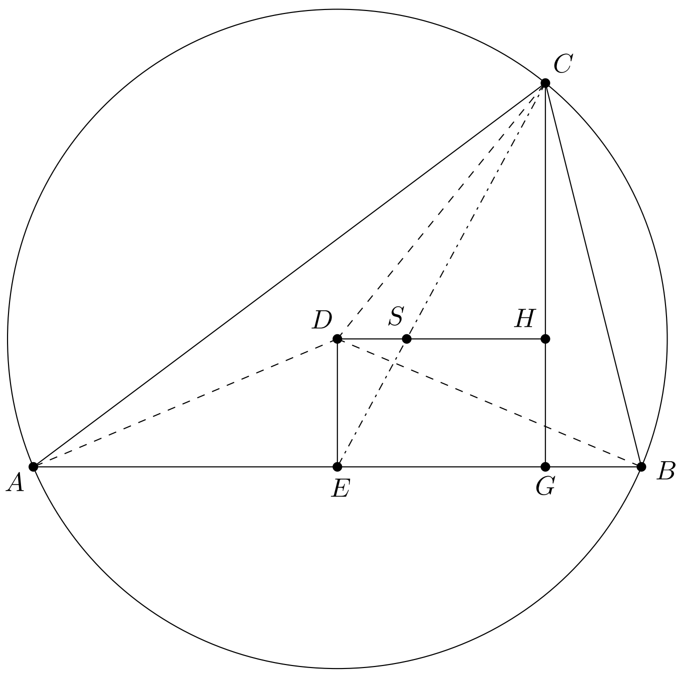
Úloha 53. Dávid hrá hru *Osadníci* na ostrove, ktorý má nasledujúce vlastnosti:

- Ostrov má tvar kruhu a na pobreží má tri prístavy A, B a C.
- Na ostrove sú štyri dôležité budovy, D, E, F a H, ktoré tvoria vrcholy obdĺžnika $DEFH$.
- V strede ostrova je hrad D.
- Kostol E je v polovici priamej vzdialenosti medzi prístavmi A a B.
- Chatrč G je bližšie k prístavu B ako ku A.
- Skladisko H so všetkými zdrojmi leží v ortocentre trojuholníka ABC.

Dávid vie, že vzdialenosť z D do E je 8 km a vzdialenosť z E do G je 13 km. Koľko kilometrov musí Dávid prejsť zo skladiska do najbližšieho prístavu?

Výsledok. 10

Riešenie. Výpočty spravíme bez jednotiek. Keďže $DEGH$ je obdĺžnik, $|DE| = |HG| = 8$ a $|DH| = |EG| = 13$. Navyše vieme, že H je bližšie k B ako ku A, D je stred kružnice opísanej a H ortocentrom trojuholníka ABC.



Stred kružnice opísanej D, ťažisko T a ortocentrum H ležia na Eulerovej priamke spĺňajúc rovnosť $|SH| = 2|DS|$. Pre podobné trojuholníky SHC a EGC potom platí

$$\frac{|CH|}{|HS|} = \frac{|CG|}{|GE|} \iff \frac{|CH|}{2} = \frac{|CG|}{3} \iff |CH| = 2 \cdot |HG|.$$

To dáva $|CH| = 16$. Keďže DHC je pravouhlý, podľa Pytagorovej vety platí, že $|CD|^2 = 16^2 + 13^2$. Polomer kružnice opísanej trojuholníku ABC je $|AD| = |BD| = |CD|$. V pravouhlom trojuholníku AED, platí $|AE| = \sqrt{16^2 + 13^2 - 8^2} = 19 = |EB|$, a preto $|GB| = 19 - 13 = 6$. Opätovným využitím Pytagorovej vety vidíme, že $|HB|^2 = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$. Preto vzdialenosť z H k najbližšiemu prístavu je 10 km.