**Problema 1.** Într-un joc de cinci jucători, unul dintre ei primește puncte la fiecare rundă. Jocul se termină imediat ce unul dintre jucători are 10 puncte. Cel mult câte runde poate avea jocul?

*Rezultat.* 46

*Soluție.* Când jocul se termină, câștigătorul are 10 puncte, în timp ce ceilalți jucători au cel mult 9 puncte, punctaje care adunate dau $10 + 4 \cdot 9 = 46$.

**Problema 2.** Gleb are patru cartonașe pe care sunt scrise numerele 1, 2, 3 și 6. El dorește să aranjeze toate cartonașele astfel încât să formeze două numere $A$ și $B$ cu proprietatea că $A$ este multiplu de $B$, spre exemplu $A = 36$ și $B = 12$. În câte moduri poate face el acest lucru?

*Rezultat.* 21

*Soluție.* Considerăm două cazuri:

I. $B$ conține un cartonaș și $A$ conține trei. Considerăm valorile posibile pentru $B$:

- $B = 1$: $A$ este orice permutare a numerelor $2, 3, 6 \to 6$ moduri.
- $B = 2$: $A$ trebuie să se termine cu $6 \to 2$ moduri.
- $B = 3$: $A$ este orice permutare a numerelor, din moment ce suma lor se divide cu $3 \to 6$ moduri.
- $B = 6$: $A$ se termină cu $2 \to 2$ moduri.

II. $A$ și $B$ sunt formate din două cartonașe fiecare. Atunci raportul $A/B$ este mai mic de 6, deci poate fi 1, 2, 3, 4, sau 5. Să vedem aceste posibilități:

1: Acest lucru nu este posibil, deoarece ar implica $A = B$.

2: $A$ trebuie să se termine cu 2 sau 6. Dacă $A$ se termină cu 2, atunci $B$ trebuie să se termine cu 6 sau 1. În primul caz, obținem 32 și 16, iar în al doilea caz, 62 și $31 \to 2$ moduri. Dacă $A$ se termină cu 6, atunci $B$ trebuie să se termine cu 3, deci obținem 26 și $13 \to 1$ mod.

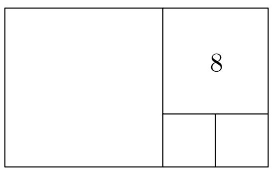
3: $A$ începe cu 6 sau 3. În primul caz, $B$ începe cu 2, obținând 63 și 21. În ultimul caz, $B$ începe cu 1, obținând 36 și $12 \to 2$ moduri.

4: $A$ începe cu 6 și se termină cu 2, deoarece este par. Deci $A = 62$, și nu se divide cu 4.

5: $A$ trebuie să se termine cu 5 sau 0, ceea ce nu este posibil.

Adunând toate cazurile, obținem 21 numere.

**Problema 3.** Figura conține patru pătrate, unul dintre ele având aria egală cu 8. Care este aria celui mai mare pătrat?




*Rezultat.* 18

*Soluție.* Pătratele au laturile în raportul $3 : 2 : 1$. De aceea, aria celui mai mare pătrat este $\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 8 = 18$.

**Problema 4.** Într-un parc sunt vrabiuțe, matematicieni și centauri, adică sunt 15 cozi și 94 de mâini. Câte picioare sunt?

Notă: Vrabiuțele au două picioare și o coadă, matematicienii au două mâini și două picioare, iar centaurii au două mâini, patru picioare și o coadă.

*Rezultat.* 124

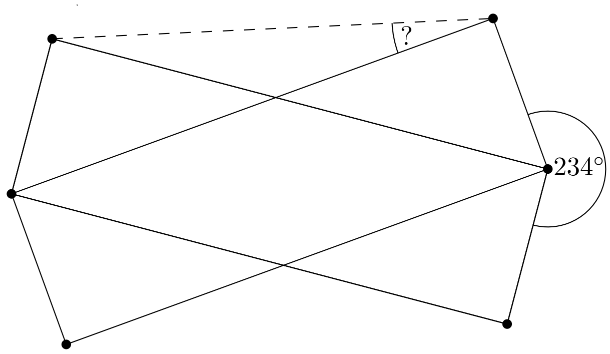
*Soluție.* Notăm numărul de vrăbiuțe, matematicieni și centauri cu $g$, $m$ și $c$. Obținem $g + c = 15$,pentru numărul de cozi și relația $2m+2c = 94$, pentru numărul de mâini. Numărul de picioare este $2g+2m+4c$, adică $2(g+c)+(2m+2c) = 30 + 94 = 124$.

**Problema 5.** O companie de cablu TV transmite doar 3 canale: 1, 2, și 3. De pe telecomanda poti muta de la un canal doar la un alt canal mai mare sau mai mic cu 1. Începi sa vizionezi de la canalul doi și schimbi canalele de 11 ori. Câte secvențe de canale poți obține?

*Rezultat.* 64

*Soluție.* Sunt 12 canale într-o secvență. Canalele din pozițiile pare sunt sigur 2, iar cele din pozițiile impare pot fi 1 sau 3. Sunt șase astfel de poziții, deci obținem $2^6 = 64$.

**Problema 6.** În figură sunt două dreptunghiuri congruente și un unghi dat. Determină măsura unghiului marcat cu semn de întrebare ( în grade).



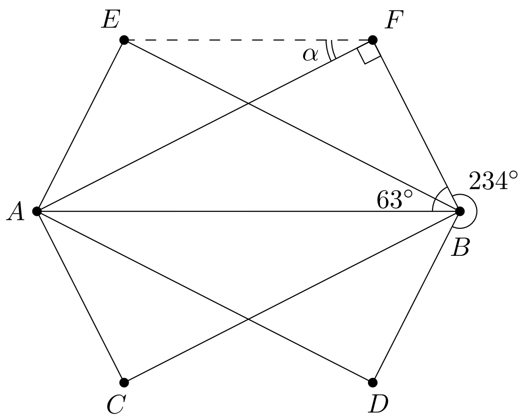

*Rezultat.* 27°

*Soluție.* Notăm vârfurile ca în figură. Diagonala comună $AB$ este bisectoarea unghiului $\angle FBD$, deci

$$\angle FBA = \frac{360° - 234°}{2} = 63°.$$

Cum $EF$ este paralelă cu $AB$, obținem $\angle EFB + \angle FBA = 180°$. Scăzând unghiul drept $\angle AFB$, avem

$$\alpha = 180° - 90° - 63° = 27°.$$




**Problema 7.** Care este valoarea expresiei $x^3 - 14x + 2024$ dacă $x^2 - 4x + 2 = 0$?

*Rezultat.* 2016

*Soluție.* Din $x^3 - 14x + 2024$ scădem $x(x^2 - 4x + 2) = 0$ pentru a anula $x^3$, obținând $4x^2 - 16x + 2024$. Pentru a anula $4x^2$, scădem $4(x^2 - 4x + 2) = 0$ și obținem 2016.

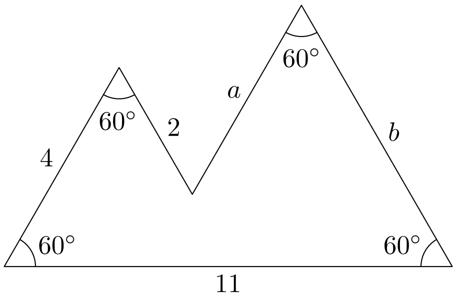
**Problema 8.** Mihai alege un număr natural nenul $n$ și scrie pe o foaie numerele ce reprezintă numărul de cifre pare din numărul ales, numărul de cifre impare din numărul ales și numărul cifrelor numărului ales, în această ordine. Citind aceste trei numere ca și cum ar fi unul singur, de la stânga spre dreapta și ignorând zerourile numerelor din partea stângă, el obține numărul $n$. Cât este cel mai mic astfel de număr $n$?

Spre exemplu, Mihai alege numărul 2024, atunci numărul de cifre pare este 4, numărul de cifra impare este 0, și numărul cifreleor este 4, deci citește numărul 404.

*Rezultat.* 123

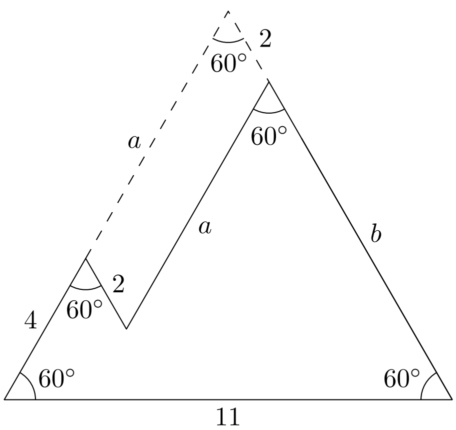
*Soluție.* Numărul căutat nu poate avea o cifră deoarece aceasta poate fi pară sau impară, și deci se va număra în scierea celor trei. Similar, nu poate fi un număr de două cifre, deoarece ar trebui să se termine cu cifra 2, care este pară. Dacă numărul ales are 3 cifre, atunci suma dintre numărul de cifre pare și impare este tot 3. De aceea, numerele posibile sunt 123, 213, și 303. Conform transformărilor din enunț, toate aceste numere generează numărul 123. De aceea, 123 este numărul căutat.

**Problema 9.** În figura alăturată este reprezentat un pentagon cu câteva unghiuri cu măsura egală cu 60°. Determină $a + b$.




*Rezultat.* 16

*Soluție.* Adăugăm în exterior un paralelogram pentru a forma un triunghi echilateral cu lungimea laturii egală cu $11 = 4 + a = 2 + b$, ca în figură.




Obținem $a = 7$, $b = 9$, și $a + b = 16$.

**Problema 10.** În cântecul slovac *Kopala studienku* ("Ea sapă o fântână"), o fată verifică dacă fântâna sa are adâncimea și lățimea sunt egale. Prin definiție, o fântână este un cilindru drept, a cărui înălțime este egală cu adâncimea fântânii și care are diametrul bazei egal cu lățimea fântânii. Ea știe că are nevoie de o săptămână pentru a săpa o fântână cu adâncimea dorită dar doar de $\frac{1}{3}$ din lățimea dorită, în timp ce Janko Matúška are nevoie de o săptămână pentru a săpa o fântână care este suficiebt de adâncă dar doar de jumătate din lățimea necesară. Efortul este proporțional cu volumul de pământ îndepărtat. De câte zile au nevoie cei doi pentru a săpa o fântână împreună?

*Rezultat.* 12

*Soluție.* Timpul necesar este presupus proporțional cu volumul. Volumul cilindrului este dat de formula $V = \frac{\pi}{4} \cdot D \cdot W^2$, unde $D$ este adâncimea și $W$ este lățimea. Deoarece fata are nevoie de 7 zile pentru a îndepărta $\frac{\pi}{4} \cdot \frac{D}{3} \cdot W^2 = \frac{1}{3}V$ de pământ, înseamnă că are nevoie de 21 de zile pentru a îndepărta întregul volum $V$ de pământ. Similar, Janko are nevoie de 7 zile pentru a îndepărta $\frac{\pi}{4} \cdot D \cdot \left(\frac{W}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}V$ de pământ, deci are nevoie de 28 de zile pentru a scoate întregul volum $V$ de pământ. De aceea, fata poate săpa $\frac{1}{21}$ din fântână într-o zi, și băiatul poate săpa $\frac{1}{28}$ din fântână într-o zi. Împreună, ei pot săpa $\frac{1}{21} + \frac{1}{28} = \frac{1}{12}$ din fântână intr-o zi. Concluzionăm că au nevoie de 12 zile pentru a săpa împreună o fântână.

**Problema 11.** Determinați numărul de segmente de lungime $\sqrt{5}$ obținute prin unirea a două vârfuri de pătrate dintr-o grilă de $10 \times 10$ pătrate de latură 1.

*Rezultat.* 360

*Soluție.* Să observăm că fiecare dreptunghi $2 \times 1$ conține două diaoganele de lungime $\sqrt{5}$. Deci, trebuie să numărăm aceste dreptunghiuri. Dacă dreptunghiul este orientat vertical, atunci avem 10 posibilități de a-l plasa intr-o coloană și 9 posibilități într-o linie. În total sunt 90 posibilități de a-l plasa în grila $10 \times 10$. În cazul în care dreptunghiul este orientat orizontal, avem tot 90 de posibilități, deci, în totalsunt $90 + 90 = 180$ dreptunghiuri, adică 360 diagonale.

**Problema 12.** Dacă $M$, $A$, $T$, și $H$ sunt cifre distincte nenule astfel încât are loc egalitatea

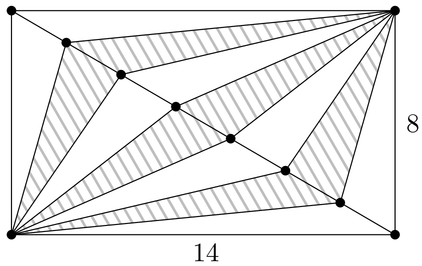
$$2024 + HAHA = MATH$$

, care este cea mai mare posibilă valoare a numărului $MATH$?

*Rezultat.* 5963

*Soluție.* Deoarece $MATH$ și $HAHA$ au aceeași cifră a sutelor și cifra corespunzătoare în 2024 este 0, vedem că nu există nicio transportare atunci când adunăm cifrele zecilor din partea stângă. Prin urmare, $TH = HA + 24$ și $M = H + 2$. Totuși, adăugarea $A$ și 4 trebuie să producă o transportare, pentru că altfel am avea $T = H + 2 = M$ și se presupune că cifrele sunt distincte. Aceasta implică faptul că $H = A + 4 - 10 = A - 6$, deci $M = A - 4$ și $T = A - 3$. Din aceasta, obținem cu ușurință că $MATH$ este unul dintre 3741, 4852 sau 5963, ultima valoare fiind cea mai mare.

**Problema 13.** În dreptunghiul-zebră cu laturile de lungimi 14 și 8, diagonala este împărțită în șapte segmente egale. Cât este aria figurii hașurate?




*Rezultat.* 48

*Soluție.* Deoarece înălțimile din cele două vârfuri până la diagonală au lungimi egale pentru toate triunghiurile implicate, aria umbrită este exact $\frac{3}{7}$ din suprafața totală. Prin urmare, soluția este $\frac{3}{7} \cdot 8 \cdot 14 = 48$.

**Problema 14.** Dacă o fată se alătură unui club de matematică și 20% din numărul de băieți părăsesc clubul, numărul de fete și băieți ar fi egal. Pe de altă parte, dacă o fată părăsește clubul și apoi numărul de fete crește cu 30%, numărul de fete și băieți este iarăși egal. Câți copii sunt în club?

*Rezultat.* 116

*Soluție.* Notăm numărul fetelor cu $g$ și cel al băieților cu $b$. Obținem sistemul de ecuații:

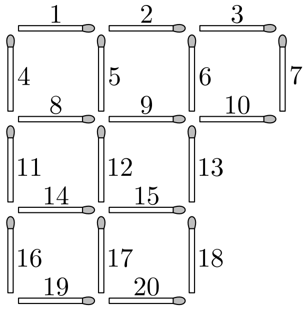
$$g + 1 = \frac{4}{5}b,$$
$$\frac{13}{10}(g - 1) = b.$$

Înlocuind $b = \frac{5}{4}g + \frac{5}{4}$ din prima ecuație în a doua ecuație, obținem

$$\frac{5}{4}g + \frac{5}{4} = \frac{13}{10}g - \frac{13}{10},$$

Obținem $g = 51$, deci $b = \frac{13}{10} \cdot 50 = 65$. Răspunsul este $g + b = 51 + 65 = 116$.

**Problema 15.** Chibriturile din figură formează nouă pătrate. Îndepărtează trei dintre ele astfel încât să rămână cinci pătrate și fiecare chibrit să fie latură în patru din cele cinci pătrate. Află valoarea sumei maxime asociată chibriturilor îndepărtate.




*Rezultat.* 50

*Soluție.* Sunt 7 pătrate cu latura de 1 și două cu latura de 2. Pentru a reduce numărul de pătrate la 5, trebuie sparte exact 4 pătrate. Pentru a elimina pătratul delimitat de $3, 7, 6, 10$, trebuie să eliminăm cel puțin 3 chibrituri. Prin urmare, este unul dintre pătratele care vor rămâne. Este important de reținut că bățul de chibrit 6 nu poate fi îndepărtat, deoarece ar sparge acest pătrat și nu putem colecta bețele de chibrit rămase din acest pătrat. Îndepărtarea bețelor de chibrit 11 sau 13 rupe ambele pătrate mari simultan și un pătrat mic. Dacă unul dintre acele bețe de chibrit este luat, atunci ultimul pătrat trebuie să fie spart de două îndepărtări:

1. dacă bățul 11 rămâne; atunci există posibilitatea de a îndepărta perechile de bețe 12 și 13 sau 18 și 20.

2. dacă bățul 13 rămâne, atunci ar fi perchile 1, 4, sau 11, 12 sau 16, 19.

Dintre acestea, îndepărtarea bețelor 11, 18, and 20 conduce la cea mai mare sumă: 49.

Bețele 5, 12, 17, 3, 7, și 10 sunt singurele care nu fac parte dintr-un pătrat mare. Cum 3, 7, și 10 nu pot fi îndepărtate, atunci rămân spre îndepărtare doar 5, 12 și 17. Oricum, o astfel de îndepărtare nu conduce la o configurație validă, deci concluzionăm că cel puțin un pătrat mare trebuie spart.

Cum bățul 6 nu poate fi luat și un pătrat mare trebuie spart, presupunem că ambele bețe din următoarele perechi trebuiesc îndepărtate: 18, 20 sau 16, 19, sau 1, 4. O astfel de îndepărtare distruge duoă pătrate, unul mare și unul mic. După aceea, mai trebuie luat un băț care va distruge două pătrate.

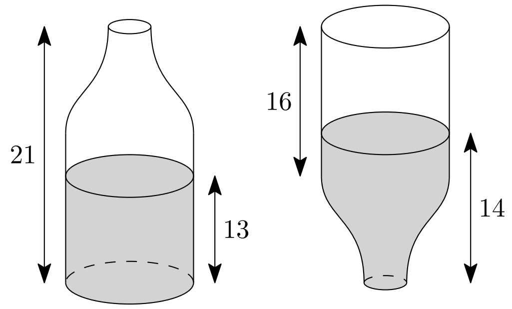
1. Dacă 1 sau 4 este luat, valoarea maximă a bețelor luate este $1 + 4 + 20$ care este mai mică decât 49 deci, acest caz nu convine.

2. Dacă perechea 18 și 20 este luată, singurele bețe care duc la distrugerea a două pătrate sunt 11, 12, 5, 9 și 8. Suma maximă o să fie $18 + 20 + 12 = 50$

3. Dacă perechea 16 și 19 este luată, bețele ce duc la distrugerea a două pătrate sunt 5, 8, 9, 12, și 13. Suma maximă este $13 + 16 + 19 = 48$.

Deci, 50, este răspunsul căutat.

**Problema 16.** Lucas are o sticlă de înălțime 21. Sticla este formată dintr-un cilindru drept cu înălțimea de 16 și o formă neregulată ca gât. Lucas umple parțial sticla cu apă și observă că apă a juns la o înălțime egală cu 13. Închide sticla și o întoarce cu dopul în jos și observă că apa a juns la o înălțime agală cu 14. Calculați procentul din volumul sticlei care a fost umplut cu apă.

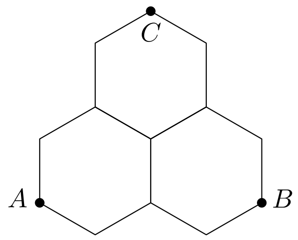


*Rezultat.* 65

*Soluție.* Fie $r$ raza bazei sticlei. Din prima configurație, volumul de apă din sticlă este $13\pi r^2$. Similar, din a doua configurație, volumul de aer din sticlă este $(21-14)\pi r^2 = 7\pi r^2$. Deci, sticla are un volum egal cu $(13+7)\pi r^2 = 20\pi r^2$ și procentul cerut este

$$\frac{13\pi r^2}{20\pi r^2} = \frac{13}{20} = 65\,\%.$$

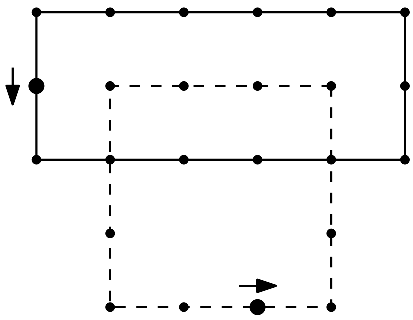
**Problema 17.** Ondra locuiește în Hexagonia, un oraș în care toate străzile au 1 km lungime și formează trei hexagoane regulate. El dorește să o ia pe prietena lui și apoi să meargă împreună la cinema. În figură, Ondra pornește din punctul $A$, prietena lui locuiește în punctul $B$ și sala de cinema este în punctul $C$. El nu dorește să treacă de două ori pe aceeași stradă. Care este suma lungimilor tutror străzilor pe care poate merge (în kilometri)?




*Rezultat.* 28

*Soluție.* Sunt patru drumuri de la $A$ la $B$ care nu trec prin $C$. Unul dintre ele are două rute spre $C$, unul are exact o posibilitate de a ajunge în $C$, iar celelalte două străbat o stradă de două ori pentru a ajunge în $C$. Deci, sunt trei doar trei rute convenabile, dintra care două au lungimea de 10 și a treia de 8, în total 28.

**Problema 18.** Doi paznici patrulează pe rute dreptunghiulare, ca în figură. Ei merg cu viteză constantă, ajungând dintr-un punct de observație la altul într-un minut. După cât timp cei doi se vor întâlni prima dată?



*Rezultat.* 44

*Soluție.* Fie gardianul $A$ cel care are nevoie de 14 minute (cale dreptunghiulară) și $B$ cel care are nevoie de 12 minute (cale pătrată) pentru a finaliza o rundă. Există două posibile puncte de întâlnire pentru gardieni. Dacă se întâlnesc în stânga după $a$ runde complete făcute de $A$ și $b$ runde complete făcute de $B$, atunci condiția

$$14a + 2 = 12b + 8$$

trebuie să fie valabilă. Această ecuație se simplifică la $7a = 6b + 3$, implicând $7 \mid 6b + 3$. Încercând $b \in \{0, 1, 2 \dots\}$ vedem că $b = 3$ și $a = 3$ este cea mai mică soluție. În mod similar, gărzile se întâlnesc în punctul potrivit dacă

$$14a + 5 = 12b + 3$$

este satisfăcută. Prin urmare, obținem $7a = 6b - 1$. Deci avem $7 \mid 6b - 1$, care forțează $b \geq 6$. Prin urmare, se întâlnesc pentru prima dată după $14 \cdot 3 + 2 = 44$ minute.

**Problema 19.** Numerele naturale nenule $a$, $b$, și $c$ satisfac ecuațiile

$$\sqrt{a^2+b^2-172}=c,$$
$$\sqrt{c^2+b^2-220}=a.$$

Care este valoarea maximă a sumei $a+b+c$?

*Rezultat.* 26

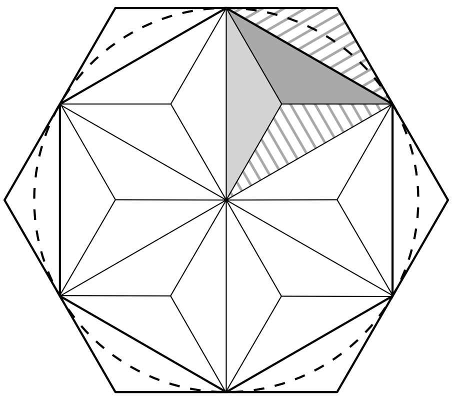
*Soluție.* Se ridică la pătrat ambele ecuații și calculați suma lor pentru a obține $2b^2=392$. Deoarece $b$ trebuie să fie pozitiv, $b=14$ este singura soluție. Introducând această valoare în pătratul primei ecuații, obținem $a^2+24=c^2$ sau $c^2-a^2=24$. Pune $d=c-a$; atunci $d$ este un număr par, deoarece $c$ și $a$ sunt fie ambele pare, fie ambele impare.

Valoarea lui $c^2-a^2=(c-a)(c+a)$ poate fi mărginită de jos de $d(d+2)$, care pentru $d\geq 6$ este de cel puțin 48, un număr mai mare de 24. Prin urmare, singurele opțiuni pentru $d$ sunt $d=2$ și $d=4$. În primul caz, obținem $a+c=12$ cu soluția $a=5$ și $c=7$. În acest din urmă caz, $a+c=6$ cu soluția $a=1$ și $c=5$. Prin urmare, cea mai mare valoare posibilă a $a+b+c$ este $5+14+7=26$.

**Problema 20.** Un cerc este înscris într-un hexagon regulat și un alt hexagon regulat este înscris în el. Care este raportul în care aria hexagonului circumscris este acoperită de aria hexagonului înscris?

*Rezultat.* $\frac{3}{4}$

*Soluție.* Subîmpărțirea în triunghiuri congruente ca în figură și numărarea duce la răspunsul $18/24=3/4$.



*Soluție alternativă.* Fie $r$ raza cercului. Ambele hexagoane pot fi subdivizate în 6 triunghiuri echilaterale; pentru hexagonul înscris, înălțimea fiecărui triunghi este $\frac{1}{2}\sqrt{3}\,r$, în timp ce pentru cel circumscris este $r$. Prin urmare, factorul de scalare pentru lungimi este $k=\frac{1}{2}\sqrt{3}$ și, în consecință, factorul de scalare pentru arii este $k^2=\frac{3}{4}$.

**Problema 21.** Numim a $n$-a zi de naștere o *zi de naștere miracol* dacă $n>1$ și ce câte ori un număr prim $p$ îl divide pe $n$, atunci, de asemenea $p^2$ îl divide pe $n$. Sre exemplu, $n=8=2^3$ este bun, în timp ce $n=56=8\cdot 7$ nu. În acest an, bunicul Jefo își celebrează a 196 zi de naștere. Câte *zile de naștere miracol* a avut el?

*Rezultat.* 20

*Soluție.* Orice număr pătrat al zilei de naștere trebuie să fie compus din unul sau mai mulți factori de forma $p^k$ unde $k>1$. Toți astfel de factori mai mici sau egali cu 196 sunt $S=\{4,8,9,16,25,27,32,36,49,64,81,100,121,125,128,144,169,196\}$. Putem vedea că produsul a cel puțin două numere din $S$ mai mare de 27 fie aparține lui $S$, fie este mai mare de 196. Dintre numerele mai mici sau egale cu 27, doar $8=2^3$ și $27=3^3$ nu sunt pătrate perfecte. Deoarece un produs de pătrate perfecte este un pătrat perfect, fie înseamnă că rezultatul ar aparține fie lui $S$, fie ar fi mai mare de 196. În cele din urmă, produsele care folosesc 8 sau 27 și alte numere din $S$ care sunt mai mici de 196 și care nu sunt deja în $S$ sunt $27\cdot 4=108$ și $8\cdot 9=72$. Rezultă că există $18+2=20$ astfel de numere.

**Problema 22.** Concursul de matematică Mathematical Charge se desfășoară de 10 ani. În anul $n$, numărul întrebărilor din concurs a fost $n+2$, toate fiind numerotate în forma obișnuită de la 1 la $n+2$. Pentru ediția a 11-a a concursului, organizatorii doresc să preia câte o întrebare din fiecare din anii anteriori astfel încât să formeze un test de 10 întrebări numerotate de la 1 la 10, folosind numerele deja alocate întrebărilor în testele anterioare. Câte teste pot alcătui ei, presupunând că oricare două întrebări din testele anterioare nu sunt identice?

*Rezultat.* 13122

*Soluție.* Organizatorii au trei întrebări din care să aleagă în cadrul concursului nr. 1. Ei pot alege una dintre întrebările posibile de $4 - 1 = 3$ din al doilea concurs, deoarece un număr de întrebare este deja ocupat. Este ușor de observat că acest tipar rămâne, și anume că în concursul $k$-a există deja $k - 1$ întrebări indisponibile din cauza (unelor) opțiuni anterioare lăsând trei opțiuni, până la concursul nr. 9 care conține un număr de întrebare 11 care este prea mare, lăsând astfel doar două întrebări de ales. În final, din testul nr. 10, există întrebări nr. 11 și nr. 12, care nu pot fi alese, rămânând o singură întrebare potrivită. În total, există $3^8 \cdot 2 = 13122$ astfel de teste.

**Problema 23.** Determinați cel mai mic număr natural ce are prima cifră egală cu 1 și următoarea proprietate: Când prima cifră 1 se mută la finalul numărului, numărul rezultat este de trei ori mai mare decât cel inițial.

Spre exemplu, numărul 174 devine 741 prin repoziționarea primei cifre la final.

*Rezultat.* 142857

*Soluție.* Știind că ultima cifră a numărului este 1, puteți încerca să reconstruiți numărul înapoi, după cum urmează:

$$\begin{aligned} \ldots x \cdot 3 = \ldots 1 &\Rightarrow x = 7 \\ \ldots y7 \cdot 3 = \ldots 71 &\Rightarrow y = 5 \\ \ldots z57 \cdot 3 = \ldots 571 &\Rightarrow z = 8 \\ \ldots t857 \cdot 3 = \ldots 8571 &\Rightarrow t = 2 \\ \ldots s2857 \cdot 3 = \ldots 28571 &\Rightarrow s = 4 \\ \ldots r42857 \cdot 3 = \ldots 428571 &\Rightarrow r = 1. \end{aligned}$$

Intr-adevăr, $142857 \cdot 3 = 428571$ convine.

*Soluție alternativă.* Orice număr întreg pozitiv care începe cu cifra 1 și cel puțin două cifre poate fi scris ca $10^k + a$ pentru un $k \geq 1$ și un număr $k$-cifre $a$. După mutarea cifrei 1 de la început la sfârșit, numărul se schimbă în $10a + 1$. Prin urmare, vrem să rezolvăm ecuația

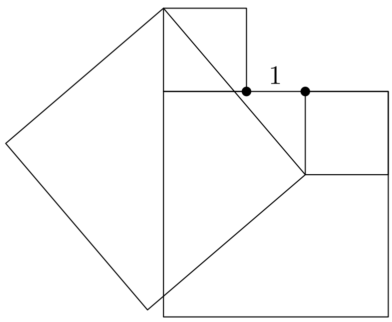
$$3 \cdot (10^k + a) = 10a + 1$$

pentru $k$ și $a$; haideți să o simplificăm

$$3 \cdot 10^k - 1 = 7a.$$

Numărul din partea stângă nu este altceva decât 2 urmat de $k$ nouă. Luați câte cifre de nouă este nevoie și împărțiți numărul $2999\ldots$ la 7 până când nu mai rămâne rest. Acest proces duce la $a = 42857$ și astfel la soluția 142857.

**Problema 24.** În figură sunt prezentate două perechi de pătrate congruente și două puncte situate la distanța 1 unul față de altul. Care este suma ariilor celor patru pătrate?

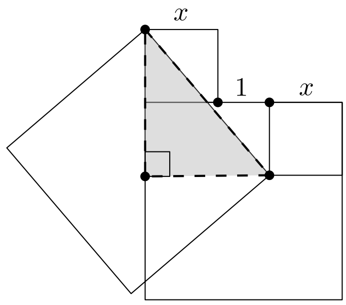



*Rezultat.* 58

*Soluție.* Notând $x$ lungimea laterală a pătratelor mai mici și folosind teorema lui Pitagora pentru triunghiul dreptunghic umbrit din imagine, obținem

$$(2x)^2 + (1 + x)^2 = (1 + 2x)^2.$$

Această ecuație se simplifică la $x^2 = 2x$, deci obținem $x = 2$. Răspunsul este atunci $2(2^2 + 5^2) = 58$.




**Problema 25.** Alpinistul Christian este coborât de pe vârful unui perete vertical. Aceasta înseamnă că este legat de un capăt al frânghiei, care trece printr-un punct fix în vârful peretelui și apoi în jos până la Lukas, care stă pe pământ și lasă frânghia să alunece într-un mod controlat. Coarda este elastică, iar greutatea lui Christian face ca partea încărcată (între el și Lukas) să se întindă cu 20 %. Frânghia are un semn în mijloc și, pe măsură ce Christian este coborât, el întâlnește acel semn la o treime din înălțimea zidului deasupra solului. Este ușurat, deoarece acest lucru îl asigură că frânghia este suficient de lungă și începe să se întrebe cât de înalt este de fapt peretele. Când atinge pământul și frânghia nu s-a slăbit încă, au mai rămas 10 metri de frânghie slăbită. Neglijând înălțimile oamenilor și lungimile nodurilor folosite, care este înălțimea zidului în metri?

*Rezultat.* 18

*Soluție.* Să notăm lungimea frânghiei neîntinse cu $l$ și înălțimea peretelui cu $h$. Când alpinistul întâlnește marcajul, o jumătate de frânghie (întinsă) acoperă de două ori distanța alpinistului de la vârf, deci avem

$$\frac{6}{5} \cdot \frac{l}{2} = 2 \cdot \frac{2h}{3}.$$

Când alpinistul atinge pământul, obținem în mod similar

$$\frac{6}{5}(l - 10) = 2h,$$

care, după înlocuirea $l = \frac{20h}{9}$ din prima ecuație, se rezolvă ușor și are ca rezultat $h = 18$.

**Problema 26.** Într-un sertar sunt $n$ șosete. Când două șosete se scot la întâmplare, fără a le pune înapoi, probabilitatea ca acestea să fie negre este de $2/15$. Care este cea mai mică valoare posibilă a numărului $n$?

*Rezultat.* 10

*Soluție.* Fie $b$ numărul de șosete negre. Atunci probabilitatea ca ambele șosete să fie negre este $\frac{b}{n} \cdot \frac{b-1}{n-1}$. Deoarece această expresie este egală cu $\frac{2}{15}$, trebuie să fie valabilă următoarea ecuație:

$$15 \cdot b \cdot (b - 1) = 2 \cdot n \cdot (n - 1)$$

Deoarece ambele 3 și 5 împart partea stângă și ambele sunt coprime cu 2, ele trebuie să dividă $n \cdot (n - 1)$ din partea dreaptă. Acum începeți cu multipli mici de 3 și 5 pentru $n$ pentru a descoperi că $n = 6$ duce la $15 \cdot b \cdot (b-1) = 2 \cdot 6 \cdot 5 = 60$. Totuși, $b \cdot (b - 1) = 4$ nu poate fi îndeplinit de niciun număr întreg, prin urmare $n = 6$ nu este o soluție. Dacă $n = 10$, atunci $b \cdot (b - 1) = 12$ poate fi obținut cu $b = 4$. Prin urmare, răspunsul pentru $n$ este 10.

**Problema 27.** Aflați cel mai mare număr natural nenul care satisface condițiile:

- are exact șapte cifre,
- are cifrele distincte,
- este multiplu de 11.

*Rezultat.* 9876504

*Soluție.* Vom folosi condiția divizibilității cu 11: un număr este divizibil cu 11 dacă și numai dacă diferența dintre suma cifrelor sale de pe pozițiile impare și suma cifrelor sale de pe pozițiile pare este divizibilă cu 11.

Dintre toate numerele cu un anumit număr de cifre, șapte în acest caz, cele mai mari sunt cele care încep cu cele mai mari cifre. Astfel, să începem să căutăm o soluție prin alegerea cifrelor de la 9 în jos. După ce scriem 98765, vedem că suma grupului “impar” este $9 + 7 + 5 = 21$ iar suma grupului “par” este $8 + 6 = 14$. Diferența este de 7 și trebuie să o facem divizibilă cu 11, folosind doar două cifre din setul $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Singura modalitate este să adăugați 0 la grupul “par” și 4 la grupul “impar”, care produce soluția 9876504. Deoarece toate celelalte soluții ar trebui să înceapă cu o secvență de cinci cifre mai mică de 98765, aceasta este într-adevăr cea mai mare.

*Soluție alternativă.* Începeți cu cel mai mare număr, 9876543, format din șapte cifre distincte. Observați fie folosind regula despre împărțirea cu 11, fie făcând diviziune lungă că acest număr nu este divizibil cu 11, dar 9876537 este și acesta este cel mai mare multiplu de 11 mai mic decât numărul cu care am început. Deoarece cifrele sale nu sunt distincte, scădem 11 și verificăm cifrele numărului nou obținut în ceea ce privește distincția. După câtiva pași

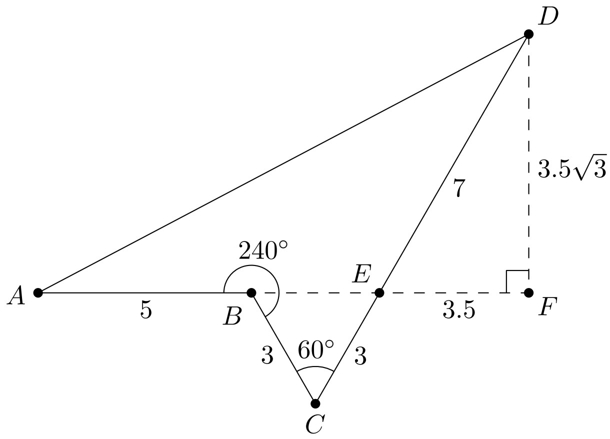
$$9876537 \longrightarrow 9876526 \longrightarrow 9876515 \longrightarrow 9876504$$

obținem numărul căutat, 9876504.

**Problema 28.** Considerăm un patrulater $ABCD$ cu lungimile laturilor $AB = 5$, $BC = 3$, și $CD = 10$. Măsura unghiului $B$ este de $240°$ și măsura unghilui $C$ este de $60°$. Determinați lungimea laturii $AD$.

*Rezultat.* 13

*Soluție.* Să creăm un triunghi echilateral $BCE$ cu $E$ pe segmentul $CD$. Atunci $AED$ este un triunghi unde $AE = 8$, $ED = 7$ și $\angle DEA = 120°$. Prin urmare, prin Legea Cosinusului, $AD^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \cos 120° = 169$, deci $AD = 13$.




*Soluție alternativă.* Dacă triunghiul $AED$ este extins cu jumătate dintr-un triunghi echilateral cu lungimea laturii 7, putem folosi teorema lui Pitagora pentru a obține $AD^2 = (5 + 3 + 3.5)^2 + (3.5 \cdot \sqrt{3})^2 = 169$.

**Problema 29.** Fie $a$, $b$, $c$, și $d$ numere naturale nenule. Câte soluții distincte are ecuația

$$2024 = (2 + a) \cdot (0 + b) \cdot (2 + c) \cdot (4 + d)$$

? Notă: O soluție a ecuației date este un cvadruplu ordonat $(a, b, c, d)$.

*Rezultat.* 18

*Soluție.* Mai întâi de toate avem nevoie de factorizarea în factori primi a numărului 2024, adică

$$2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23.$$

Deoarece $a$, $b$, $c$ și $d$ sunt numere întregi pozitive, avem $2 + a \geq 3$, $2 + c \geq 3$ și $4 + d \geq 5$. Un factor 1 sau un factor 2 în partea dreaptă poate apărea o singură dată în $(0 + b)$, iar un factor 4 poate apărea numai în $(2 + a)$ sau $(2 + c)$.

Deoarece produsul din partea dreaptă a ecuației date constă din patru factori, există patru factorizări posibile ale numărului 2024, în care cel mult un factor fiind mai mic de 4, și anume

$$2024 = 1 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 23 \quad \text{și} \quad 2024 = 1 \cdot 4 \cdot 22 \cdot 23 \quad \text{și} \quad 2024 = 1 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 46 \quad \text{și} \quad 2024 = 2 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 23.$$

Pentru prima factorizare, avem $b = 1$, iar factorii rămași pot fi atribuiți la $a + 2$, $c + 2$ și $d + 4$ în orice ordine, obținând o soluție de 6. În a doua factorizare, avem $b = 1$, apoi fie $a + 2 = 4$ fie $c + 2 = 4$. Și în fiecare dintre aceste cazuri, factorii rămași pot fi alocați în două moduri, deci există în total 4 soluții pentru a doua factorizare. În mod analog, există 4 soluții pentru fiecare dintre a treia și a patra factorizare. Prin urmare, în total, există 18 soluții cvadruple diferite:

| factorization of 2024 | solution | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $2024 = 8 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 23$ | 6 | 1 | 9 | 19 |
| $2024 = 8 \cdot 1 \cdot 23 \cdot 11$ | 6 | 1 | 21 | 7 |
| $2024 = 11 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 23$ | 9 | 1 | 6 | 19 |
| $2024 = 11 \cdot 1 \cdot 23 \cdot 8$ | 9 | 1 | 21 | 4 |
| $2024 = 23 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 11$ | 21 | 1 | 6 | 7 |
| $2024 = 23 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 8$ | 21 | 1 | 9 | 4 |
| $2024 = 4 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$ | 2 | 2 | 9 | 19 |
| $2024 = 4 \cdot 2 \cdot 23 \cdot 11$ | 2 | 2 | 21 | 7 |
| $2024 = 11 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 23$ | 9 | 2 | 2 | 19 |
| $2024 = 23 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 11$ | 21 | 2 | 2 | 7 |
| $2024 = 4 \cdot 1 \cdot 22 \cdot 23$ | 2 | 1 | 20 | 19 |
| $2024 = 4 \cdot 1 \cdot 23 \cdot 22$ | 2 | 1 | 21 | 18 |
| $2024 = 4 \cdot 1 \cdot 46 \cdot 11$ | 2 | 1 | 44 | 7 |
| $2024 = 4 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 46$ | 2 | 1 | 9 | 42 |
| $2024 = 22 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 23$ | 20 | 1 | 2 | 19 |
| $2024 = 23 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 22$ | 21 | 1 | 2 | 18 |
| $2024 = 46 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 11$ | 44 | 1 | 2 | 7 |
| $2024 = 11 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 46$ | 9 | 1 | 2 | 42 |

**Problema 30.** Fie $x$ și $y$ numere naturale nenule astfel încât

$$2^x \cdot 3^y = \left(24^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{60}}\right) \cdot \left(24^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{60}}\right)^2 \cdot \left(24^{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{60}}\right)^3 \cdots \left(24^{\frac{1}{60}}\right)^{59}.$$

Determinați $x + y$.

*Rezultat.* 3540

*Soluție.* Considerând $2^x \cdot 3^y = 24^k$, avem

$$\begin{aligned}
k &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{60} + \frac{2}{60} + \cdots + \frac{59}{60}\right) = \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \cdots + \frac{59}{2} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+59) \cdot 59}{2} = \\
&= 15 \cdot 59.
\end{aligned}$$

Atunci, $2^x \cdot 3^y = (2^3 \cdot 3^1)^{15 \cdot 59}$, adică $x = 3 \cdot 15 \cdot 59 = 45 \cdot 59$ și $y = 15 \cdot 59$. De aceea, $x + y = 60 \cdot 59 = 3540$.

**Problema 31.** Anei îi plac merele, mai ales merele roșii și verzi așezate în șiruri de lungime 18 astfel încât oricare zece mere consecutive conțin cel puțin șapte mere verzi. Câte astfel de șiruri conțin cel mult opt mere verzi?

*Rezultat.* 21

*Soluție.* Să ne concentrăm doar pe prima și ultima duzină pentru moment. Dacă semiduzina de mere din mijloc (adică merele 7–12) conține doar mere verzi, atât primei cât și ultimei duzine îi lipsește doar un măr verde, care este ușor de rezolvat prin plasarea unui măr verde în ambele, deci sunt suficiente opt mere verzi. Dacă unele dintre merele din mijloc sunt roșii, ar fi nevoie de mai multe mere verzi în total, deoarece pentru fiecare măr verde scos din semiduzina de mijloc trebuie să adăugați două mere (unul în prima semiduzină și celălalt unul în ultima semiduzină). Prin urmare, 8 este cantitatea minimă de mere verzi necesară, șase dintre ele fiind plasate în mijloc, unul la început și unul spre sfârșit.

Cu toate acestea, primul măr verde și ultimul măr verde nu pot fi așezate în semizecile lor în mod arbitrar. Pentru a îndeplini condiția pentru fiecare duzină de mere consecutive, distanța dintre cele două mere verzi nu poate depăși 12, de ex. dacă primul măr verde este plasat la poziția 2, ultimul poate fi plasat fie la poziția 13, fie la pozitia 14. În funcție de poziția primului măr, ultimul măr are astfel poziții posibile de la 1 până la 6. Adunarea acestora dă $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ secvențe posibile.

**Problema 32.** Fero are monede cu valorile de 1 cent, 2 cenți, și 5 cenți. El are 33 monede de 1 cent, 106 de 2 cenți și 31 de 5 cenți. El dorește să le împartă în două grămezi cu același număr de monede și aceeași sumă, și să îi dea surorii sale o grămadă.În câte moduri poate el să facă acest lucru? Monedele de aceeași valoare sunt considerate identice ca aspect.

*Rezultat.* 12

*Soluție.* Fie $a$, $b$, $c$ numărul de monede 1 ct, 2 ct și, respectiv, 5 ct, în grămada surorii. Apoi, avem ecuațiile

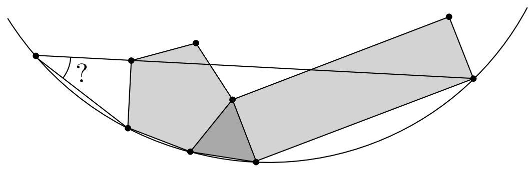
$$a + b + c = \frac{1}{2}(33 + 106 + 31) = 85,$$

și

$$a + 2b + 5c = \frac{1}{2}(33 + 2 \cdot 106 + 5 \cdot 31) = 200.$$

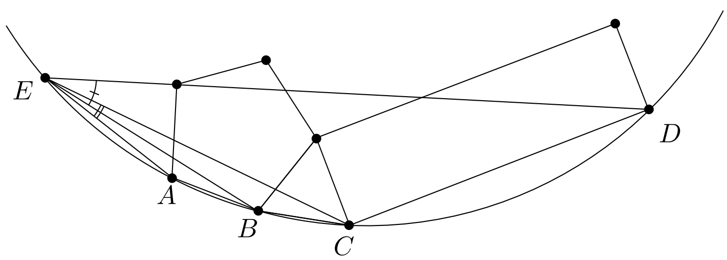
Scăzând prima ecuație din a doua, obținem $b + 4c = 115$. Această ecuație are mai multe soluții de forma $b = 115 - 4c$ pentru orice $c$ dat. Totuși, constrângerile $0 < 115 - 4c < 106$ pentru $b$ implică $c \in \{3, 4, \dots, 28\}$. Dar nu toate soluțiile au o sumă validă de monede 1 ct. Prin urmare, trebuie să adăugăm condiția $0 \leq 85 - (115 - 4c + c) = -30 + 3c \leq 33$ pentru $c$. Putem vedea că numai valorile lui $c$ din setul $\{10, 11, \dots 21\}$ conduc la o soluție validă. Prin urmare, există 12 moduri posibile.

**Problema 33.** În figura alăturată, un triunghi echilateral, un pentagon regulat, și un dreptunghi sunt desenate astfel încât unele vârfuri sunt pe un cerc. Determinați valoarea în grade a unghiului marcat în desen cu semnul întrebării.




*Rezultat.* $36°$

*Soluție.* Răspunsul este $36°$. Desenați un segment de la marginea triunghiului echilateral până la marginea pentagonului. Am avea un patrulater ciclic. Deci, unul dintre unghiurile sale ar fi $180° - x$.




Notăm vârfurile ca în figură. Atunci, am avea un triunghi isoscel cu un unghi egal cu $168°$. Prin urmare, am avea două unghiuri de $6°$. Adică $6° + 180° - x = 150°$. Prin urmare $x = 36°$.

**Problema 34.** În câte moduri se pot așeza 9 turnuri pe o tablă de șah $4 \times 4$ astfel încât fiecare turn să fie atacat de o altă turn? Două turnuri se atacă unul pe altul dacă sunt așezați pe aceeași linie sau coloană.

*Rezultat.* 11296

*Soluție.* Să numărăm numărul de configurații în care cel puțin un turn nu este atacat de niciun alt turn. Un astfel de turn trebuie să fie singur în rând și coloană în același timp, ceea ce înseamnă că există cel mult un astfel de turn. Poate fi plasat în orice pătrat în $4 \cdot 4 = 16$ moduri. Îndepărtând rândul și coloana corespunzătoare, se lasă nouă pătrate în care trebuie să se potrivească celelalte opt turnuri. Acest pătrat gol poate fi ales în 9 moduri. În total, există $16 \cdot 9 = 144$ moduri pentru a face asta. Numărul total de moduri de a alege nouă pătrate din șaisprezece pătrate este egal cu $\binom{16}{9} = 11440$ și, prin urmare, rezultatul dorit este $11440 - 144 = 11296$.

**Problema 35.** Gasiți cel mai mare număr natural nenul $N$ care nu este număr prim și care are toți divizorii, cu excepția lui $N$, mai mici decât 100.

*Rezultat.* 9409

*Soluție.* Deoarece $N$ nu este un număr prim, fie este 1, fie există un număr prim $p < N$ care împarte $N$. Cerința $p < 100$ duce la

$$p \leq 97.$$

Observați că $N = 97^2 = 9409$ îndeplinește condițiile.

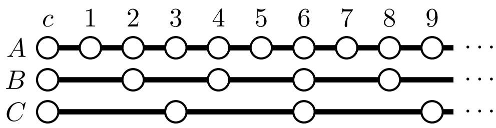
Acum să presupunem că există un număr $N' > 9409$ care îndeplinește și condițiile date. Dacă $p \leq 97$ este un număr prim care împarte $N'$, coeficientul $\frac{N'}{p}$ este un număr întreg mai mare decât 97. Acest lucru generează $\frac{N'}{p} \in \{98, 99\}$, deoarece orice divizor al lui $N'$ trebuie să fie mai mic de 100. Dar atunci $N'$ este divizibil cu $k \in \{2, 3\}$, iar condiția dată duce la

$$N' = k \cdot \frac{N'}{k} \leq 3 \cdot 99 < 97^2,$$

care este o contradicție.

Prin urmare, $N = 9409$ este numărul căutat.

**Problema 36.** În Line City, există trei linii de autobuz, o stație centrală și stații de autobuz numerotate cu numere naturale nenule $1, 2, 3, \ldots$ Toate cele trei linii încep de la gara centrală, notată cu $c$ în figură, și trec prin toate stațiile în ordine crescătoare. Linia $A$ se oprește în fiecare stație (numerele $1, 2, 3, \ldots$), linia $B$ se oprește doar în stațiile numere pare (numerele $2, 4, 6, \ldots$), iar linia $C$ se oprește numai în stațiile ale căror numere se divid cu 3 (numerele $3, 6, 9, \ldots$). Danko își începe călătoria de la gara centrală, ia un autobuz și își propune să călătorească până la stația 17. În fiecare stație în care oprește autobuzul în care se află, el poate fie să coboare din autobuz și să ia altul, fie să continue cu același autobuz până la următoarea stație. În câte moduri poate Danko să ajungă la destinația sa finală dacă călătoriile care diferă doar în timpii de așteptare sunt considerate a fi identice?




*Rezultat.* 845

*Soluție.* Notăm cu $s_0$ o stație de autobuz în care opresc toate cele trei linii, și notăm cu $s_k$ a k-a stație de autobuz după $s_0$ de pe banda de autobuz $A$. Acum calculăm în câte moduri poate ajunge Danko la stația de autobuz $s_6$ de la stația de autobuz $s_0$.

1. Danko poate ajunge la stația de autobuz $s_1$ într-un singur mod, și anume pe banda de autobuz $A$.

2. Există două moduri de a ajunge la stația de autobuz $s_2$, fie pe banda de autobuz $A$ de la stația de autobuz $s_1$, fie pe banda de autobuz $B$ de la stația de autobuz $s_0$.

3. Pentru a ajunge la stația de autobuz $s_3$, Danko fie autobuzul $C$ de la stația de autobuz $s_0$, fie autobuzul $A$ de la stația de autobuz $s_2$, la care se poate ajunge în 2 moduri ; prin urmare, există 3 posibilități.

4. Pentru a ajunge la stația de autobuz $s_4$, pentru linia $A$ se ajunge de la stația $s_3$, pentru linia $B$ de la stația $s_2$, prin urmare, există $3 + 2 = 5$ posibilități.

5. Pentru a ajunge la stația de autobuz $s_5$, există o singură cale, și anume pe banda $A$ de la stația $s_4$, prin urmare, există 5 posibilități.

6. În cele din urmă, pentru a ajunge la stația de autobuz $s_6$, pentru linia $A$ se ajunge de la stația de autobuz $s_5$, pentru linia $B$ de la stația de autobuz $s_4$, pentru linia $C$ de la stația de autobuz $s_3$, prin urmare, există $3 + 5 + 5 = 13$ posibilități.

Stațiile de autobuz unde opresc toate liniile sunt gara centrală $c$, stația de autobuz nr. 6 și stația de autobuz nr. 12. Deoarece orice stație de autobuz în care opresc toate liniile de autobuz poate acționa ca stație de autobuz $s_0$, există 13 modalități prin care Danko poate ajunge la stația de autobuz nr. 6 de la gara centrală $c$ și la stația de autobuz nr. 12 de la statia de autobuz nr. 6. Se poate deduce că pentru a ajunge la stația 17-a de la stația nr. 12 este același lucru cu a ajunge la stația de autobuz $s_5$ de la $s_0$ și, prin urmare, există 5 posibilități. Împreună, există $5 \cdot 13 \cdot 13 = 845$ modalități prin care Danko poate ajunge la oprirea nr.$17.

*Soluție alternativă.* Să ne referim la stații după numerele lor, setând $c = 0$. Fiecare stație $s$ este accesibilă prin linia $A$, astfel încât fiecare călătorie de la stația anterioară $s-1$ poate fi extinsă la stația $s$ pe linia $A$. Dacă linia $B$ se oprește la $s$, atunci călătoriile pot fi prelungite de la stația $s-2$ la $s$ prin linia $B$. Un fapt similar este valabil și pentru oprirea $s$ unde linia $C$ se oprește. Prin urmare, dacă notăm cu $J(s)$ numărul de moduri prin care Danko poate ajunge la oprirea $s$, atunci pentru $s \geq 1$ obținem

$$\begin{aligned} J(s) = J(s-1)& \\ &+ J(s-2) \text{ dacă } s \text{ este divizibil cu 2} \\ &+ J(s-3) \text{ dacă } s \text{ este divizibil cu 3.} \end{aligned}$$

Deoarece oprirea centrală este "accesabilă" într-un singur mod, avem $J(0) = 1$ și putem determina $J(17)$ folosind recurența dată; săgețile de sub tabel arată ce valori sunt adăugate pentru a da numărul din fiecare celulă.

| $s$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $J(s)$ | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 5 | 13 | 13 | 26 | 39 | 65 | 65 | 169 | 169 | 338 | 507 | 845 | 845 |

**Problema 37.** Prin $\lfloor x \rfloor$ notăm cel mai mare număr întreg care nu este mai mare ca numărul real $x$. Fie $a_1, a_2, \ldots$ un șir de numere reale astfel încât $a_1 = \sqrt{3}$ și pentru orice $n \geq 1$, avem

$$a_{n+1} = \lfloor a_n \rfloor + \frac{1}{a_n - \lfloor a_n \rfloor}.$$

Care este valoare numărului $a_{2024}$?

*Rezultat.* $3034 + \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 3035 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

*Soluție.* Observăm că $a_1$ are partea zecimală $a_1 - \lfloor a_1 \rfloor = \sqrt{3} - 1$. Prin urmare, poate fi scris ca $a_1 = 1 + \sqrt{3} - 1$. Calculăm primii termeni

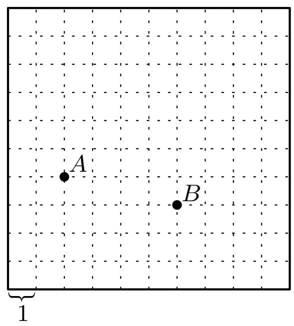
$$\begin{aligned} a_2 &= 1 + \frac{1}{\sqrt{3}-1} = 1 + \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 2 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \\ a_3 &= 2 + \frac{2}{\sqrt{3}-1} = 2 + \frac{2\sqrt{3}+2}{2} = 2 + \sqrt{3} + 1 = 3 + 1 + \sqrt{3} - 1, \\ a_4 &= 4 + \frac{1}{\sqrt{3}-1} = 4 + \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 3 + 2 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}. \end{aligned}$$

Observăm că $a_1$ și $a_3$ au aceeași parte zecimală $\sqrt{3} - 1$ și diferența $a_3 - a_1 = 3$. Același raționament se aplică termenilor $a_2$ și $a_4$, care au aceeași parte zecimală $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ și diferența $a_4 - a_2 = 3$. Acest lucru ne conduce la $a_{2k+1} = 3k + 1 + \sqrt{3} - 1$ și $a_{2k+2} = 3k + 2 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}$, unde $k = 0, 1, \ldots$. Valabilitatea pentru toți $k$ poate fi dovedită prin inducție; este clar pentru $k = 1$ și $k = 2$. În rest, este suficient să introduceți formulele în definiția $a_{n+1} = \lfloor a_n \rfloor + \frac{1}{a_n - \lfloor a_n \rfloor}$. Observăm că

$$\begin{aligned} a_{2k+2} &= \lfloor a_{2k+1} \rfloor + \frac{1}{a_{2k+1} - \lfloor a_{2k+1} \rfloor} = 3k + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}-1} = 3k + 1 + \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 3k + 2 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \\ a_{2\cdot(k+1)+1} &= \lfloor a_{2k+2} \rfloor + \frac{1}{a_{2k+2} - \lfloor a_{2k+2} \rfloor} = 3k + 2 + \frac{2}{\sqrt{3}-1} = 3k + 2 + \frac{2 \cdot (\sqrt{3}+1)}{2} = 3 \cdot (k+1) + 1 + \sqrt{3} - 1. \end{aligned}$$

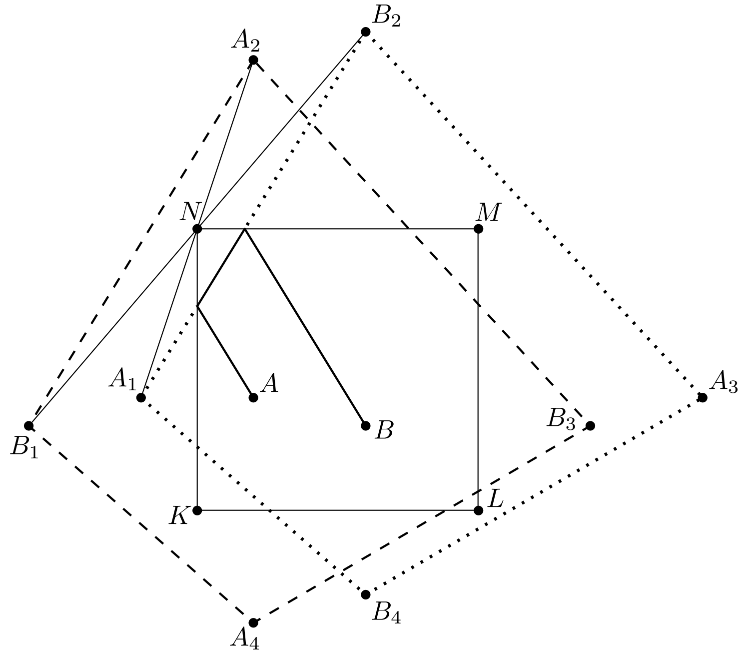
Deci, $a_{2024} = 3034 + \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 3035 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

**Problema 38.** În imagine este o masă de biliard $10 \times 10$ cu două bile. Fiecare minge este adimensională (un punct), se mișcă întotdeauna drept și când lovește un perete, este respinsă sub același unghi. Luați în considerare toate căile în care mingea $A$ lovește exact doi pereți înainte de a lovi mingea $B$ și calculați suma pătratelor lungimii acestor traiectorii.




*Rezultat.* 2520

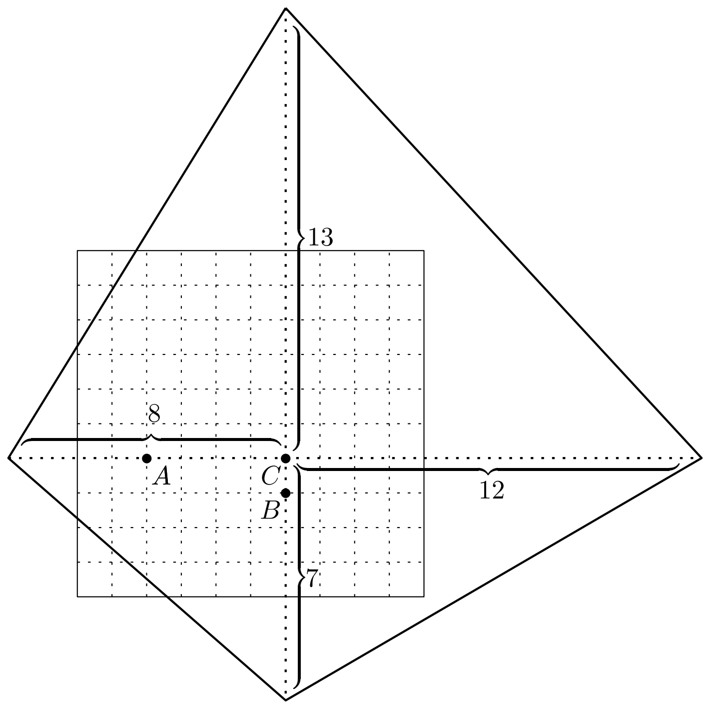
*Soluție.* Să observăm mai întâi că $A = [2, 4]$ și $B = [6, 3]$ în raport cu colțul din stânga jos al pătratului. Construim simetricele punctelor $A$ și $B$ față de laturile pătratului și notăm totul conform imaginii din stânga de mai jos.



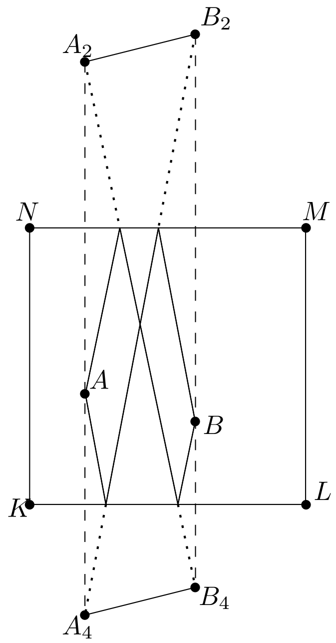

Luăm în considerare traiectoria de la $A$ la $B$ care revine de la $KN$ și apoi de la $MN$ și reflectăm părțile sale adiacente punctelor $A$ (respectiv $B$) de pe $KN$ (respectiv $MN$ ). Datorita regulii unghiului de reflexie obtinem exact segmentul $A_1B_2$. (În continuare, vom spune că traiectoria a fost *îndreptată* în $A_1B_2$). Observăm că aceasta este singura traiectorie admisibilă în care bila este respinsă de exact aceste aceste două laturi ale pătratului. Într-adevăr, îndreptarea unei posibile traiectorii $A \to MN \to KN \to B$ are ca rezultat segmentul $A_2B_1$, care nu intersectează pătratul $KLMN$. Acest lucru se datorează proprietăților de reflexie care implică faptul că $N$ este punctul de mijloc al ambelor segmente $A_1A_2$ și $B_1B_2$. Prin urmare, o astfel de traiectorie nu este posibilă.

În mod similar, toate traiectoriile dorite prin care bila se înderpătează de două laturi adiacente ale pătratului $KLMN$ se îndreaptă într-o parte a patrulaterului $A_1B_2A_3B_4$ sau copia sa deplasată $B_1A_2B_3A_4$. Dintre laturile congruente corespunzătoare, exact una este folosită deoarece cealaltă parte este în configurația nevalidă. Rezultă că aceste traiectorii contribuie la suma lungimilor pătrate de suma pătratelor lungimilor laturilor lui $A_1B_2A_3B_4$. Folosind teorema lui Pitagora și faptul că diagonalele sale sunt perpendiculare și se intersectează în punctul $C = [6, 4]$ (vezi imaginea de mai jos), calculăm că

$$2(8^2 + 13^2 + 12^2 + 7^2) = 852.$$




Acum rămâne să luăm în considerare traiectoriile care se ridică pe două laturi opuse ale pătratului $KLMN$, cum ar fi cea prezentată mai jos.




În acest caz, ambele ordine sunt posibile, rezultând o contribuție egală cu suma pătratelor diagonalelor paralelogramelor $A_2B_2B_4A_4$ și $A_1A_3B_3B_1$. Folosind faptul că suma pătratelor diagonalelor dintr-un paralelogram este egală cu suma pătratelor lungimilor sale, obținem

$$2(20^2 + 1^2 + 4^2)s = 834,$$

pentru ambele paralelograme. Prin urmare, suma totală este

$$852 + 2 \cdot 834 = 2520.$$

**Problema 39.** Notăm cu $x \parallel y$ alăturarea a două numere naturale, adică, un număr obținut prin scrierea legată a cifrelor numărului $x$ așa cum apar ele în număr și apoi cifrele numărului $y$; de exemplu, $3 \parallel 4 = 34$, $24 \parallel 5 = 245$, și $20 \parallel 24 = 2024$. Un număr natural nenul $n$ se numește *treivizibil* dacă există trei perechi distincte de numere naturale nenule (fără a omite zerourile ) $a$, $b$, și $c$ astfel încât $n = a \parallel b \parallel c$ și $a$ divide $b$ și $b$ divide $c$. Care este cel mai mare număr natural treivizibil de cinci cifre?

*Rezultat.* 94590

*Soluție.* Observăm că, deoarece toate numerele $a$, $b$ și $c$ sunt distincte și, din condiția de divizibilitate, trebuie să avem că $2 \cdot a \leq b$ și $2 \cdot b \leq c$. Fie $s(k)$ numărul de cifre ale lui $k$. Din condițiile de divizibilitate, rezultă că șirul $s(a)$, $s(b)$ și $s(c)$ trebuie să fie nedescrescător. Prin urmare, există doar două cazuri:

1. $s(a) = 1$, $s(b) = 1$ și $s(c) = 3$. Atunci numărul $a$ este de cel mult $4 < \frac{9}{2}$. Aceasta duce la rezultatul $a = 4$, $b = 8$ și $c = 992$.

2. $s(a) = 1$, $s(b) = 2$ și $s(c) = 2$. Atunci numărul $b$ este de cel mult $49 < \frac{99}{2}$. Pentru a maximiza numărul $a \parallel b \parallel c$, presupunem că prima cifră este 9. Atunci maximul posibil $b$ este $b = 45$ și, prin urmare, $c = 90$. Luând în considerare că orice $a$ mai mic duce la un rezultat mai mic.

Prin urmare, numărul maxim posibil este 94590.

**Problema 40.** Fie $n_x$ un număr natural $n$ scris în baza $x$. Găsiți suma tuturor numerelor naturale $x > 5$ pentru care afirmația "$15_x$ divide $2024_x$ " este adevărată. Exemplu: $42_7 = (4 \cdot 7 + 2)_{10} = 30_{10}$.

*Rezultat.* 471

*Soluție.* Căutăm $x$ astfel încât fracția $\frac{2x^3+2x+4}{x+5}$ să fie un număr natural. Cum

$$\frac{2x^3 + 2x + 4}{x+5} = 2x^2 - 10x + 52 - \frac{256}{x+5},$$

este suficient ca $x + 5$ să divid㠁256$= 2^8$. Deoarece $x > 5$, căutăm divizori care sunt cel puțin 10. Toți acești divizori sunt 16, 32, 64, 128 și 256. Prin urmare, soluția căutată este suma

$$\sum_{i=4}^{8}(2^i - 5) = 2^9 - 2^4 - 25 = 512 - 16 - 25 = 471.$$

**Problema 41.** Avem două cutii: prima conține cinci becuri perfecte și nouă defecte, în timp ce a doua conține nouă becuri perfecte și cinci defecte. Becurile perfecte funcționează întotdeauna, în timp ce cele defecte doar cu o probabilitate $p$ (unde $0 < p < 1$), care este aceeași pentru toate. Aflați valoarea lui $p$, pentru care următoarele evenimente au aceeași probabilitate:

1. Un bec ales aleator din prima cutie este perfect.

2. Două becuri alese aleator din a doua cutie sunt perfecte.

*Rezultat.* 7/20

*Soluție.* Probabilitatea primului eveniment este:

$$P_1 = \frac{1}{14}(5 + 9p),$$

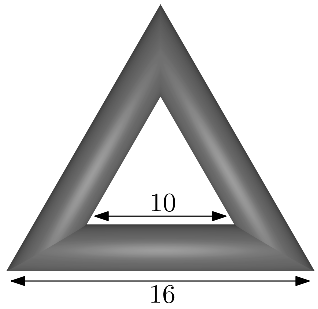
Probabilitatea celui de al doilea eveniment este:

$$P_2 = \frac{1}{\binom{14}{2}}\left(\binom{9}{2} + 9 \cdot 5p + \binom{5}{2}p^2\right).$$

Rezolvând ecuația $P_1 = P_2$, obținem

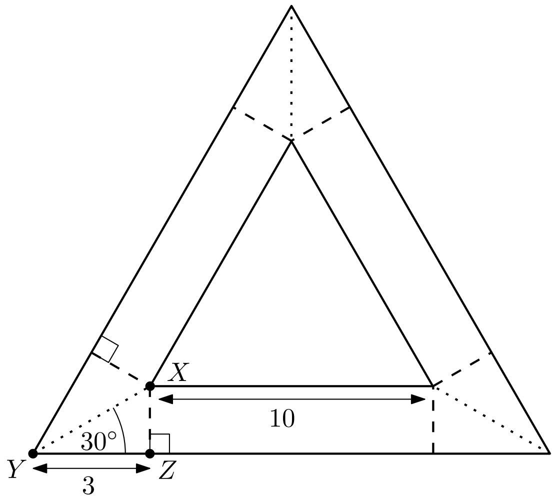
$$p = \frac{\frac{\binom{9}{2}}{\binom{14}{2}} - \frac{5}{14}}{\frac{\binom{5}{2}}{\binom{14}{2}}} = \frac{7}{20}.$$

**Problema 42.** Determinați volumul corpului prezentat mai jos, format din trei tuburi cilindrice tăiate identic. Axele cilindrilor se întâlnesc la vârfurile unui triunghi echilateral. Sunt date lungimile laterale ale contururilor din interior și din exterior (de asemenea, triunghiuri echilaterale).




*Rezultat.* $\frac{117\pi}{4}$

*Soluție.* Să ne uităm la planul care conține contururile din interior și din exterior și să desenăm segmentul $XZ$ perpendicular pe $YZ$ ca în imagine.




Simetria triunghiurilor echilaterale implicate dă $|YZ| = 3$ și $|\sphericalangle ZYX| = 30°$, și astfel $|XZ| = \sqrt{3}$. Tăierea întregului corp de-a lungul planurilor indicate în imaginea de mai sus prin linii punctate și întrerupte îl împarte în trei cilindri cu raza $\frac{|XZ|}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ și înălțime 10 și șase piese, care pot fi rearanjate pentru a forma trei cilindri de aceeași rază și înălțime 3. Volumul căutat este astfel

$$V = \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 (3 \cdot 10 + 3 \cdot 3) = \frac{117\pi}{4}.$$

**Problema 43.** Zece numere naturale distincte sunt scrise într-un rând astfel încât

- suma oricăror două numere consecutive este divizibilă cu 3,
- suma oricăror trei numere consecutive este divizibilă cu 2.

Care este cea mai mică sumă posibilă a celor zece numere?

*Rezultat.* 78

*Soluție.* Construcția optimă este $2, 1, 5, 4, 11, 7, 8, 13, 17, 10$ cu suma de 78.

Dacă există un număr divizibil cu 3, atunci și vecinii săi sunt divizibili cu 3 etc., deci toate numerele sunt divizibile cu trei. Prin urmare, suma minimă posibilă este $3 \cdot (1 + 2 + \cdots + 10) = 3 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 165 > 78$ și nu poate fi optimă.

Acum, deoarece suma a trei numere consecutive ar trebui să fie divizibilă cu 2, avem opțiuni de 2 pentru fiecare triplet: fie există trei numere pare, fie există două numere impare și unul par. Să considerăm că există un triplet $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}$ cu trei numere pare. Atunci tripletul $x_{i-1}, x_i, x_{i+1}$ nu poate conține două numere impare, prin urmare, $x_{i-1}$ este de asemenea par. Prin urmare, toate cele zece numere sunt pare. Suma minimă posibilă este $2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 110 > 78$, deci nu poate fi optimă.

Prin urmare, în fiecare triplet, există două numere impare (O), iar al treilea este par (E). Există trei configurații posibile:

- OEOOEOOEOO – Însumând 7 cele mai mici numere impare și 3 cele mai mici numere par care nu sunt divizibile cu 3 obținem că suma minimă posibilă este $1+5+7+11+13+17+19+2+4+8=87>78$, deci nu poate fi optimă.
- OOEOOEOOEO – Această configurație este simetrică cu cea anterioară.
- EOOEOOEOOE – Însumând 6 cele mai mici numere impare și 4 cele mai mici numere par care nu sunt divizibile cu 3, obținem că suma minimă posibilă este $1+5+7+11+13+17+2+4+8+10=78$, care este rezultatul dorit.

**Problema 44.** Sophia se joacă cu fracții. Ea dorește să determine numerele naturale nenule $a$, $b$ care satisfac

$$\frac{2020}{2024} < \frac{a^2}{b} < \frac{999}{1000}$$

astfel încât $a+b$ să fie minimă. Care este valoarea minimă a sumei $a+b$.

*Rezultat.* 553

*Soluție.* Inegalitatea dată este echivalentă cu

$$\frac{1000}{999} < \frac{b}{a^2} < \frac{2024}{2020}.$$

De aceea, Sophia trebuie să aleagă $a$ ca fiind cel mai mic număr natural posibil astfel încât să existe numărul natural $b$ care satisface

$$\frac{1000}{999}\cdot a^2 < b < \frac{2024}{2020}\cdot a^2 \quad\iff\quad a^2+\frac{1}{999}\cdot a^2 < b < a^2+\frac{4}{2020}\cdot a^2.$$

Pentru $a<32$, ea obține $a^2 < a^2+\frac{a^2}{999} < a^2+1$. Dacă există $a<32$ astfel încât $\frac{4a^2}{2020}>1$, ea alege cel mai mic număr natural $a$ care satisface inegalitatea. Avem

$$\frac{4\cdot 22^2}{2020}=\frac{44^2}{2020}=\frac{1936}{2020}<1 \quad\text{and}\quad \frac{4\cdot 23^2}{2020}=\frac{46^2}{2020}=\frac{2116}{2020}>1.$$

De aceea, $a=23$ și $b=a^2+1=530$ îndeplinesc condițiile problemei, și astfel minimul sumei cerute este $a+b=23+530=553$.

**Problema 45.** Podeaua unui cort are forma unui triunghi cu lungimea laterală de $1,3$, $2$ și $2,1$ metri. Producătorul dorește să facă reclamă că o persoană de înălțime $h$ poate să stea *cum dorește* acolo, în sensul că fiecare punct al podelei aparține unei posibile poziții de dormit (un segment de lungime de cel puțin $h$ conținut în triunghi). ). Care este valoarea maximă (în metri) a lui $h$?

*Rezultat.* $\frac{126}{65}$

*Soluție.* Pretindem că cel mai lung segment, care poate fi pus în interiorul unui triunghi ascuțit (care este în mod clar al nostru) prin punctul său arbitrar, este cea mai lungă înălțime. Desenând toate segmentele de la un vârf în partea opusă, acoperim întregul triunghi, iar cel mai scurt segment pe care l-am desenat este înălțimea corespunzătoare (un triunghi ascuțiunghic conține toate înălțimile sale). Rămâne de arătat că nu există un segment satisfăcător care să fie mai lung. Dacă latura corespunzătoare celei mai mari înălțimi este mai scurtă decât înălțimea, nu poate exista un segment satisfăcător mai lung (deoarece toate segmentele care conțin piciorul au o lungime de cel mult lungimea maximă a lungimii înălțimii și lungimea laturii corespunzătoare). Formula de bază pentru aria unui triunghi arată că cea mai mare înălțime aparține celei mai scurte laturi, care în cazul nostru este de $1,3$. Prin urmare, dacă înălțimea corespunzătoare este mai mare de $1,3$, am terminat.

Există multe moduri de a calcula lungimea înălțimii corespunzătoare. Unul ar fi folosirea formulei lui Heron pentru a calcula aria și apoi împărțirea la jumătatea laturii. O arătăm într-un mod mai elementar. Scalam toate valorile cu 10 (adică, calculăm în decimetri în loc de metri). Notăm cu $x, 13-x$ lungimile la care înălțimea considerată intersectează latura cu lungimea 13. Apoi, din teorema lui Pitagora, avem

$$20^2-x^2=21^2-(13-x)^2, \tag{1}$$
$$26x=128, \tag{2}$$
$$x=\frac{64}{13}. \tag{3}$$

Deci, lungimea înălțimii este

$$h = \sqrt{20^2 - \left(\frac{64}{13}\right)^2}, \tag{4}$$
$$= \frac{4}{13}\sqrt{25 \cdot 169 - 256}, \tag{5}$$
$$= \frac{4}{13}\sqrt{9 \cdot 9 \cdot 49}, \tag{6}$$
$$= \frac{252}{13}. \tag{7}$$

Cum $\frac{252}{13} > 13$, înălțimea este mai mare decât latura, așa cum dorim. Rezultatul în metri este $\frac{252}{130} = \frac{126}{65}$.

**Problema 46.** Determinați cel mai mare număr natural nenul $q$ astfel încât pentru orice număr natural nenul $n \geq 55$, numărul $q$ divide produsul

$$n(n+4)(n-23)(n-54)(n+63).$$

*Rezultat.* 40

*Soluție.* Notăm produsul cu $A$. Considerând $A$ modulo 5, observăm că factorii devin $n$, $n+4$, $n+2$, $n+1$, și $n+3$, respectiv. Cum sunt distincți, cel puțin unul dintre ei este $0 \pmod 5$, adică $5 \mid A$. Dacă $n$ este par, atunci există trei factori pari în $A$, deci $8 \mid A$. Dacă $n$ este impar, atunci sunt doi factori pari, $n-23$ și $n+63$, a căror diferența este 86. Mai mult, $86 \equiv 2 \pmod 4$, deci exact un factor este multiplu de 4, adică $8 \mid A$. Astfel, $40 \mid A$.

Luând, de exemplu, $n = 3$, se obține că cele mai mari puteri de 2 și 5 care împart $A$ sunt 8 și, respectiv, 5. Luând $n = 1$, obținem $3 \nmid A$. În cele din urmă, pentru orice prim $p > 5$, factorii lui $A$ ocupă cel mult $5 < p$ clase de reziduuri mod $p$, deci este întotdeauna posibil să alegeți $n$ astfel încât $p \nmid A$.

Prin urmare, obținem $q = 40$.

**Problema 47.** Adam, Bea, Charles, Daniel și Erik participă la două cursuri. Adam și Bea frecventează doar primul curs, Charles și Erik participă doar la celălalt, în timp ce Daniel urmează ambele. Roberta știe că fiecare curs este urmat de trei studenți, dar nu de care trei. Așa că ea le cere tuturor să arate la întâmplare cu degetul către un coleg de clasă din oricare dintre cursurile lor (adică, Daniel va alege pe fiecare dintre celelalte patru persoane cu probabilitatea $\frac{1}{4}$ etc.). Care este probabilitatea ca Roberta să-și dea seama că Daniel este cel care urmează ambele cursuri?

*Rezultat.* $\frac{3}{4}$

*Soluție.* Dacă un elev arată cu degetul către celălalt elev, vom spune că există o *conexiune* între ei.

Roberta este capabilă să-l identifice pe Daniel dacă și numai dacă cel puțin o persoană din fiecare curs are o *conexiune* cu Daniel. Dacă Daniel are mai mult de două *conexiuni*, este evident, deoarece nicio altă persoană nu poate avea atât de multe *conexiuni*. În caz contrar, Daniel are exact o *conexiune* în fiecare dintre cele două cursuri.

Fără a pierde generalitatea, presupunem că există *conexiuni* între Adam – Daniel și Charles – Daniel. Deoarece Bea nu are nicio *conexiune* cu Daniel, ea arată în mod necesar către Adam. În mod analog, Erik arată spre Charles. Prin urmare, avem o cale de *conexiuni* Bea – Adam – Daniel – Charles – Erik și, din moment ce sunt posibile numai căi de *conexiune* de lungime 4 cu toți studenții de 5 ce îl au pe Daniel la mijloc , am terminat.

Pe de altă parte, dacă nu există nicio *conexiune* a lui Daniel cu un curs, putem presupune că acesta urmează doar celălalt curs (din moment ce nu avem informații despre legătura cu primul) și, prin urmare, nu se poate distinge de colegii săi de clasă in acel curs.

Acum putem calcula probabilitatea rezultată.

1. Să presupunem că Adam și Bea arată unul spre celălalt, în timp ce Charles și Erik nu arată unul către celălalt. Probabilitatea primului eveniment este $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. În cel de-al doilea eveniment, cel puțin unul dintre Charles și Erik trebuie să arate către Daniel, prin urmare, probabilitatea $\left(1 - \frac{1}{4}\right)$ și, în sfârșit, Daniel trebuie să arate către unul dintre Adam și Bea $\left(\frac{2}{4}\right)$. O situație similară este atunci când Charles și Erik arată unul spre celălalt și Adam și Bea nu.

2. În caz contrar, cel puțin unul dintre Adam și Bea arată spre Daniel $\left(1 - \frac{1}{4}\right)$; același lucru este valabil și pentru Charles și Erik $\left(1 - \frac{1}{4}\right)$ și este irelevant spre cine arată Daniel.

Rezumând, obținem

$$\frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{2}{4} + \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{32} + \frac{3}{32} + \frac{9}{16} = \frac{3}{4}.$$

**Problema 48.** Funcția $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ satisface

1. $f(x) = x^2$ pentru orice $0 \leq x < 1$ și
2. $f(x+1) = f(x) + x + 1$ pentru orice număr real pozitiv $x$.

Determinați valorile $x$ astfel încât $f(x) = 482$.

*Rezultat.* $15 + 11 \cdot \sqrt{2} = 15 + \sqrt{242}$

*Soluție.* Fie $\{x\}$ partea fracționară a lui $x$. Atunci

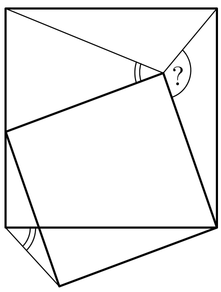
$$\begin{aligned} f(x) &= f(\lfloor x \rfloor + \{x\}) \\ &= \lfloor x \rfloor + \{x\} + f(\lfloor x \rfloor - 1 + \{x\}) = \cdots \\ &= \sum_{i=1}^{\lfloor x \rfloor} i + \lfloor x \rfloor \cdot \{x\} + f(\{x\}) \\ &= \frac{\lfloor x \rfloor \cdot (\lfloor x \rfloor + 1)}{2} + \lfloor x \rfloor \cdot \{x\} + \{x\}^2. \end{aligned}$$

Vomarata că $f$ este strict crescătoare. Pentru $x, y \in [n, n+1)$, astfel încât $x < y$, este evident din definiție, că $f(x) < f(y)$. Pe de altă parte, pentru toți $x \in [n, n+1)$, condiția $f(x) < f(n+1)$ are loc deoarece

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\lfloor x \rfloor \cdot (\lfloor x \rfloor + 1)}{2} + \lfloor x \rfloor \cdot \{x\} + \{x\}^2 \\ &< \frac{\lfloor x \rfloor \cdot (\lfloor x \rfloor + 1)}{2} + \lfloor x \rfloor + 1 \\ &= \frac{(\lfloor x \rfloor + 2) \cdot (\lfloor x \rfloor + 1)}{2} \\ &= \frac{(n+2) \cdot (n+1)}{2} \\ &= f(n+1). \end{aligned}$$

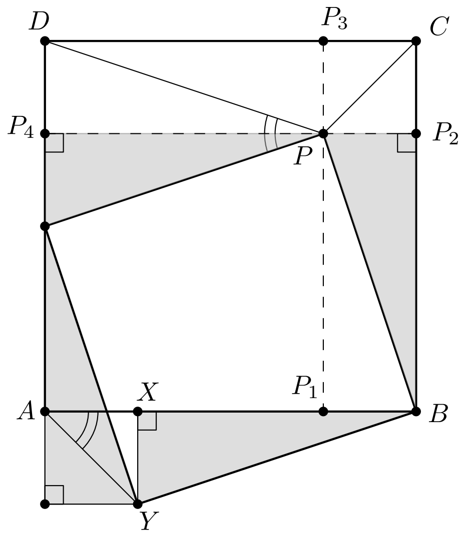
Prin urmare, există cel mult o soluție. Să găsim cel mai mare întreg astfel încât $\frac{n^2+n}{2} \leq 482$. O inecuție pătratică duce la $n = 30$. Deci știm că $\lfloor x \rfloor = 30$. Astfel, $482 = f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor \cdot (\lfloor x \rfloor + 1)}{2} + \lfloor x \rfloor \cdot \{x\} + \{x\}^2 = 15 \cdot 31 + 30 \cdot \{x\} + \{x\}^2$. Aceasta este din nou o ecuație pătratică, care duce la soluția $-15 + \sqrt{242}$. Acest număr este între 0 și 1, deci poate fi o parte fracționară a lui $x$. Astfel, singura soluție este $x = 30 - 15 + \sqrt{242} = 15 + 11\sqrt{2}$.

**Problema 49.** În imagine, există două pătrate și o pereche marcată de unghiuri egale. Determinați dimensiunea unghiului lipsă în grade.




*Rezultat.* 112.5

*Soluție.* Să desenăm proiecțiile perpendiculare ale vârfului adiacent unghiului căutat pe laturile pătratului mare și să etichetăm toate punctele conform imaginii.




Este ușor de observat că cele patru triunghiuri umbrite sunt congruente. Într-adevăr, toate sunt triunghiuri dreptunghice cu ipotenuză identică cu o latură a pătratului mai mic și un unghi egal cu $\alpha$ dat de cât de mult sunt rotite cele două pătrate unul față de celălalt. Rezultă că $P_4PP_3D$ este un dreptunghi format din alte două copii ale triunghiurilor umbrite și, prin urmare, unghiul marcat cu două dungi este egal cu $2\alpha$. Triunghiurile $AXY$ și $PP_2C$ sunt dreptunghice și isoscele (din nou datorită congruenței triunghiurilor umbrite) și, prin urmare, $2\alpha = 45°$ și unghiul căutat poate fi calculat ca

$$90° - \alpha + 45° = 112,5°.$$

**Problema 50.** Ondra s-a plictisit de operațiunile tradiționale precum adunarea și înmulțirea. Așa că și-a inventat propria operație, *stea*. Această operație, notată cu $a \star b$, este definită pe numere reale și are următoarele proprietăți:

1. $(a + b) \star c = a \star c + b \star c$,
2. $a \star (b + c) = (a \star b) \star c$.

Cunoscând că $3 \star 2 = 54$, determinați valoarea $5 \star 4$.

*Rezultat.* 1620

*Soluție.* Din a doua relație avem $5 \star 4 = (5 \star 2) \star 2$. Notând $f(x) = x \star 2$, problema revine la a găsi $f(f(5))$, știind că $f(3) = 54$.

Prima proprietate a operației stea dă imediat $f(a + b) = f(a) + f(b)$. Deci avem $54 = f(3) = f(1) + f(2) = f(1) + f(1) + f(1)$, deci $f(1) = 18$. Din aceasta, prin inducție, obținem cu ușurință $f(n) = 18n$ pentru fiecare număr întreg pozitiv $n$. Prin urmare, $f(5) = 18 \cdot 5$ și $f(f(5)) = 18^2 \cdot 5 = 1620$.

Pentru a vedea că există de fapt o astfel de operație, folosind cunoștințele de bază despre funcțiile exponențiale, putem verifica că $x \star y = x(3\sqrt{2})^y$ este bine definit pentru toate numerele reale $x$, $y$ și îndeplinește condițiile date.

**Problema 51.** Câte aranjamente unice de tablă de șah $10 \times 11$ cu pătrate albe și negre există, asigurându-ne că niciun pătrat nu are mai mult de un pătrat vecin de aceeași culoare? Tablele de șah care arată la fel doar după o rotație (adică reflectarea punctului) sunt considerate diferite.

*Rezultat.* 464

*Soluție.* Dacă există un domino $2 \times 1$ din pătrate de aceeași culoare, atunci întregul rând „dublu” sau coloana „dublă” în care se află acest domino trebuie, de asemenea, umplut cu piese de domino în culori alternate. Acest lucru asigură că toate piesele de domino trebuie să fie de aceeași orientare. Amintiți-vă că umplerea $n \times 1$ pătrate cu domino și pătrate se poate face în $f(n)$ moduri posibile, unde $f(n)$ este șirul Fibonacci unde $f(0) = 1$ și $f(1) = 1$.

Deoarece toate piesele de domino trebuie să fie de aceeași orientare și rândurile sau coloanele ulterioare sunt copii ale primului rând sau coloană, pentru a preveni dubla numărare pe tabla de șah standard, trebuie să existe $f(10) + f(11) - 1$ posibile umpluturi . În plus, colorarea oricărei table de șah poate fi obținută prin alegerea culorii colțului din stânga sus și colorarea tablei de șah într-un model alternativ.

Prin urmare, toate căile posibile sunt $2 \cdot (144 + 89 - 1) = 464$.

**Problema 52.** Helena a aflat despre mediile aritmetice. Ea a luat secvența ei preferată, secvența Fibonacci $\{F_k\}_{k=0}^{\infty}$, care satisface $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ cu $F_0 = 0$ și $F_1 = 1$ și a făcut o secvență $\{m_k\}_{k=6}^{2024}$ de medii aritmetice, care satisface $m_k = \frac{F_k+F_{k-1}+\cdots+F_{k-6}}{7}$. Câți termeni ai șirului $\{m_k\}_{k=6}^{2024}$ sunt numere întregi?

*Rezultat.* 252

*Soluție.* Este presupusă cunoașterea formulei $\sum_{i=0}^{k} F_i = F_{k+2} - 1$. Aceasta se poate demonstra prin inducție matematică: pentru primul pas, $\sum_{i=0}^{0} F_i = F_0 = 0 = 1 - 1 = F_2 - 1$, și pentru pasul doi, $\sum_{i=0}^{k+1} F_i = F_{k+1} + \sum_{i=0}^{k} F_i = F_{k+1} + F_{k+2} - 1 = F_{k+3} - 1$. Deci

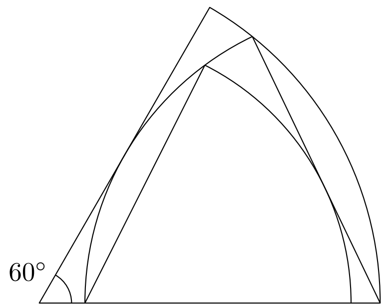
$$F_k + F_{k-1} + \cdots + F_{k-6} = \sum_{i=0}^{k} F_i - \sum_{i=0}^{k-7} F_i = F_{k+2} - F_{k-5} = 7 \cdot m_k.$$

Fie $d_l$ restul împărțirii lui $F_l$ la 7. Termenii șirului $\{d_l\}_{l=0}^{2024}$ sunt

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 1, 6, 0, 6, 6, 5, 4, 2, 6, 1, 0, 1, 1, \ldots 0$$

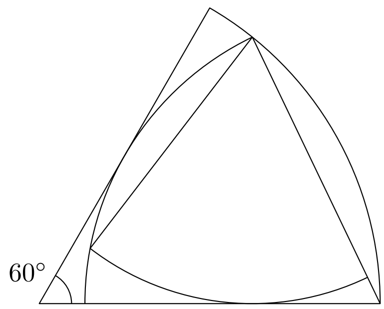
iar din moment ce $d_l \equiv d_{l-1} + d_{l-2} \pmod 7$, este clar că succesiunea resturilor $d_l$ are o perioadă de lungime 16. Toți indicii $l$ astfel încât $d_{l+2} \equiv d_{l-5} \pmod 7$ sunt $l \equiv 4, 12 \pmod{16}$. Deoarece $6 \le l \le 2024$ și $2024 = 126 \cdot 16 + 8$, există soluții sub forma $l = 16 \cdot k + 4$ pentru $1 \le k \le 126$ și, de asemenea, soluții în forma $l = 16 \cdot k + 12$ pentru $0 \le k \le 125$. În total, există $2 \cdot 126 = 252$ soluții.

**Problema 53.** În interiorul unui sector circular cu un unghi central de $60°$ este înscris un alt sector circular, iar acest lucru se face încă o dată, ca în imagine. Determinați raportul dintre razele celor mai mici și cele mai mari sectoare.



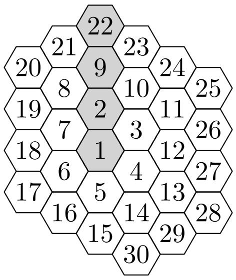

*Rezultat.* $\sqrt{39}/8$

*Soluție.* Rotiți cel mai mic sector, așa cum se arată în figura următoare.




Din care este clar că dorim să calculăm coordonata $y$ a intersecției primului și celui de-al doilea arc. Fie centrul primului sector la coordonatele $(0,0)$ și vârful dreapt la $(1,0)$. Apoi, cel mai mare cerc este descris prin $x^2 + y^2 = 1$ iar cel mediu prin $(x-1)^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$. Scăzând prima ecuație din a doua, obținem $1 - 2x = \frac{3}{4} - 1$ și, prin urmare, $x = \frac{5}{8}$. Atunci se poate concluziona cu ușurință că $y = \pm\frac{\sqrt{39}}{8}$ și, deoarece soluția negativă nu dă o configurație geometrică validă, singura soluție este $\frac{\sqrt{39}}{8}$.

**Problema 54.** Într-un stup de albine sunt 2024 de celule hexagonale. În centru, este 1 ml de miere. Într-un model în spirală, așa cum se arată în figură, există un volum crescând de miere până când ultima celulă are 2024 ml de miere. Regina Albină decide să construiască o autostradă din celula centrală spre exterior, așa cum arată culoarea gri din figură. Pentru asta, toată mierea din celulele gri trebuie îndepărtată. Câtă miere (în mililitri) trebuie relocată pentru a realiza acest proiect?




*Rezultat.* 17928

*Soluție.* Notăm cu $H(n)$ cantitatea de miere din $n$-a celulă din centru de pe autostrada dorită. Apoi $H(1) = 2$, $H(2) = 9$ și așa mai departe. Privind la la hexagonul format din celule la o distanță de exact $n$ de centru, observăm că mergând prin orice latură a acestui hexagon, trebuie să facem $n$ pași. Pe spirala de la $H(n)$ la $H(n+1)$, parcurgem cinci laturi ale hexagonului la o distanta de $n$ de centru si o latura a hexagonului la o distanta de $n+1$ dde centru. Prin urmare, se poate deduce că $H(n+1) = H(n) + 5n + (n+1) = H(n) + 6n + 1$. Apoi putem găsi forma apropiată a acestei secvențe ca

$$\begin{aligned} H(n) &= 6(n-1) + 1 + H(n-1) = \cdots \\ &= 6 \cdot ((n-1) + (n-2) + \cdots + 1) + (n-1) + H(1) \\ &= 6 \cdot \frac{(n-1)n}{2} + n + 1 \\ &= 3n^2 - 2n + 1. \end{aligned}$$

Pentru a găsi suma mierii, trebuie să găsim numărul $N$ de hexagoane (excluzându-l pe cel din centru) de pe autostradă. Deoarece există exact 2024 hexagoane, $N$ este cel mai mare număr întreg satisfăcător

$$\begin{aligned} H(N) &\leq 2024, \\ 3N^2 - 2N &\leq 2023, \\ N^2 - \frac{2}{3}N &\leq 674 + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Cum $27^2 - \frac{2}{3} \cdot 27 > 729 - 27 > 675$, valoarea lui $N$ poate fi cel mult 26 și, într-adevăr $26^2 - \frac{2}{3} \cdot 26 < 676 - 18 < 674$ este numărul căutat de hexagoane de pe autostradă.

Calculând suma, obținem

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{k=1}^{N} H(k) &= 1 + 3\sum_{k=1}^{N} k^2 - 2\sum_{k=1}^{N} k + \sum_{k=1}^{N} 1 \\ &= 1 + \frac{1}{2}N(N+1)(2N+1) - N(N+1) + N \\ &= 1 + 13 \cdot 27 \cdot 53 - 26 \cdot 27 + 26 \\ &= 17928. \end{aligned}$$

Un alt mod de a calcula suma este de a observa că

$$H(k) = 6 \cdot \frac{(k-1)k}{2} + k + 1 = 6\binom{k}{2} + \binom{k+1}{1}$$

și de a folosi identitatea identitatea din triunghiul lui Pascal

$$\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \cdots + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

Atunci,

$$\begin{aligned}1+\sum_{k=1}^{N} H(k) &= 1+6\sum_{k=1}^{N}\binom{k}{2}+\sum_{k=1}^{N}\binom{k+1}{1}\\ &= 1+6\binom{N+1}{3}+\left(\binom{N+2}{2}-1\right)\\ &= 27\cdot 26\cdot 25+14\cdot 27\\ &= 17928.\end{aligned}$$

**Problema 55.** Câte numere întregi distincte apar în lista

$$\left\lfloor \frac{1^2}{2024}\right\rfloor, \left\lfloor \frac{2^2}{2024}\right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{2024^2}{2024}\right\rfloor,$$

unde $\lfloor x\rfloor$ partea întreagă a numărul real $x$?

*Rezultat.* 1519

*Soluție.* Cum $(n+1)^2-n^2=2n+1$, pentru $n\le 1011$ avem că $\frac{(n+1)^2}{2024}-\frac{n^2}{2024}=\frac{2n+1}{2024}\le\frac{2023}{2024}<1$ și, deci $\left\lfloor\frac{(n+1)^2}{2024}\right\rfloor\le\left\lfloor\frac{n^2}{2024}\right\rfloor+1$. Astfel lista $\left\lfloor\frac{1^2}{2024}\right\rfloor, \left\lfloor\frac{2^2}{2024}\right\rfloor, \dots, \left\lfloor\frac{1012^2}{2024}\right\rfloor$ conține toate numerele naturale de la $\left\lfloor\frac{1^2}{2024}\right\rfloor=0$ până la $\left\lfloor\frac{1012^2}{2024}\right\rfloor=506$, deci în primii 1012 de termeni ai listei, sunt 507 elemente distincte.

Pe de altă parte, pentru $n\ge 1012$ avem că $\frac{(n+1)^2}{2024}-\frac{n^2}{2024}=\frac{2n+1}{2024}\ge\frac{2025}{2024}>1$ and so $\left\lfloor\frac{(n+1)^2}{2024}\right\rfloor>\left\lfloor\frac{n^2}{2024}\right\rfloor$. Astfel, fiecare element din lista $\left\lfloor\frac{1013^2}{2024}\right\rfloor, \left\lfloor\frac{1014^2}{2024}\right\rfloor, \dots, \left\lfloor\frac{2024^2}{2024}\right\rfloor$ este nou în listă (deoarece este strict mai mare decât elementul anterior), astfel încât în ultimii 1012 termeni ai secvenței, toți 1012 dintre ei sunt distincti (și sunt, de asemenea, distincti de elementele din prima jumătate a secvenței ).

În total, secvența conține $507+1012=1519$ elemente distincte.

**Problema 56.** Căte mulțimi ordonate de patru elemente distincte $\{a,b,c,d\}$ cu $a,b,c,d\in\{1,2,\dots,17\}$ există, astfel încât $a-b+c-d$ se divide cu 17?

*Rezultat.* 3808

*Soluție.* Construiți un 17-gon obișnuit $P_1\dots P_{17}$. Din $a-b\equiv d-c \pmod{17}$ rezultă că $P_a$, $P_b$, $P_c$, $P_d$ formează un trapez isoscel cu baze paralele $P_aP_c$ și $P_bP_d$. După eliminarea unui vârf, cele 16 vârfuri rămase pot fi împerecheate în 8 linii paralele și oricare două dintre ele pot fi folosite ca trapez (și submulțimile considerate corespunzătoare $\{a,b,c,d\}$). Există $17\cdot\binom{8}{2}=476$ astfel de submulțimi și fiecare dintre ele definește mai multe opt 4-tuple ordonate: trebuie să alegem care bază este $P_aP_c$ și care este $P_bP_d$ și apoi putem schimba $a$ cu $c$ și $b$ cu $d$, ceea ce oferă $2\cdot2\cdot2=8$ opțiuni. Prin urmare, rezultatul este $8\cdot476=3808$.

**Problema 57.** Fie $ABCD$ un dreptunghi și un punct $E$ pe latura $CD$, astfel încât $2DE=EC$. Fie $F$ intersecția segmentelor $BD$ și $AE$. Având în vedere că $\angle AFD=45°$, determinați raportul $\frac{AD}{AB}$.

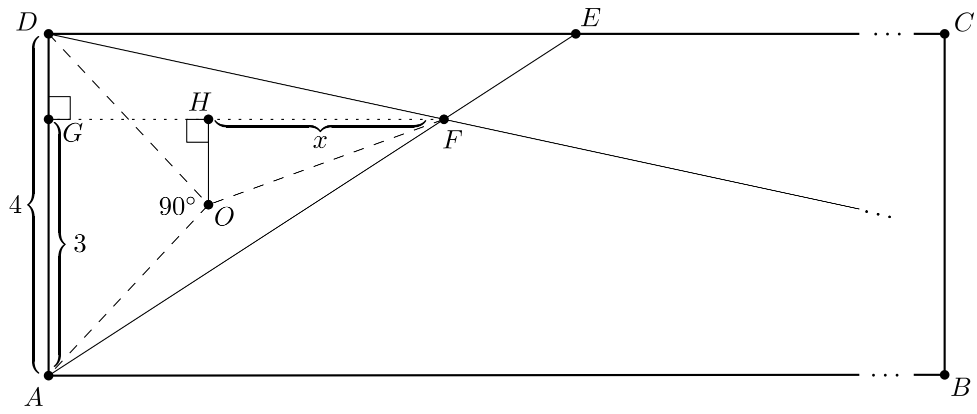
*Rezultat.* $\frac{\sqrt{7}-2}{3}$

*Soluție.* Configurația este invariantă la scară, prin urmare putem presupune că $AD=4$. Notați în continuare proiecția perpendiculară a lui $F$ pe $AD$ cu $G$, centrul cercului circumscris triunghiului $ADF$ cu $O$ și proiecția lui $O$ pe $GF$ cu $H$. Triunghiurile $ABF$ și $EDF$ sunt asemenea, cu raportul $AB:ED=3:1$, deci $AG=3$. Avem $\angle AOD=2\angle AFD=90°$ și, prin urmare, $AOD$ este triunghi dreptunghic isoscel. Distanța lui $O$ față de $AB$ cât și față de $AD$ este, prin urmare, egală cu 2. Notând $HOF$ cu $x=HF$ și folosind teorema lui Pitagora obținem

$$x^2+(3-2)^2=(2\sqrt{2})^2=8\Rightarrow x=\sqrt{7}.$$

Deoarece triunghiurile $DGF$ și $DAB$ sunt asemenea, raportul căutat este egal cu

$$\frac{DA}{AB}=\frac{DG}{DF}=\frac{1}{2+\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}-2}{3}.$$




**Problema 58.** Fie $P(x)$ un polinom de gradul 10 cu coeficienți întregi astfel încât să aibă doar rădăcini reale și $P(x)$ divide polinomul $P(P(x)+2x-4)$. Găsiți valoarea lui $\frac{P(2024)}{P(206)}$. *Notă:* Aici spunem că un polinom $P(x)$ divide un polinom $Q(x)$ dacă $P(x)$ și $Q(x)$ au coeficienți întregi și există un polinom $R(x)$ cu coeficienți întregi astfel încât $Q(x) = R(x) \cdot P(x)$.

*Rezultat.* $10^{10} = 10000000000$

*Soluție.* Dacă $r$ este o rădăcină a lui $P(x)$ atunci $2r-4, 2(2r-4)-4 = 4r-12, 2(4r-12)-4 = 8r-28, \ldots, 2^n r - 2^{n+2} + 4$ sunt toate rădăcinile lui $P(x)$. Dar $P(x)$ are cel mult 10 rădăcini reale. Astfel, există $j > i$ astfel încât $2^i r - 2^{i+2} + 4 = 2^j r - 2^{j+2} + 4$. Aceasta implică $2^i \cdot (r-4) = 2^j \cdot (r-4)$, deci $r = 4$. Astfel, $P(x) = a \cdot (x-4)^{10}$, unde $a$ este o constantă reală. Prin urmare, $\frac{P(2024)}{P(206)} = \left(\frac{2020}{202}\right)^{10} = 10^{10} = 10000000000$.

**Problema 59.** Joe stă așezat intr-un cerc format din 2024 oameni numerotați de la 1 la 2024, în sensul acelor de ceasornic.. Ei aruncă discul de frisbee de la unul la altul. Persoana de pe locul 1 aruncă un disc persoanei de pe locul 3, apoi îi aruncă un disc persoanei de pe locul 5 și așa mai departe. Fiecare persoană aruncă discul persoanei de lângă persoana rămasă (deci peste o persoană). Persoana care a fost omisă este acum supărată că nu a jucat și a părăsit cercul. Acest model se repetă până când se joacă ultimele două persoane. Dacă Joe vrea să fie unul dintre cei doi oameni care rămân la final de joc, unde ar trebui să stea la început? Aflați suma acelor numere.

*Rezultat.* 2978

*Soluție.* Dacă ultimii doi oameni jucau, atunci cel care ținea discul l-ar arunca și rămânea în cerc. Pentru a găsi poziția acestei ultime persoane, luați în considerare următoarele. Dacă există $2^n$ persoane în cerc, atunci toți cei aflați în poziția pară vor pleca după ce discul face o rundă completă și vom obține o situație similară cu $2^{n-1}$ persoane. În plus, persoana din poziția 1 ține din nou discul. Prin urmare, prin inducție, această persoană va fi ultima. Acum, dacă există $2^n + k$ persoane în cerc, atunci după $k$ aruncări, persoana care deține discul se află într-o situație similară cu $2^n$ persoane rămase. Poziția ei era $2k+1$. Printre $2024 = 1024 + 1000$ persoane, va fi poziția 2001. Pentru penultima, considerați că numărul de persoane care stau în cerc este $2^n + 2^{n+1}$ și susținem că penultima persoană se află în poziția 1. Acest lucru poate fi verificat pentru $n$ mic: astfel încât penultima persoană rămasă în cercul de persoane 3, 6 sau 12 este persoana 1. Din nou, prin inducție, dacă ar fi $2^{n+1} + 2^{n+2}$ oameni în cerc, atunci după un cerc de aruncare, ar rămâne $2^n + 2^{n+1}$ persoane, cu numărul 1 care ține din nou discul. Acum, pentru numărul de persoane egal cu $2^n + 2^{n+1} + k$ putem deduce că după $k$ aruncări ne aflăm într-o situație familiară; prin urmare, poziția penultimei persoane este de asemenea $2k+1$. Deoarece $2024 = 1024 + 512 + 488$, obținem că penultima poziție este 977. Prin urmare, răspunsul este $2001 + 977 = 2978$.

**Problema 60.** Matei aruncă frisbee cu cei trei prieteni ai săi. Aceștia respectă această regulă: nu poți da discul înapoi persoanei de la care l-ai primit. Matei a început jocul și după zece ture, discul a fost ținut din nou de Matei. În câte moduri ar putea fi finalizate cele zece treceri?

*Rezultat.* 414

*Soluție.* Calculați toate secvențele posibile de trecere, indiferent dacă Ondra este ultima. La început, Matei poate transmite discul la trei persoane. Orice alt prieten poate transmite discul doar la două persoane din cauza regulii. Dacă există $n$ ture, înseamnă că există $3 \cdot 2^{n-1}$ secvențe.

Notați numărul de secvențe care se termină cu Matei în a $n$-a tură cu $y_n$. La a $n$-a tură, există $3 \cdot 2^{n-1}$ secvențe în total. La aruncarea următoare, unele dintre aceste aruncări pot fi făcute către Matei. Cei care nu pot arunca discul lui Matei sunt cei pentru care Matei ține discul la $n$-a tură sau $n-1$-a tură pentru că trebuie să transmită discul altcuiva. Există $y_n$ și, respectiv, $2y_{n-1}$ de astfel de secvențe; prin urmare, $y_{n+1} = 3 \cdot 2^{n-1} - y_n - 2y_{n-1}$.

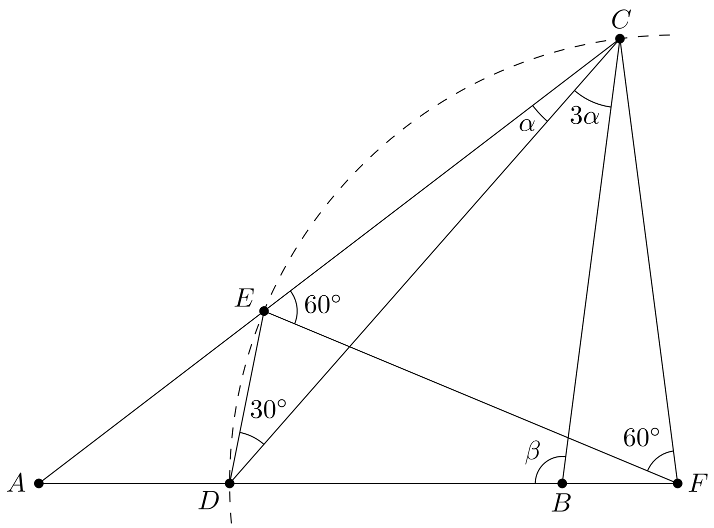
Este mai simplu să calculați fiecare termen până la $y_{10}$, apoi să căutați o formulă explicită. Din $y_1 = 0$ și $y_2 = 0$ și relația de recurență $y_{n+1} = 3 \cdot 2^{n-1} - y_n - 2y_{n-1}$ se poate calcula că $y_3 = 3 \cdot 2^1 - 0 - 0 = 6$, $y_4 = 3 \cdot 2^2 - 6 = 6$, $y_5 = 3 \cdot 2^3 - 6 - 12 = 6$, $y_6 = 3 \cdot 2^4 - 6 - 12 = 30$, $y_7 = 3 \cdot 2^5 - 30 - 12 = 54$, $y_8 = 3 \cdot 2^6 - 54 - 60 = 78$, $y_9 = 3 \cdot 2^7 - 78 - 108 = 198$, $y_{10} = 3 \cdot 2^8 - 198 - 156 = 414$.

*Soluție alternativă:* Luați în considerare o secvență de $n$ treceri cu Matei la început, la sfârșit și nicăieri între ele. Dacă această secvență se întâmplă să fie la începutul jocului, atunci Matei poate da discul celor 3 prieteni, iar apoi poate continua în doar 2 moduri, după care aruncările se pot determina. Dacă o astfel de secvență se întâmplă să fie în mijlocul jocului, atunci unul dintre prieteni îi dă discul lui Matei; prin urmare, el poate alege doar dintre doi prieteni și apoi mai rămân doar două opțiuni. O astfel de secvență de $n$ treceri nu poate fi mai scurtă de 3, prin urmare, este suficient să găsiți toate partițiile de 10 fără părți mai mici de 3. Există doar următoarele partiții de 10: 10, $3+7$, $7+3$, $6+4$, $4+6$, $5+5$, $3+3+4$, $3+4+3$ și $4+3+3$. Partiția de 10 are 6 modalități posibile de a fi jucate. Fiecare dintre partițiile care are două părți poate fi jucată în $6 \cdot 4$ moduri; prin urmare, există $5 \cdot 6 \cdot 4$ modalități. În cele din urmă, există $6 \cdot 4 \cdot 4$ modalități în care poate fi jucată partiția cu trei părți, de aici $3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4$ moduri. Împreună $6 \cdot (1 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 4) = 6 \cdot 69 = 414$ moduri.

**Problema 61.** Un punct $D$ de pe latura $AB$ a triunghiului $ABC$ este astfel încât $\angle ACD = 11,3°$ și $\angle DCB = 33,9°$. În plus, $\angle CBA = 97,4°$. Găsiți $\angle AED$, unde $E$ este un punct pe $AC$ astfel încât $EC = BC$.

*Rezultat.* 41.3°

*Soluție.* Puneți $\alpha = 11,3°$ și $\beta = 97,4°$ pentru concizie; atunci $\angle DCB = 3\alpha$. În plus, fie $F$ un punct pe dreapta $AB$ distinct de $B$ astfel încât $CB = CF$.




Să calculăm $\angle BCF$: avem $\angle FBC = 180° - \beta$ și $\triangle BCF$ este isoscel, deci $\angle BCF = 180° - 2\angle FBC = 2\beta - 180°$. Acum observăm că

$$\angle ECF = \alpha + 3\alpha + 2\beta - 180° = 4 \cdot 11,3° + 2 \cdot 97,4° - 180° = 60°.$$

Deoarece $CF = CB$, care este egal cu $CE$ conform enunțului problemei, $\triangle CEF$ este echilateral.

Mai arătăm că $FC = FD$: Deoarece $\angle DCF = 60° - \alpha$ și $\angle CFD = 180° - \beta$, avem

$$\angle FDC = 180° - (60° - \alpha) - (180° - \beta) = \alpha + \beta - 60° = 48,7° = 60° - \alpha = \angle DCF,$$

prin urmare, $\triangle CDF$ este isoscel cu vârful $F$ și $FC = FD$. Împreună cu $\triangle CEF$ fiind echilateral, aceasta implică $FC = FE = FD$; cu alte cuvinte, punctele $C$, $E$, $D$ se află pe un cerc cu centrul $F$. Prin urmare, $\angle CDE = \frac{1}{2}\angle CFE = 30°$ și $\angle DEC = 180° - \alpha - 30°$. In cele din urma,

$$\angle AED = 180° - \angle DEC = 30° + \alpha = 41,3°.$$

**Problema 62.** Numerele reale $a > b > 1$ satisfac inegalitatea

$$(ab+1)^2 + (a+b)^2 \leq 2(a+b)(a^2 - ab + b^2 + 1).$$

Determinați valoarea minimă posibilă a expresiei

$$\frac{\sqrt{a-b}}{b-1}.$$

*Rezultat.* $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

*Soluție.* Inegalitatea se mai poate scrie:

$$\begin{aligned}(ab+1)^2 + (a+b)^2 &\leq 2(a+b)(a^2 - ab + b^2 + 1),\\ 0 &\leq 2a^3 + 2b^3 - a^2b^2 - a^2 - b^2 - 4ab + 2a + 2b - 1,\\ 0 &\leq (a^2 - 2b + 1)(2a - b^2 - 1).\end{aligned}$$

Cum $a > b > 1$, avem că $a^2 > b^2$, și astfel $a^2 - 2b + 1 > b^2 - 2b + 1 = (b-1)^2 > 0$. De aceea, pentru a doua paranteză avem

$$\begin{aligned}2a - b^2 - 1 &\geq 0,\\ 2a - 2b &\geq b^2 - 2b + 1,\\ 2(a-b) &\geq (b-1)^2,\\ \frac{\sqrt{a-b}}{b-1} &\geq \frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Valoarea $1/\sqrt{2}$ se obține, de exemplu, când $a = 5/2$ și $b = 2$ (se obține egalitate pentru $a = (b^2+1)/2$), deci este într-adevăr valoarea minimă a $\sqrt{a-b}/(b-1)$.

**Problema 63.** Fie $x$, $y$, $z$ numere naturale nenule distincte astfel încât

$$\frac{(x-1)^2}{z} + \frac{(y-1)^2}{x} + \frac{(z-1)^2}{y} = \frac{(x-1)^2}{y} + \frac{(y-1)^2}{z} + \frac{(z-1)^2}{x}.$$

Determinați valoarea minimă a expresiei

$$|64x + 19y + 4z|.$$

*Rezultat.* 7

*Soluție.* Fie simbolul $\sum_{\text{cyc}} Q(x,y,z)$ care indică o sumă în care ceilalți doi termeni se obțin prin repetarea de două ori a schimbului ciclic $x \to y \to z \to x$ prin urmare, $\sum_{\text{cyc}} Q(x,y,z) = Q(x,y,z) + Q(y,z,x) + Q(z,x,y)$.

Înmulțirea ecuației cu $xyz \neq 0$ și rearanjarea duce la

$$P(x,y,z) = x(x-1)^2(y-z) + y(y-1)^2(z-x) + z(z-1)^2(x-y) = \sum_{\text{cyc}} x(x-1)^2(y-z) = 0.$$

Deoarece $P$ se anulează pentru $x = y$, $y = z$ sau $z = x$, concluzionăm că trebuie să fie divizibil cu $(x-y)(y-z)(z-x) = \sum_{\text{cyc}} x^2(z-y)$. Deoarece $P(x,y,z)$ este un polinom de gradul 4 și $\sum_{\text{cyc}} x^2(z-y)$ este un polinom de gradul 3, câtul trebuie să fie liniar

$$P(x,y,z) = \left(\sum_{\text{cyc}} x^2(z-y)\right) \cdot (ax + by + cz + d).$$

Mai mult, $xy - xz + yz - yx + zx - zy = \sum_{\text{cyc}} x(y-z) = 0$, și deci

$$\begin{aligned}P(x,y,z) &= \sum_{\text{cyc}} \left(x^3(y-z) - 2x^2(y-z) + x(y-z)\right)\\ &= \sum_{\text{cyc}} \left(x^3(y-z) - 2x^2(y-z)\right) + 0\\ &= \left(\sum_{\text{cyc}} x^2(z-y)\right) \cdot (ax + by + cz + d).\end{aligned}$$

Din aceasta putem vedea că $a$ trebuie să fie $-1$ astfel încât $x^2(z-y) \cdot ax = x^3(y-z)$ și în mod similar $b = c = -1$. În plus, din $x^2(z-y) \cdot d = -2x^2(y-z)$, obținem că $d = 2$. Prin urmare,

$$P(x, y, z) = (x-y)(y-z)(z-x)(2-x-y-z) = 0.$$

Deoarece căutăm doar triplete distincte $(x, y, z)$, trebuie să rezulte că $x + y + z = 2$. Este ușor de observat că orice triplet cu aceste proprietăți rezolvă și ecuația originală.

Pentru a găsi valoarea minimă a expresiei $|64x + 19y + 4z|$, scădem $4(x + y + z) - 8 = 0$ pentru a obține

$$|64x + 19y + 4z| = |15 \cdot (4x + y) + 8|.$$

Căutăm un număr întreg $4x + y$ care minimizează expresia. Minimul este clar atins pentru $4x + y = -1$, de exemplu, la $(x, y, z) = (-2, 7, -3)$. Prin urmare, rezultatul este 7.